Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O větě Desargues-Weyrově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 1, 30--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122219

provedeno. Je-li rS průměrem kruhu M, splývá bod r se středem ω_0 kruhu M_0, $s_1 r = r\omega$, $\omega'' \equiv \omega$, R_1 dotýká se kruhu M v bodě r, a R'' jest společným průměrem kruhů soustředných M, M''. (V obr. 7. $L_1 \equiv 5$, dvojný bod s_1^5 jest souměrně položen ku středu ω dle R_1.)*)

20. Buď $R'' \parallel R_1$ tečnou kruhu M v bodě S (obr. 6.) a $s_1 r = rS$, pak prochází kruh M_0 bodem r a má s kruhem M ještě společný bod ω'', který jest středem kruhu M'' dotýkajícího se kružnice M v bodě S a M_0 v s_1. Paprsek jdoucí bodem s_1 protíná ještě kruh M'' v bodě m'' a přímku R'' v bodě q''; cissoidála L_1 jest geom. místem bodu a_1, jenž půlí délku $m''q''$. Splyne-li bod r se středem ω'', dotýkají se kruhy M, M_0 v bodě $\omega'' \equiv r$, a s_1 stane se v M'' bodem diametrálně protilehlým k bodu S. Křivka L_1 jmenuje se *visiera Peanova*. (Obr. 7. $L_1 \equiv 4$, dvojný bod s_1^4, $\omega'' \equiv r$.) **)

V obr. 7. jest vyznačena ještě trisektorie Maclaurin-ova, jejíž dvojný bod s_1 půlí poloměr ωr kruhu M, a pak křivka označena číslicí 3, jejíž isolovaný bod dvojný s_1^3 jest souměrně položen k středu ω dle bodu S.

O větě Desargues-Weyrově.

Napsal **V. Jeřábek.**

Věta v nadpise uvedená má toto znění:

Kuželosečky svazku protínají pevnou kuželosečku, vedenou dvěma základními body svazku, mimo tyto body ještě ve dvou bodech, jež tvoří páry involuce na pevné kuželosečce; střed této involuce jest na spojnici druhých dvou základních bodů.***)

---

*) *V. Jeřábek*: „Sur une cubique circulaire“. Mathesis. 1898, pag. 224.

Později *V. Retali*: „Sur une cubique circulaire“. Mathesis, 1899, pag. 27.

Dr. K. Zahradník: „Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen“. Sitzb. der kön. böhm. Ges. der Wiss., Prag 1906.

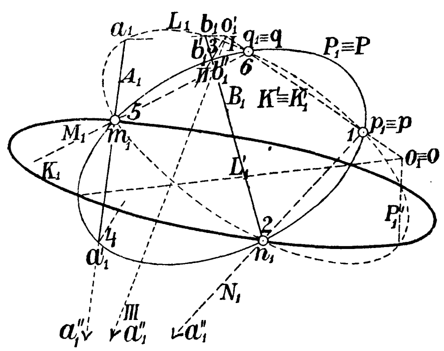
**) Dr. K. Zahradník l. c. pag. 12.

***) Dr. *Ed. Weyr*: »Projektivná geometrie základních útvarů prvého řádu.« Praha 1898, str. 147.

Ed. Weyr: »Erweiterung des Satzes von Desargues nebst Anwendungen.« Sitzb. der k. Akademie der Wissenschaften, Wien, II. Abth. 1868.

Dovolím si naznačiti cestu, po které lze k této větě též dospěti.

Nechť mají dvě kuželosečky L_1, P_1 (obr. 1.) společné body $m_1 n_1 p_1 q_1$. Budiž rovina kuželosečky P_1 průmětnou Π, a předpokládejme, že L_1 jest průmětem kuželosečky L, protínající kuželosečku $P_1 \equiv P$ v bodech $p_1 \equiv p$, $q_1 \equiv q$. Kolmicemi M^1, N^1, postavenými v bodech m_1, n_1 na Π, promítají se dva body m, n kuželosečky L do m_1, n_1. Mějme M^1 za přímku řídící, L a P za kuželosečky řídící hyperboloidu; jeho přímky jedné soustavy protínají M^1, L, P a mají své průměty ve svazku paprskovém o středu m_1. K přímkám této soustavy náleží též N^1.



Obr. 1.

Druhá soustava přímek hyperboloidu protíná N^1, L, P a promítá se do svazku paprskového o středu n_1; této soustavě patří též přímka M^1.

Protněme hyperboloid kteroukoliv rovinou v kuželosečce K, její průmět K_1 prochází body m_1, n_1, neboť K protíná obě přímky M^1, N^1. Chordálami kuželoseček K, L, P jsou průsečnice

$$(KL) \equiv P', \ (LP) \equiv K', \ (PK) \equiv L'$$

jejich rovin, a proto protínají se L' P', K' v témž bodě o, který může též býti bodem úběžným. Kuželosečky K_1, L_1, P_1, mající společnou chordálu $m_1 n_1$, mají po dvou ještě společné chordály $(K_1 L_1) \equiv P'_1$, $(L_1 P_1) \equiv K'_1$, $(P_1 K_1) \equiv L'_1$, které jsou průměty chordál P', K', L'; protínají se tudíž K'_1, L'_1, P'_1 v témž bodě

$o_1 \equiv o$. Otáčí-li se rovina kuželosečky L hyperboloidu okolo K', mění se s ní zároveň kuželosečka L_1, vytvořující svazek o základních bodech $m_1 n_1 p_1 q_1$; při tom probíhají chordály P' a P'_1 stále pevným bodem $o_1 \equiv o$. Vytíná tedy svazek kuželoseček na pevné kuželosečce K_1 páry involuce bodové, jejíž střed o_1 leží na K'_1, jak nahoře uvedená věta vyslovuje.

Paprsky A_1, B_1 svazků m_1 $(A_1 \ldots)$, n_1 $(B_1 \ldots)$ jsou průměty přímek A, B hyperboloidu různých soustav, jež se navzájem protínají. Přímky A, B protínají kuželosečku L v bodech a, b a kuželosečku $P \equiv P_1$ v bodech $a' \equiv a'_1$, $b' \equiv b'_1$, jsou tedy ab, $a'b'$ průsečnicemi roviny (AB) s rovinami kuželoseček L, P, pročež se protínají ab, $a'b'$ v témž bodě o' na průsečnici K rovin kuželoseček L, P. Vyznačíme-li tedy přímkami A_1, B_1 na L_1 průměty a_1, b_1 bodů a, b a na $P_1 \equiv P$ průměty $a'_1 \equiv a'$, $b'_1 \equiv b'$, budou se též $a_1 b_1$, $a'_1 b'_1$ protínati v témž bodě $o'_1 \equiv o'$ na K'_1.

Dvě přímky M, N různých soustav hyperboloidu mají své průměty v $M_1 \equiv m_1 q_1$, $N_1 \equiv n_1 p_1$; přímky M, N leží v téže rovině, kterou za zvláštní polohu roviny kuželosečky L pokládati můžeme, tak že v tomto případě promění se kuželosečka L ve dvě přímky M, N. Prochází tedy spojnice $a''b''$ průsečných bodův $AN \equiv a''$, $BM \equiv b''$ jakožto průsečnice rovin (AB), (MN) bodem o', v němž průsečnice $a'b'$ roviny (AB) a kuželosečky L seče stopu pq roviny (MN) na průmětně Π, v níž kuželosečka P leží. Hledíme-li k průmětům těchto průsečnic, pak procházející spojnice

$$(A_1 N_1,\ B_1 M_1) \equiv a''_1 b''_1, \quad (A_1 P_1,\ B_1 P_1) \equiv a'_1 b'_1$$

a $p_1 q_1$ týmž bodem o'_1.

Označíme-li body p_1, n_1, b'_1, a'_1, m_1, q_1' resp. číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6, snadno nahlédneme, že v šestiúhelníku 1 2 3 4 5 6, kuželosečce L_1 vepsaném, protínají se protilehlé strany v bodech (1 2, 4 5) $\equiv$ III, (2 3, 5 6) $\equiv$ II, (3 4, 6 1) $\equiv$ I, čímž přicházíme k větě Pascalově, jakožto zvláštnímu případu věty *Desargues-Weyrovy*.