Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 2, 80--85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122224

jmena pak prvním, a že shledal, kterak jsou oba výhodnými co do snadnosti a jistoty. I my jsme přesvědčeni, že by nikoho nenapadlo, děliti obyčejným způsobem, kdyby měl v počítání oběma uvedenými způsoby takový cvik jako v onom.

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

*** *Z theorie čísel.* Mějme číslo psané číslicemi 0, 1, 2 aneb 0, 1, 3 tak, že ciferný-součet není větší než 5; obrátíme-li pořádek cifer, obdržíme číslo, jehož druhá mocnina obsahuje číslice druhé mocniny prvého v pořádku opačném. Na příklad $113^2 = 12769$, $311^2 = 96721$.

(*Bianco:* Giornale di matematiche, 1884. p. 50).

Výraz $4(a^2 + b^2)^2$ lze desaterým způsobem rozložiti v součet pěti čtverců; na př.:

$$\begin{aligned}&4(a^2+b^2)^2\\ &= (a^2-2b^2)^2+(a^2-2ab)^2+(a^2+2ab)^2+(a^2)^2+(2ab)^2\\ &= (a^2+ab+b^2)^2+(a^2-ab+b^2)^2+(a^2+ab-b^2)^2+(a^2\\ &\quad -ab-b^2)^2+(2ab)^2.\end{aligned}$$

Výraz $(a^2+b^2)^3$ lze rozložiti v součet dvou, tří, čtyř neb šesti čtverců, totiž:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^3 &= (3a^2b-b^3)^2+(a^3-3ab^2)^2\\ &= (a^3-ab^2)^2+(a^2b+b^3)^2+(2a^2b)^2\\ &= (a^3-ab^2)^2+(a^2b-b^3)^2+(2a^2b)^2+(2ab^2)^2\\ &= 2(ab^2-a^2b)^2+2(ab^2+a^2b)^2+(ab^2-a^3)^2\\ &\quad +(a^2b+b^3)^2.\end{aligned}$$

(*De Rocquigny*: Mathesis, 1884. p. 212; 1885. p. 80.).

Je-li $n = pq$, jest $n!$ dělitelno součiny $(q!)^p.p!$ a $(p!)^q.q!$ Tato věta jest obsažena ve větě obecnější: Je-li

$$n = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \lambda h,$$

jest $n!$ dělitelno součinem

$$\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots \lambda!\ (a!)^\alpha (b!)^\beta \ldots (h!)^\lambda.$$

Obě věty dokázal *Weill* v Comptes rendus, tome XCIII. Nejnověji podal důkaz jich užitím počtu differenciálného *Gomes-Teixeira* (Grunert-Hoppe, Archiv 1885. p. 265).

Je-li a číslo celé libovolné, n číslo kmenné, jest $(a+1)^n-(a^n+1)$, jakož i $(2a-1)^n-2.a^n+1$ dělitelno číslem n. (*Barrieu*: Mathesis, 1884. p. 111).

Pravděpodobnosť, že dvě celá čísla mají největší společnou míru m, jest $6:(\pi m)^2$. Odtud vysvítá při $m=1$: pravděpodobnosť, že dvě čísla jsou nesoudělná, jest $6:\pi^2=0{\cdot}6079$. Dáno-li n zcela libovolných čísel celých, jest pravděpodobnosť, že čísla ta jsou vesměs nesoudělná $1:\left(\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots\right)$.

(*Cesáro:* Mathesis 1883. p. 225 a 1884. p. 150.

*** *O kvadratických odmocninách* podal *Catalan* tuto zajímavou větu: Vyhovují-li veličiny a, b podmínkám

$$a_{2n}=2a_n^2-1,\ b_{2n}=2a_nb_n,$$

jest

$$\frac{a_1^2-1}{b_1^2}=\frac{a_2^2-1}{b_2^2}=\frac{a_4^2-1}{b_4^2}=\ldots=\mathrm{N},$$

a hodnoty $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_4}{b_4}, \ldots$ konvergují k mezi $\sqrt{\mathrm{N}}$.

(Bulletins de l'académie royale de Belgique. 1883. p. 612.)

*** *Zvláštní řada průměrných hodnot.* Dána buď řada a, g, a_1, g_1, a_2, $g_2, \ldots$, jejíž členy třetím počínaje jsou střídavě arithmetickým a geometrickým průměrem vždy dvou členů předcházejících. Tak jest a_1 arithm. průměr čísel a, g; g_1 geom. průměr veličin g, a_1 atd. Členy této řady blíží se určité mezi M, kterou ustanovil *Neuberg.*

Je-li $a<g$, jest

$$\mathrm{M}=\sqrt{g^2-a^2}:\ \text{arc}\cos\frac{a}{g};$$

při $a>g$ jest

$$\mathrm{M}=\sqrt{a^2-g^2}:l\frac{a+\sqrt{a^2-g^2}}{g}.$$

Položivše $a=o$, $g=1$ obdržíme $\mathrm{M}=\frac{2}{\pi}$, výsledek to, který znal již *Descartes.*

(Mémoires de la société des sciences de Liége. 2. série, t. XI.)

$_*{}^*{}_*$ *Řady rekurentní.* Obecný člen i součet řady určené vzorcem $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ lze též přímo vyjádřiti.

D'Ocagne ukázal, že

$$u_n = \frac{u_1(\alpha^n - \beta^n) + bu_0(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta},$$

jsou-li α, β kořeny rovnice $x^2 - ax - b = 0$; součet pak řady té dán jest rovnicí

$$\sum_{n=1}^{n} u_n = \frac{\alpha^n(\alpha u_1 + bu_0)}{\varphi'(\alpha)} + \frac{\beta^n(\beta u_1 + bu_0)}{\varphi'(\beta)} + \frac{u_1 + bu_0}{\varphi'(1)},$$

značí-li $\varphi(x) = (x - 1)(x^2 - ax - b)$.

Obdobné vzorce lze vyvinouti pro případ obecnější, kde

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} + \ldots + lu_{n-p}.$$

(Nouvelles annales de mathématiques. 1884. p. 65.)

Nejjednodušší příklad řad tohoto druhu jest *řada Laméova*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., při které jest $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. O řadě té udal *Cesáro* symbolickou rovnici $u^{3n} = (2u + 1)^n$, v níž jest naznačené mocnění vykonati a z mocnitelů učiniti ukazatele.

(Nouv. annales. 1884. p. 533).

D. André dokázal, že rovnice

$$u_0x^m - u_1x^{m-1} + u_2x^{m-2} - u_3x^{m-3} + \ldots = 0,$$

jejíž součinitelé vyhovují podmínce $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ (jsou-li zároveň a, b, u_0, u_1 čísla kladná), nemůže míti více realných kořenů než dva. Při lichém m má jen jeden realný kořen a sice kladný; je-li m sudé, nemá rovnice ta buď žádného realného kořene aneb má dva kořeny realné kladné.

(Comptes rendus, tome XCVIII. p. 417.)

$_*{}^*{}_*$ *Absolutní permutace* dané skupiny prvků slovou ty přestavy, ve kterých žádný prvek nezajímá totéž místo jako ve skupině původní. Tak na př. vznikají ze skupiny *abcd* tyto abs. permutace: *badc, bcda, bdac, cadb, cdab, cdba, dabc, dcab, dcba.*

Značí-li P_n počet obecných přestav z n prvků, jest, jak známo:

$$P_n = nP_{n-1} = (n - 1)(P_{n-1} + P_{n-2});$$

obdobné vzorce platí pro počet přestav absolutních:

$$Q_n = nQ_{n-1} + (-1)^n = (n - 1)(Q_{n-1} + Q_{n-2}),$$

a mimo to jest

$$Q_n = P_n \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Pro lim $n = \infty$ plyne odtud

$$\lim (P_n : Q_n) = e,$$

jak již *Laplace* poznal. (Théorie analytique des probabilités. p. 223). Různé důkazy tohoto kombinačního výměru čísla e podali *Sunio*, *Seelhoff* a j.

(Grunert-Hoppe: Archiv. 1. Reihe, LXX. Bd; 2. Reihe, I. Bd.)

*** *Mathematické úlohy o šachu.* Duchaplná hra v šachy zavdala podnět k některým úlohám, které vyžadují řešení složitých mnohdy problemů neurčité analytiky. V dopisech k *Schumacherovi* zabýval se *Gauss* úlohou, kterak lze na šachovnici o 64ti polích postaviti 8 královen tak, aby jedna druhou bráti nemohla. Úloha tato má 92 řešení; jedno z nich dle obvyklého označení šachového jest $a_5\ b_3\ c_1\ d_7\ e_2\ f_8\ g_6\ h_4$. Ve spise svém: Lehrbuch der Determinanten-Theorie, podává *Günther* obecné řešení této úlohy pro n královen na n^2 polích. Řešení toto jest sice v principu velmi elegantní, ale obtížné při skutečném výkonu; abychom našli všech 92 řešení při obyčejné šachovnici, bylo by nám ustanoviti 20160 členů určitého determinantu 8. stupně. Velmi jednoduché řešení *Laquièreovo* nalezá se v *Lucasových* Récréations mathématiques.

Obdobná úloha týče se umístění věží neb střelců na šachovnici. Vyvineme-li determinant $(a_1\ b_2\ c_3\ d_4\ e_5\ f_6\ g_7\ h_8)$, značí každý člen jeho jedno takové postavení 8mi věží na šachovnici o 64ti polích. *Perrot* vyšetřil, že počet různých umístění k věží na šachovnici o mn polích jest

$$\frac{mn}{1} \cdot \frac{(m-1)(n-1)}{2} \cdot \frac{(m-2)(n-2)}{3} \cdots \frac{(m-k+1)(n-k+1)}{k},$$

a že 8 střelců lze na obyčejné šachovnici postaviti na 22522960 způsobů tak, aby se na vzájem neohrožovaly.

(Bulletin de la société mathématique de France. Tome XI. p. 173).

Zvláště proslavenou jest úloha o jezdci šachovém, v tom záležející, aby se vyšetřilo, kterým a kolikerým způsobem může jezdec z určitého pole vycházející dojíti postupně veškerých polí šachovnice, každého však toliko jednou. Úlohou touto zabýval se sám *Euler*, zvláště pak *Jeniš*, proslulý ruský theoretik šachovní. *Volpicelli* podal v Comptes rendus, tome LXXIV. p. 1099 úplné řešení této úlohy. *Lucas* udává počet takových spojitých drah jezdcových na šachovnici o *mn* polích na

$$4\,(2mn - 3m - 3n + 4).$$

(Mathesis, tome V. p. 35.)

(Podává prof. **Vladimír Švejcar** v Hradci Králové.)

Absorpci atmosféry pro různé paprsky vidma slunečního určil Langley vlastním svým strojem, který nazval bolometrem a který daleko citlivěji udává změny teploty než thermický článek. Bolometrem teprve podařilo se Langleyovi měřiti teplo vidma mřížového na jednotlivých jeho místech, což do té doby ještě nikomu se nezdařilo. Při tom objevil velmi důležitý a zajímavý výsledek, že spektrum hranolové proti mřížovému, pokud se týče energie tepelné, velmi jest deformováno; hlavně jeví se hranolové spektrum značně sraženo v části ultračervené. Maximum energie tepelné nalezá se při normalním mřížovém spektru blízko barvy žluté, tedy ve stejném místě jako maximum světla, a nikoli v části ultračervené jako při spektru hranolovém. Část ultračervená sahá pak značně dále než při vidmě hranolovém; má totiž část ultračervená rozlohu as 5·7krát větší než část viditelná. Křivka udávající veškerou energii aktinickou má tedy maximum mezi barvou žlutou a zelenou, a klesá na stranu červenou volně, na fialovou však velmi rychle: energie v části ultračervené jest totiž as $\frac{3}{5}$ veškeré energie, takže na část viditelnou i ultrafialovou zbývají pouze $\frac{2}{5}$. Z toho jest též patrno, že atmosfera naše není nikterak bezbarvá, nýbrž že působí podobně, jako sklo načervenalé, absorbujíc mnoho paprsků kratší délky vlny; bez ní jevilo by se slunce namodralým. Poloha maxima není však ve vidmu stálá; čím jest slunce níže u obzoru, tím více maximum blíží se barvě červené. — V témže pojednání udává Langley, že konstanta sluneční následkem této absorpce musí býti větší než dosud udávaná konstanta 2·5 kalorií; hodnota její jest as 2·8 kal.

(Wied. Ann. 19. 1883).

*** *Pokusy s radiometrem*, které konal velmi pečlivě a obezřetně Pringsheim, vedly k výsledkům pozoruhodným; zákony radiometru dle nich odvozené lze shrnouti v následující tři: 1. křídlo radiometru ustupuje od zahřáté stěny, 2. ozářená teplejší strana křídla ustupuje, 3. při radiometrech se zakřivenými křídly ustupuje strana konvexní. — Theorie radiometru, která úkazy tyto vysvětluje, zakládá se na mechanické theorii plynů. Vacuum radiometru, byť i sebe pečlivěji vyčerpané, není přece prostorem prázdným, nýbrž obsahuje ještě veliké množství molekulů vzduchu; narážejí-li tyto při svém pohybu na teplejší stěnu, zvětší se jejich kinetická energie, křídlo radiometru pak obdrží jakýsi náraz, který jest větší na straně teplé než studené, takže strana teplejší ustupuje. Že pak při křídlech zakřivených musí strana convexní ustupovati, jest dle theorie této na první pohled zřejmo, jest to týž případ jako u anemometrů. Dalším důkazem pro pravděpodobnosť hypothesy právě uvedené jest, že úkazy jsou identické, je-li radiometr naplněn silně zředěným svítiplynem.

(Wied. Ann. 19. 1883.)

Úlohy.

Řešení úlohy 30. z roč. XIV.

Je-li daný úhel $XOY = \alpha$, OA přímka úhel půlící a A bod na ní daný, veďme nejprve bodem A rovnoběžku AC k rameni OX a spusťme na ni z O kolmici OC. Na AC vztyčme v A kolmici $AD = a$, veďme CD a přenesme délku tu na CE (CE′). Nad AE jakožto tětivou sestrojme kruhový oblouk vnímající obvodový úhel α (nad AE′ taktéž oblouk s obvodovým úhlem $\pi - \alpha$), jenž rameno OX (OX′) protne v bodech H, H′ (H″, H‴). Přímka z H (a j.) skrze A vedená protne druhé rameno OY v bodě J (J′ atd.) tak, že $HJ = a$.

Důkaz. Nazveme části přímky HJ, totiž $HA = x$, $AJ = y$. Patrně jest $\sphericalangle JBA = \alpha$ a vedeme-li HE, také $\sphericalangle AHE = \alpha$, z čehož jde podobnost $\triangle$ ABJ a AHE a platí tedy: