Augustin Pánek

Příspěvek k počtu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 5, 268--271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122204

Má-li se n vypočítati, budiž $\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha$; pak nabývá rovnice (III) tvaru:

$$(1+p)^m = 1 + \frac{b\,sin^2\alpha}{a(1+p)};$$

a je-li $\frac{b\,sin^2\alpha}{a(1+p)} = tg^2\beta$,

$$(1+p)^m = 1 + tg^2\beta = \frac{2tg\beta}{sin 2\beta}. \tag{16}$$

Není-li n známo, budiž $\frac{1}{(1+p)^m} = cos^2\alpha$; pak nabudeš z rovnice (III):

$$(1+p)^n = \frac{b}{b - a(1+p)tg^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{a}{b}(1+p)tg^2\alpha}.$$

Určíme-li pomocný úhel β z rovnice

$$\frac{a}{b}(1+p)tg^2\alpha = tg^2\beta,$$

vznikne konečně

$$(1+p)^n = \frac{1}{1 - tg^2\beta} = \frac{tg 2\beta}{2tg\beta}. \tag{17}$$

O úlohách, jež se rovnicí $K_n = A(1+p)^n$ řeší, netřeba zde šířiti slov, jelikož tato rovnice k logarithmickému počítání upravena jest, a užívati při ní úhloměrných úkonů nižádné výhody neposkytuje.

Příspěvek k počtu pravděpodobnosti.

Napsal **Augustin Pánek.**

Jak mnohostranně užívati lze počtu pravděpodobnosti k řešení úloh nejrozmanitějších, o tom svědčí mimo jiné též problem, o němž na místě tomto pojednáme a dle něhož možno řešiti celou skupinu jiných úloh rázu podobného. Problem ten zní:

Máme-li nádobu N, vyplněnou plynem aneb tekutinou A, i vybíráme odtud látky ty povlovně doplňujíce původní objem plynem aneb tekutinou jinou B. Plyny aneb tekutiny A i B

pokládáme co do vlastností chemických i fysikálných za takové, že mísí se, objemu svého nestahujíce. (V případě tom by v našem výpočtě byly nahrazeny poměry objemové váhou). Jaká jest pravděpodobnosť p_n, že po n takových výkonech bude v nádobě N ještě látek A více než látek B.

Nazveme-li nádoby N obsah a, množství látky A vyčerpané při 1, 2, ..., n-tém výkonu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak jest množství zbylé látky A v nádobě N po n-tém vyčerpání

$$a\left(1-\frac{x_1}{a}\right)\left(1-\frac{x_2}{a}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{a}\right)$$

aneb

$$a\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_k}{a}\right).\text{*)} \tag{1}$$

Předpokládejme, že množství látky A každým jednotlivým vyčerpáváním z nádoby odstraněné jest větší než $m$tá část, pak musí množství vyjádřené výrazem (1) převyšovati $\frac{a}{m}$. Položíme-li

$$a\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_k}{a}\right)=\frac{a}{m},$$

obdržíme z této rovnice x_1, které nazveme a_1, takže

$$a_1=a\left\{1-\frac{1}{m\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{x_k}{a}\right)}\right\}. \tag{2}$$

Čím větší x_1, tím méně látky A v nádobě zůstane, proto má x_1 jakousi hodnotu mezi o a a_1. Tedy pravděpodobnosť žádaná, přihlížíme-li ku (2), bude

*) Tvar tohoto výrazu jest podoben onomu, kterým rozřeší se úloha: „V osudí nalézají se čísla od 1 do n; vytáhneme-li jedno z nich, jaká jest pravděpodobnosť, že vytažené číslo jest s číslem n nesoudělné." Úlohou touto jest zároveň odvozen známý vzorec:

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots,$$

v němž značí $a, b, c, \ldots$ čísla kmenná daného čísla n a Gauss-ův symbol $\varphi(n)$ počet čísel s daným n nesoudělných. Viz: Pánek Aug. „Některé úlohy zakládající se na počtu pravděpodobnosti." Třináctá výroční zpráva o městské střední škole v Praze, jíž podává koncem roku školního 1880 ředitel Martin Pokorný. Mimo to poznamenáváme, že podán tam ještě článek nadepsaný: „Příspěvek ke trigonometrii."

$$(3) \qquad p_1 = \frac{a_1}{a} = 1 - \frac{1}{m \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{x_k}{a}\right)},$$

pokládáme-li $x_2, x_3, \ldots, x_n$ za známé.

Maximální hodnotu může míti x_μ, když každá z hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ rovna jest nulle, a meze veličin $x_\mu, x_2, x_3, \ldots, x_n$ jsou 0 a vztažně

$$a_\mu = a\left\{1 - \frac{1}{m \prod\limits_{k=\mu+1}^{n} \left(1 - \frac{x_k}{a}\right)}\right\},$$

$$a_2 = a\left\{1 - \frac{1}{m \prod\limits_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{x_k}{a}\right)}\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = a\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Bude tedy pravděpodobnosť žádaná

$$p_n = \frac{\int_0^{a_n} \cdots \int_0^{a_3} \int_0^{a_2} p_1 \, dx_n \ldots dx_3 \, dx_2}{\int_0^{a} \cdots \int_0^{a} \int_0^{a} dx_n \ldots dx_3 dx_2}$$

aneb, zavedeme-li za p_1 hodnotu jeho ze (3) a provedeme-li též integrací jmenovatele, konečně

$$(4) \; p_n = \frac{1}{a^{n-1}} \int_0^{a_n} \cdots \int_0^{a_3} \int_0^{a_2} \left\{1 - \frac{1}{m \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{x_k}{a}\right)}\right\} dx_n \ldots dx_3 dx_2 .$$

Položíme-li $n = 2$ do vzorce independentního (4), obdržíme

$$p_2 = \frac{1}{a} \int_0^{a_2} \left[1 - \frac{1}{m\left(1 - \frac{x_k}{a}\right)}\right] dx_2$$

$$= \frac{1}{a} \Big/_0^{a_2} \left\{x_2 + \frac{a}{m} l\left(1 - \frac{x_2}{a}\right)\right\},$$

a že $\frac{a_2}{a} + \frac{1}{m} = 1$, proto

$$(\alpha)\qquad p_2 = 1 - \frac{1}{m}\left(1 + lm\right).$$

Jestli $n = 3$, bude podobně dále dle (4)

$$p_3 = \frac{1}{a^2}\int_0^{a_3}\int_0^{a_2}\left[1 - \frac{1}{m\left(1 - \frac{x_2}{a}\right)\left(1 - \frac{x_3}{a}\right)}\right]dx_3\, dx_2,$$

a vzhledem k $\frac{a_2}{a} = 1 - \frac{1}{m\left(1 - \frac{x_3}{a}\right)}$ bude

$$p_3 = \frac{1}{a}\int_0^{a_3}\left[1 - \frac{1}{m\left(1 - \frac{x_3}{a}\right)} - \frac{lm\left(1 - \frac{x_3}{a}\right)}{m\left(1 - \frac{x_3}{a}\right)}\right]dx_3.$$

Poněvadž $\frac{a_3}{a} + \frac{1}{m} = 1$, dostaneme posléz

$$(\beta)\qquad p_3 = 1 - \frac{1}{m}\left\{1 + lm + \frac{1}{2!}(lm)^2\right\}.$$

Tímto způsobem sobě vedouce nabudeme konečně pravděpodobnosti (4) ve tvaru

$$(4')\quad p_n = 1 - \frac{1}{m}\left\{1 + lm + \frac{1}{2!}(lm)^2 + \frac{1}{3!}(lm)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}(lm)^{n-1}\right\}.$$

Ježto řada v závorkách rovna jest, jak povědomo, $e_{(n)}^{lm}$, tedy

$$(4'')\qquad p_n = 1 - \frac{1}{m}\cdot e_{(n)}^{lm}.$$

Je-li n hodnotou nekonečnou, jest $e_{(n)}^{lm}$ rovno $e^{lm} = m$, tedy

$$p_n = 0,$$

jak bylo očekávati.*)

---

*) Myslím, že by táž argumentace platnosti měla i o reakcích chemických. Dejme tomu, že v nádobě N nalézá se a gramů některé kyseliny A, přidáváme po jistých kvantech tekutiny jiné, ku př. některého alkoholu B. Zachováváme poměr tak, že množství sloučením eliminovaných látek (což shoduje se zúplna u vypsaném našem případě vyčerpáváním) doplňuje se v a gramů látkou druhou B. I musil by tedy pochod esterifikace býti podán také výpočtem naším. I na roztoky pevných látek se týž pochod as hodí.