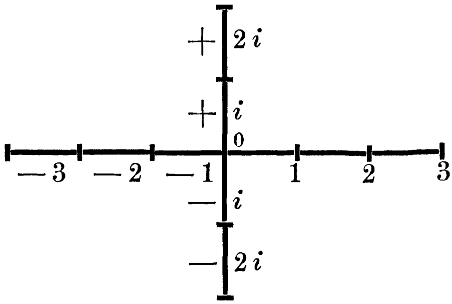
Václav Šimerka
Jednočlenné perioda zbytků z mocnin s předcházejícími členy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 5, 259--264

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122202



Že tento spůsob repraesentace jest přirozeným, vyplývajícím z protivy mezi směrem positivním a negativním, napřed stanoveným, bylo již r. 1693 od *Wallise* a r. 1753 od *Khüna* zřejmě vysloveno, a od té doby mnohokráte vyloženo; ale tím jenom znázornění a geometrické upotřebení bylo podporováno, nikoli však objasnění podstaty těchto čísel odůvodněno.

Nemajíce zde na mysli jednati vůbec o podstatě imaginarnosti a idealnosti číselných soustav, přestáváme na tomto historickém úryvku, jsouce přesvědčeni, že na základě historického rozvoje se mnohem snadněji pozná a pochopí mnohá stránka buď sporná nebo nejasná, která přímým rozborem se nevystihuje tak snadno a pohodlně. I poukazujeme v této příčině ještě jen k důkladnému pojednání, jež Dr. *L. Kraus* v tomto časopise (roč. XII. str. 153 et seqq.) dle výkladů professora *K. Weierstrasse* uveřejnil s názvem „Základové arithmetiky“.

Jednočlenná perioda zbytků z mocnin s předcházejícími členy.

Napsal

Václav Šimerka,

farář v Jenšovicích u Vysokého Mýta.

1. U modulu $M = p^\alpha q$, kdež $\alpha > 1$, a základu

$$B = pt = qu + 1,$$

kterýž $< pq$, jelikož B tímto číslem zkrátiti lze, obdržíme

$$B^\alpha = p^\alpha t^\alpha \equiv 0, \text{ (mod. } p^\alpha),$$

a vezmeme-li pro lepší přehled $B^\alpha \equiv B_\alpha$, (mod. p^α), bude

$$B_\alpha = p^\alpha x.$$

Podobně jde z $B \equiv 1$, (mod. q), $B^\alpha = B_\alpha = 1$, (mod. q), tedy $B_\alpha = qy + 1$, tak že přijdeme ku

$$B_\alpha = p^\alpha x = qy + 1,$$

kdež se dle str. 236. tohoto časopisu B_α stává číslem jednočlenné periody u $M = p^\alpha q$. Tak nalezneme u $M = 45 = 3^2.5$, $B = 3x = 5y + 1$, $B = 6$, a $B_2 = qx = 5y + 1$, $B_2 = 36$.

Není-li t číslem p dělitelno, přichází před periodou $\alpha - 1$ člen, jsou to totiž zbytky ze

$$pt,\ p^2t^2,\ p^3t^3, \ldots,\ p^{\alpha-1}t^{\alpha-1},\ (\text{mod.}\, p^\alpha q),$$

jež p^α nedělí, jakž toho vyžaduje hodnota B_α.

Že perioda taková nejen při základu B_α, nýbrž i při B jednočlenná jest, plyne z

$$B_{\alpha+1} \equiv B^{\alpha+1} = B^\alpha \,.\, B \equiv B_\alpha \,.\, B \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^\alpha),$$

a $$B_{\alpha+1} \equiv 1, \ (\text{mod. } q),$$

což dává podobně

$$B_{\alpha+1} = p^\alpha x = qy + 1.$$

Hořejší základ B není však jediný, který tutéž jednočlennou periodu poskytuje, činíť to každé číslo z podoby $C = pt + pq\varphi$, jakž vysvítá z $C_\alpha \equiv p^\alpha(t + q\varphi)^\alpha \equiv 0$, (mod. p^α), $C_\alpha = p^\alpha x$, a $C = qu + 1 + pq\varphi$, $C \equiv 1$, (mod. q), $C_\alpha \equiv 1$, $C_\alpha = qy + 1$. Všechny hodnoty $C < M$ obsaženy jsou v arithmetické posloupnosti

$$pt,\ pt + pq,\ pt + 2pq, \ldots,\ pt + (p^{\alpha-1} - 1)pq,$$

jejížto poslední člen $pt + p^\alpha q - pq$ za příčinou $pt < pq$ jest menší než $p^\alpha q = M$, a kdyby v něm φ jen o 1 zvětšeno bylo, již $pt + p^\alpha q > M$ se stává.

Tuto posloupnost má $p^{\alpha-1}$ členů, mezi nimiž se též číslo periodické nalezá; shoda $t + qz \equiv 0$, (mod. $p^{\alpha-1}$), jest totiž vždy jednou kladnou hodnotou $z < p^{\alpha-1}$ řešitelna, tak že obdržíme $t + qz = p^{\alpha-1}x$ čili $pt + pqz = p^\alpha x$ a spolu

$$pt + pqz = qu + 1 + pqz = q(u + pz) + 1 = qy + 1.$$

Je-li tedy μ množství všech základů čili členů před periodou u modulu $p^\alpha q$, bude

$$\mu = p^{\alpha-1} - 1.$$

2. Je-li $M = p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \dots p_n^\nu$, kdež $p_1, p_2, p_3, \dots, p^n$ kmenná čísla jsou, jichž počet jest n, obdržíme dle odstavce předešlého p po sobě $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, berouce potažně jakožto množství členů před periodou

$$p_1^{\alpha-1} - 1, \quad p_2^{\beta-1} - 1, \quad p_3^{\gamma-1} - 1, \dots, p_n^{\nu-1} - 1,$$

tedy celkem

$$p_1^{\alpha-1} + p_2^{\beta-1} + p_3^{\gamma-1} + \dots + p_n^{\nu-1} - n.$$

Vezmeme-li potom $p = p_1 p_2$, $q = p_3^\gamma \dots p_n^\nu$, nalezneme nejmenší základ $B = p_1 p_2 t = p_3^\gamma \dots p_n^\nu u + 1$, a všechny takové základy budou obsaženy ve výraze

$$C = p_1 p_2 t + p_1 p_2 p_3^\gamma \dots p_n^\nu \varphi;$$

protož má C za příčinou $p = 0, 1, 2, \dots, (p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} - 1)$ celkem $p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1}$ hodnot, a poněvadž mezi nimi též periodické číslo přichází, dává případ $p = p_1 p_2$ celkem $p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} - 1$ členů před periodou.

Podobně dávají amba $p_1 p_3 \dots p_1 p_n$, $p_2 p_3 \dots p_2 p_n$, $p_3 p_n \dots$ potažně za množství základů

$$(p_1^{\alpha-1} p_3^{\gamma-1} - 1) \dots (p_1^{\alpha-1} p_n^{\nu-1} - 1),$$

$$(p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1} - 1) \dots (p_2^{\beta-1} p_n^{\nu-1} - 1), \quad (p_3^{\gamma-1} p_n^{\nu-1} - 1) \text{ atd.}$$

Ze všech amb obdržíme tedy celkem

$$p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} + p_1^{\alpha-1} p_3^{\gamma-1} + \dots + p_1^{\alpha-1} p_n^{\nu-1} + p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1} + \dots$$
$$+ p_2^{\beta-1} p_n^{\nu-1} + p_3^{\gamma-1} p_n^{\nu-1} - \binom{n}{2}.$$

Pak jde z teren

$$p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1} + p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} p_n^{\nu-1} + p_1^{\alpha-1} p_3^{\gamma-1} p_n^{\nu-1}$$
$$+ p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1} p_n^{\nu-1} + \dots - \binom{n}{3}, \text{ atd.}$$

Sestavíme-li si tyto výsledky dohromady, a udává-li μ množství všech základů, seznáme netěžko, že jest

$$\mu = (1 + p_1^{\alpha-1})(1 + p_2^{\beta-1})(1 + p_3^{\gamma-1}) \dots$$
$$.(1 + p_n^{\nu-1}) - p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1} \dots - 2^n + 1.$$

Zde musí totiž poslední člen součinu $p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1} \ldots$ býti odňat; poněvadž rozvržení $p = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$, $q = 1$ ku periodě nevede, nýbrž v postupu dává za zbytky 0. Dále jest, jakž známo,

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2,$$

tedy

$$-\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} - \ldots - \binom{n}{n-1} = -2^n + 2,$$

což ku $-2^n + 1$ vede, jelikož již v součinu nadbytně přichází.

U $M = 360 = 2^3 . 3^2 . 5$, kdež tedy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $n = 3$ jest, obdržíme

$\mu = 5 . 4 . 2 - 4 . 3 - 2^3 + 1 = 21$, a sice při

$B = 2t = 45u + 1$, $C = 46 + 90\varphi$; 46, 226, 316,

a číslo periodické jest 136.

$B = 3t = 40u + 1$, $C = 81 + 120\varphi$; 201, 321; čís. per. $= 81$.

$B = 6t = 5u + 1$, $C = 6 + 30\varphi$; 6, 36, 66, 96, 126, 156, 186, 246, 276, 306, 336; čís. per. $= 216$.

$B = 10t = 9u + 1$, $C = 10 + 90\varphi$; 10, 100, 190; čís. per. $= 280$.

$B = 15t = 8u + 1$, $C = 105 + 120\varphi$; 105, 345; čís. per. $= 225$.

4. Je-li svrchu $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \nu = 1$, obdržíme $\mu = 2^n - 1 - 2^n + 1 = 0$ t. j. u modulu čtvercem kmenného čísla kteréhosi nedělitelných nemají periody předchozích členů.

Podobně nemá $M = p^\alpha$, kde p kmenné číslo jest, členů před periodou, jakž to plyne z $\mu = 1 + p^{\alpha-1} - p^{\alpha-1} - 2 + 1 = 0$. Z té příčiny se zde nepovažuje za periodu

$$p,\ p^2,\ \ldots\ p^{\alpha-1},\ 0,\ \ldots$$

5. Jiná otazka jest, jak lze k danému periodickému členu všechny moduly najíti?

Je-li zde C dané číslo, tedy $C^2 \equiv C$, (mod M), hodí se za $M > C$ každý dělitel výrazu $C^2 - C$; třeba tedy určiti všechny dělitele tohoto čísla a ponechati z nich větší než C.

U $C = 15$ jest na př. $15^2 - 15 = 210 = 2 . 3 . 5 . 7$; dělitele nalezneme tedy ze

(1, 2) (1, 3) (1, 5) (1, 7) $=$ 1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 25, 30, 42, 70, 105, 210, tak že jest

$$M = 21,\ 30,\ 35,\ 42,\ 70,\ 105,\ 210.$$

6. Jedná-li se nám o to, bychom k danému základu B všechny moduly našli, u nichž jednočlenné periody s předchozími čísly se nalezají, obdržíme při dostatečně velikém m

$$B^m \equiv B^{m+1},\ (\text{mod } M),\ \text{t. j. } B^m(B-1) = MN.$$

Abychom této podmínce vyhověli, vezměme jeden z dělitelů čísla $B-1$, který však >1 býti musí, za první faktor pro M; druhým faktorem bude jedno neb více kmenných čísel, jež v B pocházejí. Aby se však členy před periodou objevily, musí alespoň jedno z oněch kmenných čísel míti většího mocnitele, než u něho v B přichází, spolu pak musí býti $M > B$. Jsou-li tedy $a_1, a_2, a_3, \ldots, B-1$ všechny dělitele čísla $B-1$, a je-li $B = p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \ldots$, nalezneme dle pravidel variačných všechny moduly, u nichž základ B přichází, ze vzorce

$$V\left\{\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots B-1 \\ 1,\ p_1,\ p_1^2 \ldots p_1^\alpha,\ (p_1^{\alpha+1},\ p_1^{\alpha+2},\ldots) \\ 1,\ p_2,\ p_2^2 \ldots p_2^\beta,\ (p_2^{\beta+1},\ p_2^{\beta+2},\ldots) \\ 1,\ p_3,\ p_3^2 \ldots p_3^\gamma,\ (p_3^{\gamma+1},\ p_3^{\gamma+2},\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Zde udává variačné znamení V, že z každé řady po jednom členu vyjmouti máme; malé závorky naznačují však, že do každého součinu alespoň jedno z ozávorkovaných čísel vzíti třeba.

Při tom netěžko nahlédnouti, že 3 jest nejmenší hodnota B, a že ku každému B nesčíslné množství M najíti lze, kdež ve článku z předešlého čísla časopisu našeho M jen obmezené množství hodnot má.

Příklad. Které moduly v prvních 300 čísel mají základ 10? Zde máme $B-1=9$, tedy $a_1 = 3$, $a_2 = 9$; pak jde z

$$B = 10 = 2\,.\,5,\ p_1 = 2,\ p_2 = 5,\ \alpha = \beta = 1.$$

Takto obdržíme vzorec

$$V\left\{\begin{array}{l} 3,\ 9 \\ 1,\ 2,\ (4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64) \\ 1,\ 5,\ (25) \end{array}\right\}.$$

Zde jest 64 největší mocnina ze 2; protože by bylo pak $3\,.\,128 > 300$. Pravidelným vyvinutím tohoto výrazu nalezneme

3.1.25, 3.2.25, 3.4.1, 3.4.5, 3.4.25, 3.8.1, 3.8.5, 3.16.1, 3.16.5, 3.32.1, 3.64.1, 9.1.25, 9.4.1, 9.4, 5, 9.8.1, 9.16.1, 9.32.1;

což spořádáno dává

$M = 12, 24, 36, 48, 60, 72, 75, 96, 120, 144, 150, 180, 192, 225, 240, 288, 300.$

Upotřebení úhloměrných úkonů při složitém úrokování.

Napsal

P. Julian Vervaet, T. J.

z Gentu v Belgii.

V této stati znamená A jistinu, která se na $P\,\%$ po n let při složitém úrokování ukládá a pak na konečnou hodnotu K_n vzrůstá; α i β jsou dva měnivé úhly pomocné, jichžto velikost v každé úloze určitá, ale v rozdílných úlohách jiná jest, posléze jest $p = \frac{P}{100}$.

1. Má se řešiti tato úloha: Počátkem každého roku složíš neb obdržíš částku r zlatých, a K_n budiž konečná hodnota, na jakou tyto částky pospolu vzaté při P ze sta a za n let složitým úrokováním vzrostou. Vyjádři souvislost, jaká jest mezi veličinami n, r, P a K_n.

Řešení děje se, jak známo, vzorcem:

$$K_n = \frac{r}{p}(1+p)\left\{(1+p)^n - 1\right\}. \tag{I}$$

Abychom do této rovnice úhloměrné úkony uvedli, položme $\frac{1}{(1+p)^n} = cos^2\alpha$; tehdy jest $(1+p)^n - 1 = sec^2\alpha - 1 = tg^2\alpha$. Z čehož jde:

$$K_n = \frac{r}{p}(1+p)\,tg^2\alpha, \tag{1}$$

a

$$r = \frac{K_n p}{1+p}\,cot^2\alpha. \tag{2}$$

Není-li n známo, obdržíme z rovnice (I): $(1+p)^n = 1 + \frac{K_n p}{r(1+p)}$.