Julián P. Vervaet

Upotřebení úhloměrných úkonů při složitém úrokování

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 5, 264--268

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122203`

3.1.25, 3.2.25, 3.4.1, 3.4.5, 3.4.25, 3.8.1, 3.8.5, 3.16.1, 3.16.5, 3.32.1, 3.64.1, 9.1.25, 9.4.1, 9.4, 5, 9.8.1, 9.16.1, 9.32.1;
což spořádáno dává
$M = 12$, 24, 36, 48, 60, 72, 75, 96, 120, 144, 150, 180, 192, 225, 240, 288, 300.

Upotřebení úhloměrných úkonů při složitém úrokování.

Napsal

P. Julian Vervaet, T. J.

z Gentu v Belgii.

V této stati znamená A jistinu, která se na P % po n let při složitém úrokování ukládá a pak na konečnou hodnotu K_n vzrůstá; α i β jsou dva měnivé úhly pomocné, jichžto velikost v každé úloze určitá, ale v rozdílných úlohách jiná jest, posléze jest $p = \frac{P}{100}$.

1. Má se řešiti tato úloha: Počátkem každého roku složíš neb obdržíš částku r zlatých, a K_n budiž konečná hodnota, na jakou tyto částky pospolu vzaté při P ze sta a za n let složitým úrokováním vzrostou. Vyjádři souvislost, jaká jest mezi veličinami n, r, P a K_n.

Řešení děje se, jak známo, vzorcem:

$$K_n = \frac{r}{p}(1+p)\{(1+p)^n - 1\}. \tag{I}$$

Abychom do této rovnice úhloměrné úkony uvedli, položme $\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha$; tehdy jest $(1+p)^n - 1 = sec^2\alpha - 1 = tg^2\alpha$. Z čehož jde:

$$K_n = \frac{r}{p}(1+p)\, tg^2\alpha, \tag{1}$$

a

$$r = \frac{K_n p}{1+p} cot^2\alpha. \tag{2}$$

Není-li n známo, obdržíme z rovnice (I): $(1+p)^n = 1 + \frac{K_n p}{r(1+p)}$.

Kladouce $\frac{K_n p}{r(1+p)} = tg^2\alpha$, dostáváme:

$$(1+p)^n = 1 + tg^2\alpha = \frac{2tg\alpha}{sin\,2\alpha}. \qquad (3)$$

Ukládá-li se částka r zl. *koncem* každého roku, nabude rovnice (I) této podoby: $K_n = \frac{r}{p}\{(1+p)^n - 1\}$, a vzorce (1) a (2) přidobí se k těmto: $K_n = \frac{r}{p}\,tg^2\alpha$ a $r = K_n p\,cot^2\alpha$.

Vzorec (3) ostává bez proměny, jestliže položíme

$$tg^2\alpha = \frac{K_n p}{r}.$$

2. Pro jistinu A, která na P $^0/_0$ úročných úroků uložená, za n let na konci každého roku o částku r zlatých se zmnoží neb zmenší, jest konečná hodnota

$$K_n = A(1+p)^n \pm \frac{r}{p}\Big\{(1+p)^n - 1\Big\}. \qquad (II)$$

I do této rovnice lze úhloměrné úkony uvésti. Položíce, jako před tím $\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha$, dostaneme

$$K_n = \frac{A}{cos^2\alpha} \pm \frac{r}{p}\,tg^2\alpha = \frac{A}{cos^2\alpha}\left(1 \pm \frac{r\,sin^2\alpha}{Ap}\right),$$

a klademe-li $\frac{r\,sin^2\alpha}{Ap} = tg^2\beta$, jest $K_n = \frac{A}{cos^2\alpha}(1 \pm tg^2\beta)$.

Jestliže se jistina ročně zmnoží, jest

$$K_n = \frac{A}{cos^2\alpha}(1 + tg^2\beta) = \frac{A}{cos^2\alpha\,cos^2\beta}, \qquad (4)$$

pakli se ročně zmenší, jest

$$K_n = \frac{A}{cos^2\alpha}(1 - tg^2\beta) = \frac{2A\,tg\beta}{cos^2\alpha\,tg\,2\beta} = \frac{A\,cos\,2\beta}{cos^2\alpha\,cos^2\beta}. \qquad (5)$$

Chtějíce vypočísti jistinu A, musíme rovnici (II) vzhledem k A rozřešiti. Vypočtouce pomocný úhel α z rovnice:

$$\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha,$$

najdeme

$$A = K_n\,cos^2\alpha \mp \frac{r}{p}\,sin^2\alpha = K_n\,cos^2\alpha\left(1 \mp \frac{r\,tg^2\alpha}{K_n p}\right)$$

nebo-li, $\frac{rtg^2\alpha}{K_n p} = tg^2\beta$ postavíce,

$$A = K_n cos^2\alpha\,(1 \mp tg^2\beta).$$

Při ročním přibytku jest pak

$$A = K_n cos^2\alpha\,(1 - tg^2\beta) = \frac{2K_n cos^2\alpha\, tg\beta}{tg 2\beta} \qquad (6)$$

a při ročním úbytku jest

$$A = K_n cos^2\alpha\,(1 + tg^2\beta) = \frac{K_n cos^2\alpha}{cos^2\beta}. \qquad (7)$$

K určení hodnoty r plyne z rovnice (II):

$$r = \frac{p\{K_n - A(1+p)^n\}}{(1+p)^n - 1}.$$

Vypočteme-li pomocný úhel α z rovnice $\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha$, obdržíme:

$$r = \frac{p\{K_n cos^2\alpha - A\}}{sin^2\alpha} = K_n p\, cot^2\alpha \left(1 - \frac{A}{K_n cos^2\alpha}\right).$$

Vypočteme-li pomocný úhel β z rovnice $\frac{A}{K_n cos^2\alpha} = tg^2\beta$, dojdeme rovnice

$$r = K_n p\, cot^2\alpha\,(1 - tg^2\beta) = \frac{2K_n p\, cot^2\alpha\, tg\beta}{tg 2\beta}. \qquad (8)$$

Chtějíce nalézti n, obdržíme z rovnice (II):

$$(1+p)^n = \frac{K_n p \pm r}{Ap \pm r}.$$

Při roční přirážce jest

$$(1+p)^n = \frac{r + K_n p}{r + Ap} = \frac{1 + \frac{K_n p}{r}}{1 + \frac{Ap}{r}},$$

aneb, položíme-li $\frac{K_n p}{r} = tg^2\alpha$ a $\frac{Ap}{r} = tg^2\beta$,

$$(1+p)^n = \frac{1 + tg^2\alpha}{1 + tg^2\beta} = \frac{cos^2\beta}{cos^2\alpha}; \qquad (9)$$

při roční srážce však jest

$$(1+p)^n = \frac{r-K_np}{r-Ap} = \frac{1-\frac{K_np}{r}}{1-\frac{Ap}{r}} = \frac{1-tg^2\alpha}{1-tg^2\beta} = \frac{tg\alpha tg^2\beta}{tg2\alpha tg\beta}. \quad (10)$$

Vyčerpá-li se jistina A, za příčinou ročního úbytku po n letech úplně, dlužno pak v rovnici (II) $K_n = 0$ klásti. Tím činem dostaneš

$$A = \frac{r}{p}\left\{1-\frac{1}{(1+p)^n}\right\} \text{ a } r = \frac{Ap(1+p)^n}{(1+p)^n-1}$$

čili, klademe-li $\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha$,

$$A = \frac{r}{p} sin^2\alpha, \quad (11)$$

a

$$r = \frac{Ap}{sin^2\alpha}. \quad (12)$$

K výpočtu hodnoty n obdržíš dále

$$(1+p)^n = \frac{r}{r-Ap} = \frac{1}{1-\frac{Ap}{r}}.$$

Položíme-li tu $\frac{Ap}{r} = tg^2\beta$, vznikne rovnice

$$(1+p)^n = \frac{1}{1-tg^2\beta} = \frac{tg2\beta}{2tg\beta}. \quad (13)$$

3. Jiná základná úloha složitého úrokování jest tato:

Kdosi platí po m let počátkem jednoho každého roku částku a zlatých, aby si po této lhůtě, při $P\,\%$ složitých úroků, pojistil důchod b, jenž se mu po n let koncem každého roku splatiti má. Kterak souvisí veličiny b, b_n, K_n, m, n, P?

K řešení této úlohy slouží rovnice

$$a(1+p)\{(1+p)^m-1\} = \frac{b\{(1+p)^n-1\}}{(1+p)^n}. \quad \text{(III)}$$

Položme $\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha$ a $\frac{1}{(1+p)^m} = cos^2\beta$; tehdy jest

$$a(1+p)tg^2\beta = b\,sin^2\alpha,$$

pročež

$$a = \frac{b}{1+p} sin^2\alpha\, cot^2\beta \quad (14)$$

a

$$b = \frac{a(1+p)tg^2\beta}{sin^2\alpha}. \quad (15)$$

Má-li se n vypočítati, budiž $\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha$; pak nabývá rovnice (III) tvaru:

$$(1+p)^m = 1 + \frac{b \sin^2 \alpha}{a(1+p)};$$

a je-li $\frac{b \sin^2 \alpha}{a(1+p)} = tg^2\beta$,

$$(1+p)^m = 1 + tg^2\beta = \frac{2tg\beta}{\sin 2\beta}. \qquad (16)$$

Není-li n známo, budiž $\frac{1}{(1+p)^m} = cos^2\alpha$; pak nabudeš z rovnice (III):

$$(1+p)^n = \frac{b}{b - a(1+p)tg^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{a}{b}(1+p)tg^2\alpha}.$$

Určíme-li pomocný úhel β z rovnice

$$\frac{a}{b}(1+p)tg^2\alpha = tg^2\beta,$$

vznikne konečně

$$(1+p)^n = \frac{1}{1 - tg^2\beta} = \frac{tg 2\beta}{2tg\beta}. \qquad (17)$$

O úlohách, jež se rovnicí $K_n = A(1+p)^n$ řeší, netřeba zde šířiti slov, jelikož tato rovnice k logarithmickému počítání upravena jest, a užívati při ní úhloměrných úkonů nižádné výhody neposkytuje.

Příspěvek k počtu pravděpodobnosti.

Napsal **Augustin Pánek.**

Jak mnohostranně užívati lze počtu pravděpodobnosti k řešení úloh nejrozmanitějších, o tom svědčí mimo jiné též problem, o němž na místě tomto pojednáme a dle něhož možno řešiti celou skupinu jiných úloh rázu podobného. Problem ten zní:

Máme-li nádobu N, vyplněnou plynem aneb tekutinou A, i vybíráme odtud látky ty povlovně doplňujíce původní objem plynem aneb tekutinou jinou B. Plyny aneb tekutiny A i B