Arnošt Dittrich

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati. [V.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 5, 406--418

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122177

v různých svých větvích jsou různé intensity, a to větší, kde jest zakřivení větve větší. Vysvětlení podává obr. 1., ve kterém úmyslně ellipsa není vytažena, nýbrž naznačena jen jednotlivými polohami kmitajícího bodu; jest ihned viděti, že na místech, kde ellipsa jest zakřivenější, bod se pohybuje menší rychlostí, tudíž že na místech těch jako déle setrvává; odtud dojem zrakový déle trvá, tak že se tu křivka jeví jasnější. Ovšem to vše předpokládá, že pohybem vibrujícího bodu vzniká dojem úplné spojitosti křivky, což zase vyžaduje, aby světlý bod proběhl celou křivkou v době menší, než asi $\frac{1}{15}$ sekundy.

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

(Dokončení.)

2. *v souřadnicích Lagrangeových.* Jak na počátku § 5. uvedeno, obdržíme differencialní rovnice, jimž všeobecné komponenty sil hoví, má-li o soustavě platiti věta třetí, z výrazů

$$(\mathrm{W}'_i A) \equiv 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Poněvadž v Lagrangeových souřadnicích jest dle vzorce (19) A dáno výrazem

$$Af \equiv \sum_1^m{}^s \left(\alpha'_s \frac{\partial f}{\partial \alpha_s} + \xi_s \frac{\partial f}{\partial \alpha'_s}\right)$$

a symboly W'_i dány výrazy

$$\mathrm{U}'_i f \equiv \sum_1^m{}^\mu \left(\eta_{i\mu} \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu} + \frac{\partial f}{\partial \alpha'_\mu} \sum_1^m{}^\sigma \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma} \alpha'_\sigma\right), \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Provedeme-li nyní závorkové výrazy $(\mathrm{U}'_i A) \equiv 0$, obdržíme, že

$$(\mathrm{U}'_i A) = \sum_1^m{}^\mu \left[(\mathrm{U}'_i \alpha'_\mu - A\eta_{i\mu}) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu} + (\mathrm{U}'_i \xi_\mu - A \sum_1^m{}^\sigma \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma} \alpha'_\sigma) \frac{\partial f}{\partial \alpha'_\mu}\right] = 0.$$

Poněvadž

$$\mathrm{U}'_i \alpha'_\mu = \sum_1^m{}^\sigma \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma} \alpha'_\sigma, \qquad \varDelta \eta_{i\mu} = \sum_1^m{}^\sigma \alpha'_\sigma \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma},$$

ježto $\eta_{i\mu}$ nezávisí na α', redukuje se hledaný výraz na

$$\sum_1^m{}^\mu \frac{\partial f}{\partial \alpha'_\mu} (\mathrm{U}'_i \xi_\mu - \varDelta \sum_1^m{}^\sigma \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma} \alpha'_\sigma) = 0.$$

Pro libovolnost funkce f nemůže výraz ten vymizeti jinak, leč je-li

$$\text{(59)} \qquad \mathrm{U}'_i \xi_\mu - \varDelta \sum_1^m{}^\sigma \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma} \alpha'_\sigma = 0, \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, 6, \\ \mu = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Tyto rovnice, jež představují nutné a dostačující podmínky pro síly soustav, o nichž platí věta třetí, vyjadřují v Lagrangeových souřadnicích, co rovnice (46) neb (48) v Descartesových.

Ke konci předchozího odstavce odvozena věta o práci, kterou lze vyjádřiti též v souřadnicích Lagrangeových. Soustava zaujímej libovolnou polohu α. Udělíme-li soustavě jakékoliv rychlosti α', vykonají síly během doby dt práci

$$f dt = dt \sum_1^m{}^\mu \alpha'_\mu \mathrm{A}_\mu.$$

Soustava shodná budiž v poloze $\bar{\alpha} = \alpha\mathfrak{A}$, kde $\mathfrak{A}$ značí opět nějakou transformaci ze skupiny všech pošinutí a otočení. Udělme jí rychlosti $\bar{\alpha}'$ tak, aby totéž $\mathfrak{A}$ převádělo polohu $\alpha_\mu + \alpha'_\mu dt$ v polohu $\bar{\alpha}_\mu + \bar{\alpha}_\mu dt$, $\mu = 1, \ldots, m$. Pak souvisí stav a, jenž má souřadnice α, α' se stavem $\bar{a}$, jenž dán veličinami $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}'$, transformací rozšířené skupiny $\mathfrak{A}$, jest tedy $\bar{a} = a\mathfrak{A}'$. Práce, kterou shodná soustava během doby dt vykoná, jest pak

$$\bar{f} dt = dt \sum_1^m{}^\mu \bar{\alpha}'_\mu \bar{\mathrm{A}}_\mu,$$

kde $\bar{\mathrm{A}}_\mu$ jsou hodnoty sil v poloze $\bar{\alpha}$. Poněvadž stav $\bar{a} = a\mathfrak{A}'$ jest dle předchozího

$$\sum_1^m{}^\mu \bar{\alpha}'_\mu \bar{\mathrm{A}}_\mu = \sum_1^m{}^\mu \alpha'_\mu \mathrm{A}_\mu.$$

Vzorci $\mathfrak{A}'$ dána šestičlená skupina vytvořená infinitesimalními transformacemi $U_i'f$, proto jest

$$\bar{f} = f + \sum_1^6{}^i e_i U_i' f + \frac{1}{2!} \sum_1^6{}^i \sum{}^{\varkappa} e_i e_{\varkappa} U_i' U_{\varkappa}' f + \ldots$$

Pravá strana tohoto výrazu má býti identicky rovna f. K tomu jest nutno, aby

$$U_i' f = 0, \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

To však též stačí, neboť pak vymizí též další členové řady. Dosadíme-li za f, obdržíme, že

$$(60) \qquad U_i' \sum_1^m{}^{\mu} \alpha_{\mu}' A_{\mu} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Rovnice ty lze transformovati, čímž obdržíme

$$U_i' \sum_1^m{}^{\mu} \alpha_{\mu}' A_{\mu} = \sum_1^m{}^{\mu} [\alpha_{\mu}' U_i' A_{\mu} + A_{\mu} U_i' \alpha_{\mu}'].$$

Dosadíme-li sem za $U_i' \alpha_{\mu}'$ výraz v předchozím vypsaný, plyne, že

$$U_i' \sum_1^m{}^{\mu} \alpha_{\mu}' A_{\mu} = \sum_1^m{}^{\mu} \alpha_{\mu}' U_i' A_{\mu} + \sum_1^m{}^{\mu} A_{\mu} \sum_1^m{}^{\sigma} \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_{\sigma}} \alpha_{\sigma}',$$

Zavedeme-li v prvém součtu místo indexu μ index σ, jest

$$\sum_1^m{}^{\sigma} \alpha_{\sigma}' U_i' A_{\sigma} + \sum_1^m{}^{\sigma} \alpha_{\sigma}' \sum_1^m{}^{\mu} \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_{\sigma}} A_{\mu} = \sum_1^m{}^{\sigma} \alpha_{\sigma}' (U_i' A_{\sigma} + \sum_1^m{}^{\mu} \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_{\sigma}} A_{\mu}).$$

Dle rovnic (60) jest tento výraz roven nulle pro jaké koliv α_{σ}'. Poněvadž dle věty druhé síly A_{μ} závisí jen na souřadnicích, jest každý z koefficientů veličin α_{σ}' jen funkcí proměnných α. Proto nemůže výraz ten vymizeti jinak, leč je-li

$$(61) \qquad U_i' A_{\sigma} + \sum_1^m{}^{\mu} \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_{\sigma}} A_{\mu} = 0, \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, 6 \\ \sigma = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Rovnice ty budou identické s rovnicemi (59). Neboť, pokud síly závisí jen na souřadnicích, jsou rovnice (58), jež odpovídají rovnicím (60), identické s rovnicemi (48), jež odpovídají soustavě (59). Kdyby tedy rovnice (61) představovaly jinou řadu podmínek než rovnice (59), plynuly by i z rovnic (58) jiné podmínky než rovnice (48).

Poněvadž rovnice (59) představují nutné a dostačující podmínky pro síly soustav, o nichž platí věta třetí, tvoří též rovnice (61) podmínky nutné a dostačující. Rovnice (61) mohou však rovnice (59) nahraditi jen tehdá, nezávisí-li síly na rychlostech. V tomto složitějším případě třeba užíti rovnic původních.

§ 6. *Důsledky věty třetí.* Následující věty platí, ať počítáme v Descartesových či Lagrangeových souřadnicích, poněvadž důkazy jejich lze provésti nezávisle na povaze souřadnic.

Že soustava přejde pohybem během doby t ze stavu u do stavu $\bar{u}$, lze dle § 3. vyjádřiti symbolickou rovnicí $\bar{u} = u\mathrm{T}_t$. Během určité doby τ přejde pak stav u ve stav $v = u\mathrm{T}_\tau$. Předpokládejme, že stav v vznikne ze stavu u určitou transformací rozšířené skupiny všech pošinutí a otočení P'. Pak jest $v = u\mathrm{P}'$. Přibéřeme-li k symbolickým rovnicím

$$v = u\mathrm{T}_\tau, \qquad v = u\mathrm{P}'$$

dvě další, jež plynou z věty druhé a třetí

$$\mathrm{T}\mathrm{P}' = \mathrm{P}'\mathrm{T}, \qquad \mathrm{T}_t\mathrm{T}_{t_1} = \mathrm{T}_{t+t_1},$$

lze odvoditi větu o stavu $\bar{u} = u\mathrm{T}_t$ pro $t > \tau$.

Budiž $t = \varkappa\tau + \vartheta$, kde $\varkappa$ jest celé kladné číslo volené tak, aby $\vartheta < \tau$. Pak jest $\bar{u} = u\mathrm{T}_{\varkappa\tau+\vartheta}$. Užijeme-li čtyř uvedených symbolických rovnic, lze výraz ten transformovati, čímž plyne, že

$$\bar{u} = u\mathrm{T}_\tau\mathrm{T}_{(\varkappa-1)\tau+\vartheta} = v\mathrm{T}_{(\varkappa-1)\tau+\vartheta} = u\,\mathrm{P}'\mathrm{T}_{(\varkappa-1)\tau+\vartheta} = u\mathrm{T}_{(\varkappa-1)\tau+\vartheta}\,.\,\mathrm{P}'.$$

Obdobným způsobem obdržíme, že

$$\bar{u} = u\mathrm{T}_\tau\mathrm{T}_{(\varkappa-2)+\vartheta}\mathrm{P}' = v\mathrm{T}_{(\varkappa-2)+\vartheta}\,.\,\mathrm{P}' = u\mathrm{P}'\mathrm{T}_{(\varkappa-2)+\vartheta}\mathrm{P}'$$
$$= u\mathrm{T}_{(\varkappa-2)+\vartheta}\,.\,\mathrm{P}'^2.$$

Zde psáno, jak Lie činí, místo $\underbrace{\mathrm{P}'\mathrm{P}'\mathrm{P}'\ldots\mathrm{P}'}_{m}$ zkrátka P'^m. Pokračujeme-li v těchto transformacích, nalezneme konečně, že $\bar{u} = u\mathrm{T}_\vartheta \mathrm{P}'^k$.

Vzorec ten značí, že stav soustavy po době $k\tau + \vartheta$, $\vartheta < \tau$, která po době τ přejde do stavu, jenž z původního vzniká transformací P′, obdržíme následujícím způsobem:

Vyhledáme stav $u\mathrm{T}_\vartheta$, do něhož soustava přejde pohybem během doby ϑ. Pak převedeme nalezený stav onou transformací P′ do druhého stavu, druhý stav touže transformací P′ do třetího stavu, atd. až $\varkappa$-tý stav touže transformací P′ do $(\varkappa + 1)$ stavu. A to jest stav $\bar{u}$, v nějž soustava přejde během doby $\varkappa\tau + \vartheta$.

Je-li $\mathrm{P}' = 1$, jest transformace, jež stav u ve stav v převádí, transformací identickou. Pak jest $v = u1 = u$, t. j. soustava vrátí se po době τ do stavu původního. Hledáme-li nyní pomocí vzorce $\bar{u} = u\mathrm{T}_\vartheta \mathrm{P}'^\varkappa$ stav, v nějž stav u přejde během doby $t = \varkappa\tau + \vartheta$, obdržíme, že

$$\bar{u} = u\mathrm{T}_\vartheta 1^\varkappa = u\mathrm{T}_\vartheta.$$

Stav soustavy jest proto takový jako před dobou $\varkappa\tau$. Pohyb soustavy jest periodický, perioda jeho jest τ.

Obdobné dvě věty platí o práci. V § 5. odstavec 1. odvozeno, že shodná soustava při shodném pohybu poskytne během určité doby t tolik práce, jako původní soustava během téže doby. Dle definice shodnosti pohybů souvisí polohy, jež obě soustavy v téže době zaujímají, vždy týmže pošinutím a otočením. Je-li α polohou původní soustavy, β polohou shodné soustavy v témže okamžiku, je-li P určité pošinutí a otočení, jest $\beta = \alpha \mathrm{P}$. Počítáme-li v Lagrangeových souřadnicích, jest $\mathrm{P} \equiv \mathfrak{A}$, užíváme-li Descartesových, jest $\mathrm{P} \equiv \mathrm{S}$. Předpokládejme nyní, že poloha $\bar{\alpha}$, v níž původní soustava během určité doby t přejde z polohy α_0, jest identická s polohou β_0, kterou shodná soustava před dobou t zaujímala. Poloha ta souvisí s polohou α_0, kterou původní soustava před dobou t zaujímala, vztahem $\beta_0 = \alpha_0 \mathrm{P}$. Proto jest poloha původní soustavy po době t $\bar{\alpha} = \alpha_0 \mathrm{P}$. Že tento předpoklad jest přípustný, plyne z věty prvé.

Vyjde-li původní soustava z polohy α_0, přejde tato soustava přes polohy α během doby t do polohy $\bar{\alpha} = \beta_0$. Polohu β_0 zaujímá shodná soustava při shodném pohybu před dobou t.

Nyní lze ukázati, že původní soustava, jež zaujímá polohu β_0, může proběhnouti všechny polohy β, které by shodná soustava při shodném pohybu procházela. Neboť polohy ty souvisí s polohami α pošinutím a otočením, ješto $\beta = \alpha P$. Polohy α srovnávají se s vazbami, poněvadž je jinak vůbec zvoliti nesmíme. Dle věty prvé může pak původní soustava přejíti též do poloh β, je-li $\beta = \alpha P$. Tato podmínka jest však splněna, proto může původní soustava probíhati polohy β.

Ptejme se nyní po práci, jež vznikne, přejde-li původní soustava z polohy $\bar{\alpha} = \beta_0$ přes polohy β do polohy $\bar{\beta} = \bar{\alpha} P$. Práce ta bude právě tak veliká, jako když shodná soustava tyto polohy prochází, neboť obě soustavy mají tytéž hmoty, vazby a síly. Shodná soustava poskytne ale tolik práce jako původní při přechodu z α_0 do α, proto poskytne původní soustava přecházejíc z polohy $\bar{\alpha} = \alpha_0 P$ přes polohy αP do polohy $\bar{\alpha} P = \alpha_0 P^2$ totéž množství práce, jako když přejde z polohy α_0 přes polohy α do polohy $\bar{\alpha}$.

Označíme-li práci, jež vznikne, přejde-li soustava z polohy a_0 přes polohy a do polohy $a_0 P$, zkrátka $H(a_0 \,..\, a \,..\, a_0 P)$ lze, co v předchozím odvozeno, vyjádřiti rovnicí

$$H(\alpha_0 P \,..\, \alpha P \,..\, \alpha_0 P^2) = H(\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0 P). \tag{62}$$

Obdobně lze dokázati, že práce

$$H(\alpha_0 P^2 \,..\, \alpha P^2 \,..\, \alpha_0 P^3) = H(\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0 P), \tag{63}$$

neboť soustava poloh $\alpha_0 P^2 \,..\, \alpha P^2 \,..\, \alpha_0 P^3$ souvisí s polohami $\alpha_0 P \,..\, \alpha P \,..\, \alpha_0 P^2$ tak, jako tyto polohy se soustavou $\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0 P$. Proto plyne přímo z rovnice (62) vztah

$$H(\alpha_0 P^2 \,..\, \alpha P^2 \,..\, \alpha_0 P^3) = H(\alpha_0 P \,..\, \alpha P \,..\, \alpha_0 P^2),$$

z čehož, dosadíme-li z (62), obdržíme rovnici (63). Z téhož důvodu jest obecně

$$H(\alpha_0 P^{\varkappa-1} \,..\, \alpha P^{\varkappa-1} \,..\, \alpha_0 P^{\varkappa}) = H(\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0 P), \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots$$

Z těchto rovnic obdržíme sečtením větu o práci

$$\begin{aligned} &H(\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0 P) + H(\alpha_0 P \,..\, \alpha P \,..\, \alpha_0 P^2) \\ &+ H(\alpha_0 P^2 \,..\, \alpha P^2 \,..\, \alpha_0 P^3) + \ldots + H(\alpha_0 P^{m-1} \,..\, \alpha P^{m-1} \,..\, \alpha P^m) \\ &= m\, H(\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0 P). \end{aligned} \tag{64}$$

Rovnici tu lze snadno interpretovati. Nazveme souhrn poloh $\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P$ drahou, jež vede z polohy α_0 do polohy $\alpha_0 P$, a považujme $\alpha_0 P^{\varkappa-1} \ldots \alpha P^{\varkappa-1} \ldots \alpha_0 P^{\varkappa}$ za dráhu, jež vznikla z dráhy $\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P$ transformací $P^{\varkappa-1}$. Poněvadž konečná poloha $\varkappa - 1$ dráhy jest počáteční polohou $\varkappa$-té dráhy, může soustava proběhnouti nejprvé dráhu původní $\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P$; pak dráhu, jež z této vznikne transformací P, dále dráhu, kterou z původní obdržíme transformací P^2 atd. až dráhu, jež z původní vznikne transformací P^{m-1}. Práce při proběhnutí všech drah silami zevními vykonaná jest dle hořejší rovnice m-kráte tak veliká, jako práce produkovaná při proběhnutí dráhy původní $\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P$.

Poněvadž skupina transformací P obsahuje též transformaci identickou $P = 1$, pro niž každá dráha $(\alpha_0 P^{\varkappa-1} \ldots \alpha P^{\varkappa-1} \ldots \alpha_0 P^{\varkappa})$, $\varkappa = 1, 2, \ldots$, jest identickou s původní, ježto

$$(\alpha_0 1^{\varkappa-1} \ldots \alpha 1^{\varkappa-1} \ldots \alpha_0 1^{\varkappa}) \equiv (\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 1),$$

plyne ze vzorce (64), že soustava probíhající m-kráte uzavřenou dráhu $(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0)$, produkuje m-kráte tolik práce, co vznikne jedním oběhem. Původní dráha jest uzavřenou, poněvadž počíná polohou α_0 a končí polohou $\alpha_0 1 = \alpha_0$.

§ 7. **Věta čtvrtá.** Tato věta, která praví, že soustavu nelze použiti k produkování libovolně velikého množství práce, vyslovuje princip energie. Uvedeme-li ji ve spojení s větou o práci, jež odvozena na konci minulého §, lze dokázati, že soustava úplná neposkytne žádnou práci, přejde-li z polohy α_0 přes jakékoliv polohy α do polohy $\alpha_0 P$, jež z polohy α_0 vznikne pošinutím a otočením P; jest tedy práce $H(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P) = 0$. Následující úvahy platí opět, ať užíváme Lagrangeových neb Descartesových souřadnic.

Dejme tomu, že ona práce nerovná se nulle; pak lze bez omezení obecnosti předpokládati, že jest kladnou. Poněvadž totiž síly zevní závisí dle věty druhé jen na souřadnicích, jest práce vzniklá přechodem soustavy z polohy α_0 přes polohy α do polohy $\bar{\alpha}$ rovna záporné práci, jež vznikne, přejde-li tato soustava z polohy $\bar{\alpha}$ přes tytéž polohy α do polohy α_0. Jest tedy

$$H(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \bar{\alpha}) = -H(\bar{\alpha} \ldots \alpha \ldots \alpha_0). \tag{65}$$

Že tato symbolická rovnice jest správnou, lze na př. nahlédnouti, vyjádříme-li práci H v Lagrangeových souřadnicích integrálem

$$H = \int \overset{m}{\underset{1}{\Sigma^\mu}} d\alpha_\mu A_\mu .$$

Kdyby nyní práce $H(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P)$ byla zápornou, jest dle vzorce (65) práce $H(\alpha_0 P \ldots \alpha \ldots \alpha_0)$ kladnou. Poněvadž skupina P obsahuje ke každé své transformaci inversní, souvisí i v druhém případě počáteční poloha $\alpha_0 P$ s výslednou polohou α_0 pošinutím a otočením, neboť $\alpha_0 = (\alpha_0 P)P^{-1}$. Proto lze vždy udati dráhu, která vede z původní polohy, nazveme ji α_0, do výsledné polohy, která s polohou α_0 souvisí nějakým pošinutím a otočením, označme je P, při jejímž proběhnutí vzniká určité množství kladné práce $H(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P)$.

Nechme nyní, což vždy možno, probíhati soustavu postupně dráhy $(\alpha_0 P^{\varkappa-1} \ldots \alpha P^{\varkappa-1} \ldots \alpha_0 P^\varkappa)$, $\varkappa = 1, 2, \ldots$ Práce při tom produkovaná jest dle vzorce (64)

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma^\varkappa}} H(\alpha_0 P^{\varkappa-1} \ldots \alpha P^{\varkappa-1} \ldots \alpha_0 P^\varkappa) = mH(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P).$$

Poněvadž m lze učiniti libovolně velikým a práci $H(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P)$ kladnou, bylo by možno pomocí úplné soustavy produkovati libovolně veliké množství práce. Z principu energie plyne, že to není možno; proto jest práce

$$H(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0 P) \equiv 0.$$

Nevznikne tedy žádná práce, přejde-li soustava na jakékoliv dráze z původní polohy do nové, která s původní souvisí nějakým pošinutím a otočením.

Tato věta platí pro libovolnou transformaci P. Zvolíme-li za P transformaci identickou $P = 1$, která k těmto transformacím náleží, jest dráha soustavy uzavřenou, poněvadž konečná poloha $\alpha_0 1 = \alpha_0$ splývá s polohou počáteční α_0. Ježto dle uvedené věty

$$H(\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \alpha_0) \equiv 0, \tag{66}$$

jest práce vzniklá při proběhnutí uzavřené dráhy rovna nulle.

Tuto větu lze dokázati též přímo pomocí toho, co o práci na uzavřené dráze odvozeno na konci § 6.

Z věty, jež vyslovena rovnicí (66), plyne, že práce, vykonaná přechodem soustavy z pevné polohy α_0 přes libovolné polohy α do pevné polohy β, nezávisí na povaze dráhy. Dejme tomu, že práce vzniklá na jiné dráze, jež vede z polohy α_0 přes polohy γ do polohy β,

$$H(\alpha_0 \,..\, \gamma \,..\, \beta) \neq H(\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \beta).$$

Použijeme-li toho, že dle rovnice (65) jest

$$H(\beta \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0) = -H(\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \beta),$$

plyne z předchozí rovnice, že

$$H(\alpha_0 \,..\, \gamma \,..\, \beta) + H(\beta \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0) \neq 0.$$

To však není možno, neboť dle věty, jež vyjádřená rovnicí (66), jest práce na uzavřené dráze $\alpha_0 \,..\, \gamma \,..\, \beta \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0$ rovna nulle. Proto jest

$$H(\alpha_0 \,..\, \gamma \,..\, \beta) + H(\beta \,..\, \alpha \,..\, \alpha_0) = 0,$$

z čehož dle rovnice (65)

$$H(\alpha_0 \,..\, \gamma \,..\, \beta) = H(\alpha_0 \,..\, \alpha \,..\, \beta). \tag{67}$$

Práce, jež vzniká přechodem soustavy z jedné polohy do jiné, nezávisí na povaze dráhy.

Z vět zde uvedených obdržíme snadno další vlastnosti úplných soustav.

Přejde-li soustava do polohy sousední infinitesimalním pohybem šroubovým, jenž souřadnicím x_ν, y_ν, z_ν udílí incrementa v § 2. před vzorcem (2) vypsaná, jest práce vykonaná rovna nulle, poněvadž soustava přešla z polohy původní do nové, která s touto souvisí pošinutím a otočením.

Proto jest

$$dt\,[D \sum_1^n{}^\nu X_\nu + E \sum_1^n{}^\nu Y_\nu + G \sum_1^n{}^\nu Z_\nu + A \sum_1^n (y_\nu Z_\nu - Y_\nu z_\nu)$$
$$+ B \sum_1^n{}^\nu (z_\nu X_\nu - Z_\nu x_\nu) + C \sum_1^n{}^\nu (x_\nu Y_\nu - X_\nu y_\nu)] = 0.$$

Poněvadž veličiny A, ..., G jsou na sobě nezávislé stálé, jest

$$\sum_1^n{}^{\nu} X_\nu = 0, \qquad \sum_1^n{}^{\nu} (y_\nu Z_\nu - Y_\nu z_\nu) = 0,$$
$$\sum_1^n{}^{\nu} Y_\nu = 0, \qquad \sum_1^n{}^{\nu} (z_\nu X_\nu - Z_\nu x_\nu) = 0,$$
$$\sum_1^n{}^{\nu} Z_\nu = 0, \qquad \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu Y_\nu - X_\nu y_\nu) = 0.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic, jež vyjadřují princip těžiště a ploch, který o úplných soustavách platí (viz na konci § 2), plyne, že

$$(68)\qquad \begin{aligned} &\sum_1^n{}^{\nu} m_\nu x''_\nu = 0, \qquad &&\sum_1^n{}^{\nu} m_\nu (y_\nu z''_\nu - y''_\nu z_\nu) = 0,\\ &\sum_1^n{}^{\nu} m_\nu y''_\nu = 0, \qquad &&\sum_1^n{}^{\nu} m_\nu (z_\nu x''_\nu - z''_\nu x_\nu) = 0,\\ &\sum_1^n{}^{\nu} m_\nu z''_\nu = 0, \qquad &&\sum_1^n{}^{\nu} m_\nu (x_\nu y''_\nu - x''_\nu y_\nu) = 0. \end{aligned}$$

O úplných soustavách platí princip těžiště a ploch v nejjednodušší formě.

Další věta vztahuje se na všeobecné komponenty sil v Lagrangeových souřadnicích. Veďme soustavu z pevně zvolené polohy počáteční do polohy, v níž má souřadnice α_μ, všeobecné komponenty sil A_μ, $\mu = 1, \ldots, m$. Práce, jež přechodem soustavy z polohy původní do polohy α vznikne, nezávisí dle rovnice (67) na povaze dráhy. Označme ji proto $-P(\alpha)$. Nechme nyní soustavu přejíti z původní polohy do polohy $\alpha + d\alpha$, jež jest poloze α infinitesimálně blízká. Práce při tomto přechodu vznikající jest jednak

$$-P(\alpha) + \sum_1^m{}^{\mu} A_\mu \, d\alpha_\mu ,$$

jednak

$$-P(\alpha + d\alpha) \equiv -P(\alpha) - \sum_1^m{}^{\mu} \frac{\partial P}{\partial \alpha_\mu} d\alpha_\mu .$$

Poněvadž práce nezávisí na povaze dráhy, jsou si tyto dva výrazy rovny, z čehož

$$\sum_1^m{}^{\mu} A_\mu \, d\alpha_\mu = - \sum_1^m{}^{\mu} \frac{\partial P}{\partial \alpha} d\alpha_\mu .$$

Souřadnice α jsou na sobě nezávislé, proto jest

$$A_\mu = -\frac{\partial P}{\partial \alpha_\mu}.$$

Všeobecné komponenty zevních sil lze derivovati z potencialu P, jenž závisí jen na souřadnicích.

Rovnicím Lagrangeovým lze proto dáti velmi jednoduchý tvar. Zavedeme-li funkci

$$K \equiv T - P,$$

kde P jest potencial všeobecných komponent A_μ, jenž závisí jen na souřadnicích, T jest kinetická energie, jsou rovnice Lagrangeovy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \alpha'_\mu}\right) = \frac{\partial K}{\partial \alpha_\mu}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Poněvadž funkce P jest potencialnou energií soustavy, jest funkce K t. zv. kinetický potencial. Je-li tato funkce pro jistou úplnou soustavu známa, lze udati ihned differencialní rovnice pohyb její popisující.

Povaha funkce P určuje se blíže z vět na počátku tohoto § odvozených. Poněvadž práce na uzavřené dráze rovná se nulle, jest P jednoznačnou funkcí souřadnic α. Práce $P(\alpha) - P(\beta)$, která vznikne, přejde-li soustava z polohy α do polohy β, jež z polohy α vznikne nějakým pošinutím a otáčením $\mathfrak{A}$, rovná se nulle. Proto jest

$$P(\beta) \equiv P(\alpha),$$

je-li

$$\beta = \alpha\mathfrak{A}.$$

Pak jest však funkce P invariantem skupiny $\mathfrak{A}$. Nejobecnější výraz pro P obdržíme následkem toho řešením úplného systemu differencialních rovnic

$$U_i f = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Že rovnice ty tvoří úplný system, plyne z toho, že výrazy $U_i f$ jsou symboly infinitesimálních transformací, jež vytvořují skupinu $\mathfrak{A}$.

Proměnných jest m; jsou-li všechny rovnice na sobě nezávislé, jest rovnic 6. Pak bude P libovolnou funkcí $m-6$ na sobě nezávislých funkcí, jež hoví rovnicím $U_i f = 0$.

O soustavách, jichž potencial hoví rovnicím

$$U_i f = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6,$$

platí věta třetí. Dosadíme-li do rovnic (61) v § 5.

$$A_\sigma = -\frac{\partial P}{\partial \alpha_\sigma},$$

obdržíme, změnivše znamení, že

$$U_i' \frac{\partial P}{\partial \alpha_\sigma} + \sum_1^m {}^\mu \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma} \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha_\mu} = 0, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, 6, \\ \sigma = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Poněvadž dle § 4. výraz

$$U_i' \frac{\partial P}{\partial \alpha_\sigma} = \sum_1^m {}^\mu \eta_{i\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_\sigma \partial \alpha_\mu},$$

lze rovnice transformovati na tvar

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_\sigma} \sum_1^m {}^\mu \eta_{i\mu} \frac{\partial P}{\partial \alpha_\mu} = 0,$$

z čehož, poněvadž

$$U_i f \equiv \sum_1^m {}^\mu \eta_{i\mu} \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu},$$

obdržíme podmínky

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_\sigma} U_i P = 0, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, 6, \\ \sigma = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Tyto rovnice jsou však splněny, neboť $U_i P \equiv 0$. Proto platí o všech soustavách, jichž potencial jest invariantem skupiny všech pošinutí a otočení, věta třetí.

Čtyři věty, jež vzaty za základ, mají vymeziti z rozmanitosti všech možných soustav, které obdržíme, jsou-li vazby a síly libovolnými funkcemi, tu část, která obsahuje úplné soustavy, jež lze realisovati. Předpokladem, že vazby dány soustavou rovnic, vytknut z této části jistý díl, který obsahuje velkou většinu soustav v přírodě se vyskytujících. O každé soustavě tohoto dílu platí pak následující řada vět.

Vazby těchto soustav, jež nezávisí na čase, jsou funkcí vzdáleností bodů soustavy. Soustava, jež obsahuje jediný hmotný bod, nemá vazbu žádnou, soustava, jež čítá dva body, může míti vazbu jedinou, soustava z $n \gtreqless 3$ bodů složená má nejvýše $n-6$ vazeb. Má-li soustava maximalní počet vazeb, tvoří útvar tuhý.

O vytčených soustavách platí věta o živé síle, princip těžiště a ploch. Z rovnic těchto dvou principů plyne, že těžiště takové soustavy pohybuje se rovnoměrnou rychlostí na přímce a průmět plošných rychlostí na libovolnou rovinu jest stálý.

Ať užíváme Lagrangeových neb Descartesových souřadnic, differencialní rovnice soustavy definují jednočlennou skupinu transformací; proměnný parametr této skupiny jest čas.

Výraz pro práci, jež vznikne při virtualném pošinutí, jest v Lagrangeových souřadnicích úplnou variací jisté funkce souřadnic. Tato funkce, potencialní energie, jest invariantem šestičlenné skupiny všech pošinutí a otočení v Lagrangeových souřadnicích.

Vlastnosti zde uvedené má každá úplná soustava, jejíž pohyb jest zjevem ryze mechanickým, jsou-li vazby její dány soustavou funkcí. Proto lze na takových soustavách zkoumati správnost předpokladů, jež obsaženy ve čtyřech větách základních. Pokud každá soustava vlastnosti uvedené má, lze ony čtyři věty považovati za správné. Kdyby se však vyskytla jediná soustava, jež mezi vytčené náleží, která by jedinou z odvozených vlastností neměla, jsou předpoklady učiněné nepřípustny.