Vincenc Jarolímek

Příspěvek k axonometrii

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 1, 8--13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122221`

V seznamu tu podaném nejsou uvedeny četné úlohy a referáty, pak některé životopisy uveřejněné ve Světozoru a Almanachu České Akademie a konečně příspěvky do Ottova Slovníku Naučného, do Encyklopaedie a do Durdíkovy Paedagogiky pro střední školy.

Příspěvek k axonometrii.

Podává prof. **Vinc. Jarolímek.**

Podle dosavadní zvyklosti doporučovalo se v orthog. axonometrii při zobrazování soustavy souřadné (tak řeč. „osového kříže") voliti předem poměry zkrácení souřadnic v malých číslech celých, vypočítati z nich úhly sevřené obrazy os X, Y, Z, resp. již vypočítané v tabulkách vyhledati a dle těchto hodnot „kříž" narýsovati. Výhoda tohoto postupu v tom záleží, že zhotovení redukčních měřítek pro souřadnice dle zvolených poměrů je velmi jednoduché. Naproti tomu přehlíží se závada jevící se tím, že strojení (dvou) úhlů vyjádřených stupni a po případě i minutami je značnou měrou nepohodlné. Nám se zdá, že výhodnější jest voliti předem a vhodně poměry (nebo i délky) stran axonometrického trojúhelníku a vypočítati hodnoty jednotek redukčních měřítek, jež pro různé trojúhelníky mohou být v tabulkách po ruce. Konstrukce axonometrického trojúhelníku z daných stran (jehož výšky dají obrazy os) a redukčních měřítek dle velikosti jednotky je zajisté pohodlnější, nežli strojení úhlů daných stupni a minutami.

Výpočet příslušných dat vymáhá řešení zajímavé úlohy trigonometrické, jež i s výsledky tuto podáváme.

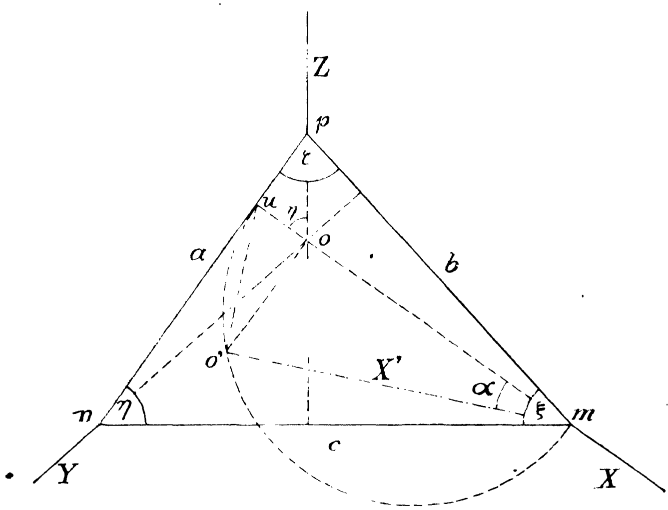
Buďtež X, Y, Z axonometrické obrazy os, o počátek souřadnic, mnp axonometrický trojúhelník, jehož strany $\overline{np} = a \perp X$, $\overline{pm} = b \perp Y$, $\overline{mn} = c \perp Z$, protější pak úhly ξ, η, ζ. Odchylku α osy X od roviny axonometrické $(mnp) \equiv \varrho$ obdržíme sklopením axonometricky promítací roviny osy X do roviny ϱ; $\overline{oo'} \perp X$, o' připadne na kružnici o průměru $\overline{mu}$; $\overline{mo'} \equiv X'$, $\sphericalangle\, o'mo = \alpha$.

V Δ moo' jest

$$\cos\alpha = \frac{\overline{mo}}{\overline{mo'}}$$

a v Δ $mo'u$
$$\cos\alpha = \frac{\overline{mo'}}{\overline{mu}};$$

součin obou rovnic dá
$$\cos^2\alpha = \frac{\overline{mo}}{\overline{mu}}. \tag{1}$$



V $\Delta\, mop$ jest $\sphericalangle\, mpo = 90^0 - \xi$, $\sphericalangle\, mop = 180^0 - \eta$, protože $\sphericalangle\, pou = \eta$; jest tedy

$$\overline{mo} : b = \cos\xi : \sin\eta$$

a mimo to v Δ mup

$$\overline{mu} = b \,.\, \sin\zeta.$$

Vložením hodnot $\overline{mo}$, $\overline{mu}$ z těchto rovnic do (1) vyjde

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos\xi}{\sin\eta\,\sin\zeta}. \tag{2}$$

Označíme-li poměry, ve kterých souřadnice x, y, z axonometricky se zkracují, $\cos\alpha = \lambda$, $\cos\beta = \mu$, $\cos\gamma = \nu$, kdež

β, γ jsou odchylky os Y, Z od roviny axonometrické, tak že platí, jak známo, rovnice

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2, \tag{3}$$

bude dle rovnice (2)

$$\lambda = cos\,\alpha = \sqrt{\frac{cos\,\xi}{sin\,\eta\; sin\,\zeta}}, \tag{4}$$

a dle analogie

$$cos\,\beta = \sqrt{\frac{cos\,\eta}{sin\,\xi\; sin\,\zeta}}, \tag{5}$$

$$\nu = cos\,\gamma = \sqrt{\frac{cos\,\zeta}{sin\,\xi\; sin\,\eta}}. \tag{6}$$

V $\triangle\, mnp$ jest dále

$$sin\,\eta = \frac{b\; sin\,\xi}{a},$$

$$sin\,\zeta = \frac{c\; sin\,\xi}{a},$$

což vloženo do (2) dá

$$cos^2\,\alpha = \frac{a^2\, cos\,\xi}{bc\; sin^2\,\xi} = \frac{a^2\, cos\,\xi}{bc\,(1 - cos^2\,\xi)}. \tag{7}$$

Avšak z $\triangle\, mnp$ jde také

$$cos\,\xi = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

tudíž dle rovnice (7) po vykonané redukci

$$\lambda = cos\,\alpha = a\sqrt{\frac{2\,(b^2 + c^2 - a^2)}{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}, \tag{8}$$

obdobně pak

$$\mu = cos\,\beta = b\sqrt{\frac{2\,(a^2 + c^2 - b^2)}{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}, \tag{9}$$

$$\nu = cos\,\gamma = c\sqrt{\frac{2\,(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}. \tag{10}$$

Jmenovatelé v odmocněncích (8), (9), (10) jsou identické, majíce hodnotu =

$$2\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Dle těchto rovnic vypočítáme poměry zkrácení souřadnic, čili jednotky redukčních měřítek, dány-li jsou strany axonometrického trojúhelníku. Připojená tabulka obsahuje tyto poměry pro různé trojúhelníky obvyklých tvarů, jež pohodlně se strojí:

a	b	c	λ	μ	ν
105	110	100	0·8158	0·7672	0·8458
110	115	100	0·8151	0·7611	0·8697
110	120	100	0·8372	0·7226	0·8815
75	80	70	0·8275	0·7525	0·8654
105	115	100	0·8412	0·7367	0·8658
110	130	100	0·8853	0·6202	0·9119

Jindy však bývají poměry zkrácení předem dány či voleny; naskýtá se tudíž úloha, vypočítati z nich naopak strany trojúhelníku axonometrického, či vlastně jen poměry stran, aby se narychlo trojúhelník a výškami jeho osy souřadnicové mohly zobraziti.

Jsou-li l, m, n čísla, jež jsou v témž poměru, jako poměry zkrácení, čili

$$l : m : n = \lambda : \mu : \nu,$$

jest dle (3)

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2d^2$$

a poměrná čísla

$$\lambda = \frac{l}{d}, \quad \mu = \frac{m}{d}, \quad \nu = \frac{n}{d},$$

tedy

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= l\sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}}, \\ \mu &= m\sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}}, \\ \nu &= n\sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Z rovnice (4) jde

$$1 - \lambda^2 = 1 - \frac{\cos \xi}{\sin \eta \sin \zeta}, \tag{12}$$

a poněvadž

$$\xi + \eta + \zeta = 2\pi,$$

jest

$$\cos \xi = -\cos(\eta + \zeta),$$

kterážto substituce do rovnice (12) dá po redukci

$$1 - \lambda^2 = \cot g\, \eta \cot g\, \zeta. \tag{13}$$

Součin rovnic (5) a (6) jest

$$\mu \,.\, \nu = \sqrt{\frac{\cot g\, \eta \,.\, \cot g \zeta}{\sin^2 \xi}}. \tag{14}$$

Sloučením rovnic (13) a (14) obdržíme

$$\sin \xi = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\mu\nu}, \tag{15}$$

a dle obdoby

$$\sin \eta = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\lambda\nu}, \tag{16}$$

$$\sin \zeta = \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\lambda\mu}. \tag{17}$$

V $\triangle\, mnp$ bude tedy

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \xi}{\sin \zeta} = \frac{\lambda}{\nu}\sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \nu^2}}, \tag{18}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \eta}{\sin \zeta} = \frac{\mu}{\nu}\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \nu^2}}, \tag{19}$$

a podle rovnic (11) posléze

$$\frac{a}{c} = \frac{l}{n}\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - l^2}{l^2 + m^2 - n^2}}, \tag{20}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{n}\sqrt{\frac{l^2 + n^2 - m^2}{l^2 + m^2 - n^2}}. \tag{21}$$

Pro poměrná čísla l, m, n na př., jež *Wiener* (Darst. Geometrie) doporučuje, dostaneme pro strany axonometrického trojúhelníku, kladouce $c = 100$, tyto hodnoty (každý *sloupec* svědčí jednomu trojúhelníku):

l	1	2	3	5	9	7	17
m	1	1	1	4	5	6	6
n	1	2	3	6	10	8	18
a	100	100	100	193·65	243·72	136·36	795·80
b	100	132·3	137·43	200·—	254·95	143·61	800·69
c	100	100	100	100	100	100	100
λ	0·816	0·943	0·973	0·806	0·887	0·811	0·9437
μ	0·816	0·471	0·324	0·645	0·493	0·695	0·333
ν	0·816	0·943	0·973	0·967	0·985	0·927	0·99923
ξ'	120^0	$131^0 24\frac{1}{2}'$	$133^0 24\frac{1}{2}'$	$108^0 13'$	$107^0 49'$	$114^0 46'$	$96^0 23'$
η'	120^0	$97^0 11'$	$93^0 11'$	$101^0 10'$	$95^0 11'$	$106^0 59\frac{1}{2}'$	$90^0 47\frac{1}{2}'$
ζ'	120^0	$131^0 24\frac{1}{2}'$	$133^0 24\frac{1}{2}'$	$150^0 37'$	157^0 —	$138^0 14\frac{1}{2}'$	$172^0 49\frac{1}{2}'$

$$\xi' = \pi - \xi = \sphericalangle\, YoZ,\quad \eta' = \pi - \eta = \sphericalangle\, XoZ,$$

$\zeta' = \pi - \zeta = \sphericalangle\, XoY$ jsou úhly sevřené obrazy os souřadnicových.