Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 5, 459--484

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122172

když užíváme obyčejného kružítka, nejistými, je-li rozevření kružítka větší než rameno jeho.

Na základě těchto vět řeší pak Wiener zvl. tyto úlohy:

a) K dané přímce P v daném jejím bodě M vztyčiti kolmici co nejpřesněji.

Nanesme na P délky $MA = MB =$ asi $\frac{l}{2}$ [$l =$ délka ramene kružítka]. Opišme z A i B oblouky kruhové s poloměry stejnými $=$ asi l, jež se protnou v C; MC je žádaná kolmice. (K vůli 3. větě musili bychom učiniti $AC = BC = \sqrt{0 \cdot 5}\, l = 0 \cdot 7\, l$, v kterémž případě by se oblouky kruhové protínaly v pravém úhlu, k vůli 1. činíme však AC větší, asi $= l$.)

b) Z daného bodu M spustiti kolmici na danou přímku P.

Opišme z M otvorem kružítka rovným l, který však musí býti větší než asi $1 \cdot 4$ vzdálenosti M od P (není-li to možno, je kružítko příliš malé), kružnici, jež protne P v bodech A a B; opišme z A i B stejným poloměrem, jehož velikost hned ustanovíme, kružnice, které se protnou na druhé straně (vůči M) přímky P v bodě C; MC je hledaná kolmice. Podle toho, jedná-li se o celou přímku kolmou nebo jen o patu její, učiníme $AC = BC$ ne větší, než jest menší z délek $\overline{AB}$ a l nebo jen málo větší než $\frac{1}{2}\overline{AB}$.

V Praze v lednu r. 1900.

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 21.

Do rovnostranného trojúhelníka o straně s vepsány kruhy stejné tak, že se navzájem i stran trojúhelníka dotýkají. Je-li jich při každé straně trojúhelníka n, který jest poloměr kruhů těch a kterou část plochy trojúhelníkové zaujímají? Která jest tato část při lim n $= \infty$?

Stud. fil. *Jiří Nerad.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Schönbaum,* stud. VIII. tř. g. v Benešově.)

Nechať jest r poloměr jednoho kruhu; potom jest patrně

$$s = (n-1)\,2r + 2r\sqrt{3}\,,$$

tudíž
$$r = \frac{s}{2(n-1+\sqrt{3})}\,.$$

Je-li při straně kruhů n, jest jich v sousední řadě $n-1$, dále $n-2$ atd.; tudíž jest jich počet

$$p = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$$

čili
$$p = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Součet obsahů všech těchto kruhů jest

$$K = p\,.\,\pi r^2 = \frac{n(n+1)\pi s^2}{8(n-1+\sqrt{3})^2}\,,$$

tudíž k obsahu trojúhelníka

$$T = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$$

jest v poměru
$$\frac{K}{T} = \frac{n(n+1)\pi\sqrt{3}}{6(n-1+\sqrt{3})^2}\,.$$

Při $\lim n = \infty$ jest

$$\lim K = \frac{(1+\frac{1}{n})\,\pi s^2}{8(1-\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{3}}{n})^2} = \frac{\pi s^2}{8}\,,$$

$$\lim \frac{K}{T} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0{\cdot}9069\ldots$$

Úloha 22.

V kruhu o poloměru r vedena tětiva ve vzdálenosti v od středu. Do obou tak vzniklých úsečí vepsány čtverce. Jest dokázati, že rozdíl stran těchto čtverců jest nezávislým na velikosti poloměru.

Učitel *Fr. Jiršák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *F. Kneidl,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)
Je-li x strana čtverce do úseče kruhové vepsaného, jest

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x \pm v)^2 = r^2$$

čili $$5x^2 \pm 8vx - 4(r^2 - v^2) = 0.$$

Kladné kořeny těchto dvou rovnic jsou

$$x_{1,2} = \frac{2}{5}(\sqrt{5r^2 - v^2} \pm 2v).$$

Jest tedy $$x_1 - x_2 = \frac{8}{5}v,$$

čímž tvrzení dokázáno.

Úloha 23.

Dány jsou dvě mimoběžné přímky P a Q v prostoru. Na přímce P zvoleny body a_1, a_2, na přímce Q body b_1, b_2 co vrcholy čtyrstěnu $a_1a_2b_1b_2$. Jest dokázati, že krychlový obsah tohoto čtyrstěnu se nezmění, pošinou-li se vrcholy, zůstávajíce na přímkách P a Q při podmínce, že délky $\overline{a_1a_2} = a$, $\overline{b_1b_2} = b$ zůstanou nezměněny.

Posl. fil. *Karel Nečas.*

Řešení. (Zaslal p. *František Kálal*, stud. VII. tř. real. v Písku.)

Dejme tomu, že body b_1 a b_2 přijdou na přímce Q do poloh b'_1, b'_2, při čemž však $\overline{b'_1b'_2} = \overline{b_1b_2} = b$. Veďme bodem a_1 a přímkou Q rovinu a rovněž bodem a_2 a přímkou Q rovinu. Ježto rovina $(b_1b_2a_2) \equiv$ rovině $(b'_1b'_2a_2)$ a rovina $(b_1a_1b_2) \equiv (b'_1a_1b'_2)$, bude při podmínce $\overline{b'_1b'_2} = b$ obsah čtyrstěnu $(a_1a_2b_1b_2)$ roven obsahu čtyrstěnu $a_1a_2b'_1b'_2$. Zcela analogicky platí, pošinou-li se na to body a_1 a a_2 na P do poloh a'_1 a a'_2 za podmínky $\overline{a'_1a'_2} = a = \overline{a_1a_2}$, že je obsah čtyrstěnu $a_1a_2b'_1b'_2$ roven obsahu čtyrstěnu $a'_1a'_2b'_1b'_2$, t. j. že za daných podmínek se obsah pošinutím nezměnil.

Poznámka redakční. Výsledek tento obsažen jest ve známém vzorci pro obsah čtyrstěnu

$$T = \frac{1}{6}abu \sin \omega,$$

kdež a, b značí délky dvou protějších hran, u jich nejkratší vzdálenost, ω vzájemnou odchylku těchto hran. (Viz článek prof. Dra. G. Blažka: „Dva vzorce pro krychlový obsah čtyrstěnu“ ve III. ročníku tohoto časopisu, str. 272—274.).

Úloha 24.

Kolmý trojboký jehlan s pravidelnou základnou rozpůlen jest řezem jdoucím hranou základny. V kterém poměru jsou povrchy obou částí jehlanu, je-li výška jeho rovna dvojnásobné hraně základny?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Leopold Šrámek*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Budiž abc základna, d témě jehlanu; řez jehlan půlící nechť jest abf, při čemž f půlí hranu cd. Užijme označení

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{dg} = v \text{ (výška jehlanu)},$$

$$\triangle\, abc = Z_1, \quad \triangle\, abf = Z_2, \quad \triangle\, abd = \varDelta \text{ (pobočná stěna).}$$

Povrchy částí obou, z nichž jehlan se skládá, jsou

$$P_1 = Z_1 + Z_2 + \varDelta, \quad P_2 = Z_1 + 2\varDelta.$$

Jest pak

$$Z_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3},$$

$$Z_2 = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{3v^2 + 4a^2}{3}},$$

$$\varDelta = \frac{a}{2}\sqrt{v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{12v^2 + a^2}{3}}.$$

Je-li $v = 2a$, jest

$$Z_2 = \frac{a^2}{3}\sqrt{3}, \qquad \varDelta = \frac{7a^2}{12}\sqrt{3};$$

tudíž jest v tomto případě

$$P_1 = \frac{7a^2}{6}\sqrt{3}, \quad P_2 = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3};$$

pročež

$$P_1 : P_2 = 7 : 9.$$

Úloha 25.

V komolém kuželi, jehož povrchové přímky svírají s větší základnou úhel α, rovná se součet obou základen n-násobnému plášti. Při kterých hodnotách n má úloha realné řešení?

Ing. C. *Vladimír Ibl.*

Řešení. (Zaslal p. *Alois Bezloja,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Strana kužele budiž s, poloměry základen $r > r_1$. Dle podmínek úlohy jest

$$\pi (r^2 + r_1{}^2) = n \,.\, \pi (r + r_1)\, s\,, \qquad r - r_1 = s \cos\alpha\,.$$

Dosadíme-li r_1 do rovnice první, obdržíme po snadné úpravě

$$2r^2 - 2s\,(n + \cos\alpha)\, r + s^2 \cos\alpha\,(n + \cos\alpha) = 0\,.$$

Řešíme-li rovnici dle r, jest

$$r = \frac{s}{2}(n + \cos\alpha \pm \sqrt{n^2 - \cos^2\alpha}).$$

Jelikož dle smyslu úlohy n jest kladné, jest podmínka realnosti

$$n \geqq \cos\alpha.$$

Je-li $n = \cos\alpha$, jest

$$r = s\cos\alpha, \quad r_1 = 0,$$

tudíž kužel úplný, nikoliv komolý.

Úloha 26.

Ustanoviti jest geometrické místo středů kružnic, které procházejí bodem a a utínají na dané přímce P tětivu stálé délky 2b.

Ing. C. *Vladimír Ibl.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Navrátil,* stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě.)

Zvolme osou úseček přímku jdoucí daným bodem a kolmo ku přímce P, která budiž osou souřadnic. Znamenejme $\overline{oa} = a$, střed kružnice s, poloměr r; souřadnice středu s jsou x, y. Potom jest $\quad (x - a)^2 + y^2 = r^2, \quad x^2 + b^2 = r^2.$

Vyloučíme-li proměnné r z obou těchto rovnic, nabudeme rovnice hledaného místa geometrického; obdržíme tak rovnici

$$y^2 = 2ax - a^2 + b^2,$$

z níž zřejmo, že geom. místem středu s jest *parabola* mající parametr a.

Vrchol, ohnisko i řídicí přímku této paraboly snadno lze sestrojiti.

Přenesme na osu Y délku $\overline{ob} = b$ a sestrojme v ose X bod c tak, že $\overline{bc} \perp \overline{ab}$; kružnice trojúhelníku abc opsaná jest jednou z kružnic úlohy a střed její, půlící průměr ac, jest vrcholem v paraboly. Přeneseme-li směrem va délku $\overline{vf} = \frac{a}{2}$, jest bod f ohniskem paraboly; učiníme-li směrem protivným $\overline{vg} = \frac{a}{2}$, prochází bodem g přímka řídicí.

Úloha 27.

V pravoúhlé soustavě dán jest vrchol c rovnostranného trojúhelníka abc souřadnicemi (m, n), vrchol a leží v ose X, b v ose Y.

a) Jest vypočítati stranu tohoto trojúhelníka.

b) Kterak lze trojúhelník takový sestrojiti?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ladislav Strumhaus*, stud. VII. tř. g. v Místku.)

a) Promítneme-li daný vrchol c do os souřadných a jsou-li průměty jeho c_1, c_2, jest obecně

$$\overline{oa} = \overline{oc_1} - \overline{ac_1}, \qquad \overline{ob} = \overline{oc_2} - \overline{bc_2}$$

čili, označíme-li délku strany písmenem s,

$$\overline{oa} = m - \sqrt{s^2 - n^2}, \qquad \overline{ob} = n - \sqrt{s^2 - m^2}.$$

K určení strany s máme tudíž rovnici

$$(m - \sqrt{s^2 - n^2})^2 + (n - \sqrt{s^2 - m^2})^2 = s^2.$$

Vykonavše naznačené zdvojmocnění, přijdeme k rovnici jednodušší

$$2m\sqrt{s^2 - n^2} + 2n\sqrt{s^2 - m^2} = s^2,$$

která dalším zdvojmocněním nabude tvaru

$$s^4 - 4s^2(m^2 + n^2) + 8m^2n^2 = 8mn\sqrt{(s^2 - m^2)(s^2 - n^2)};$$

pokračujíce v úpravě, nabudeme posléze rovnice racionálné

$$s^4 - 8s^2(m^2 + n^2) + 16(m^4 - m^2n^2 + n^4) = 0.$$

Z této vypočítáme délku strany

$$s = 2\sqrt{m^2 \pm mn\sqrt{3} + n^2};$$

má tudíž úloha dvoje řešení.

b) Budiž c' bod souměrný s c dle osy Y, c'' souměrný s c dle osy X. Lze dokázati, že

$$\sphericalangle\, oac' = \sphericalangle\, obc'' = 30^0,$$

z čehož sestrojení úlohy již vysvítá.

Označme $\sphericalangle oac' = \varphi, \quad \sphericalangle c_1 ac = \alpha;$

potom jest $$s = \frac{n}{\sin\alpha} = \frac{m - n \operatorname{cotg}\alpha}{\cos(120^0 - \alpha)},$$

z čehož ustanovíme $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{2m - n\sqrt{3}}.$$

Již tento výraz vedl by nás ku sestrojení vrcholu a, tudíž i trojúhelníka žádaného. Uvážíme-li však, že jest

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n}{2m - n \operatorname{cotg}\alpha}, \quad n \operatorname{cotg}\alpha = 2m - n\sqrt{3},$$

obdržíme $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

tudíž $\varphi = 30^0$. Jelikož úhel φ buď s kladným neb se záporným směrem osy sevřen býti může, nabudeme dvou trojúhelníků úloze vyhovujících.

Úloha 28.

a) Ustanovte souřadnice vrcholů čtverce, jehož střed jest $s(1, 2)$ a jehož dva vrcholy jsou na přímce

$$M \equiv x - 3y + 10 = 0.$$

b) Která jest rovnice kruhu tomuto čtverci opsaného?

c) Které souřadnice mají vrcholy čtverce, jehož strany dotýkají se této kružnice ve vrcholech čtverce prvého?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Julius Špíšek*, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě.)

a) Poněvadž bod s na přímce M neleží, budou v přímce M obsaženy dva sousední vrcholy čtverce Obdržíme je jakožto průsečíky přímky M s úhlopříčkami

$$y - 2 = A(x - 1)$$

jdoucími bodem s a svírajícími s M úhly 45^0. Směrnice těchto úhlopříček vypočítáme dle vzorce

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2}$$

z rovnice $$\pm 1 = \frac{A - \frac{1}{3}}{1 + \frac{A}{3}};$$

obdržíme hodnoty

$$A = 2 \quad \text{aneb} \quad -\frac{1}{2}.$$

První úhlopříčka má rovnici $y = 2x$ a stanoví v přímce M vrchol

$$a\,(x_1 = 2,\ y_1 = 4);$$

druhá má rovnici $x + 2y - 5 = 0$ a určuje vrchol

$$b\,(x_2 = -1,\ y_2 = 3).$$

Ostatní dva vrcholy $c\,(x_3, y_3)$ a $d\,(x_4, y_4)$ ustanovíme dle vlastnosti, že střed s půlí délky $\overline{ac}$, $\overline{bd}$.

Přijdeme tak k rovnicím

$$\frac{2 + x_3}{2} = 1, \qquad \frac{4 + y_3}{2} = 2,$$

z nichž vypočítáme $c\,(x_3 = 0,\ y_3 = 0)$;

podobně jest $\dfrac{-1 + x_4}{2} = 1, \quad \dfrac{3 + y_4}{2} = 2,$

tudíž $d\,(x_4 = 3,\ y_4 = 1).$

b) Kružnice čtverci *abcd* opsaná má střed $s\,(1, 2)$ a poloměr $r = \overline{sc}$,

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5};$$

jest tedy rovnice její

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

čili

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

c) Rovnice tečen v bodech a, b, c, d jsou

$$x + 2y - 10 = 0, \qquad 2x - y + 5 = 0,$$
$$x + 2y = 0, \qquad 2y - y - 5 = 0;$$

z těch ustanovíme souřadnice vrcholů čtverce opsaného

$$a'\,(x'_1 = 0,\ y'_1 = 5), \qquad b'\,(x'_2 = -2,\ y'_2 = 1),$$
$$c'\,(x'_3 = 2,\ y'_3 = -1), \qquad d'\,(x'_4 = 3,\ y'_4 = 1).$$

Úloha 29.

Do ellipsy

$$3x^2 + 4y^2 = 3a^2$$

vepsati jest rovnostranný šestiúhelník, jehož dva protější vrcholy isou a) na hlavní, b) na vedlejší ose ellipsy. V kterém poměru isou obvody obou šestiúhelníků?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Šantroch*, právník v Turnově.)

a) Žádaný šestiúhelník bude mimo vrcholy na ose X míti ještě v každém kvadrantu ellipsy po jednom vrcholu. Hledejme vrchol ve kvadrantu prvním. Souřadnice jeho vyhovují podmínce

$$(a - x)^2 + y^2 = 4x^2,$$

která v souvislosti s rovnicí ellipsy po vyloučení y vede k rovnici

$$15x^2 + 8ax - 7a^2.$$

Kladný kořen této rovnice jest úsečkou hledaného vrcholu;

$$x_1 = \frac{7}{15} a, \qquad y_1 = \frac{2}{15} a \sqrt{33}.$$

b) Šestiúhelník druhý činí zadost podmínce

$$x^2 + (b - y)^2 = 4y^2,$$

kdež poloosa $$b = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

Vyloučíce z rovnice poslední a z rovnice ellipsy veličinu x, obdržíme

$$13y^2 + 6by - 7b^2 = 0$$

a ustanovíme souřadnice vrcholu v prvním kvadrantu ležícího

$$y_2 = \frac{7}{13} b, \qquad x_2 = \frac{2}{13} b \sqrt{10}.$$

Strany šestiúhelníků jsou

$$s_1 = 2x_1 = \frac{14}{15} a, \qquad s_2 = 2y_2 = \frac{14}{13} b,$$

tudíž poměr obvodů

$$s_1 : s_2 = 13a : 15b = 26 : 15 \sqrt{3}.$$

Úloha 30.

Která jest číselná výstřednost ellipsy, jejíž parametr jeví se ze středu v úhlu 2α?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Čupr*, stud. VI. tř. gym. ve Vys. Mýtě.)

Dle obvyklého označení jest

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2}{ae} \qquad \text{čili} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2 - e^2}{ae};$$

jelikož číselná výstřednost $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$, máme rovnici

$$\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon = \operatorname{tg} \alpha,$$

kteráž spořádána na tvar

$$\varepsilon^2 + \varepsilon \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0$$

poskytuje řešení

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [- \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}].$$

Poznámka: Je-li $\alpha = 45^0$, jest

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

t. j., jeví-li se parametr ze středu ellipsy v úhlu pravém, dělí ohnisko hlavní poloosu dle zlatého řezu.

Úloha 31.

Usměrniti jest jmenovatele zlomku

$$\frac{13 \sqrt[3]{6} - 6 (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4})}{3 \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} - 2 \sqrt[3]{9}}.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Grössl*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Položíme-li $\sqrt[3]{3} = x, \quad \sqrt[3]{2} = y$
nabude zlomek daný tvaru

$$z = \frac{6x^2 - 13xy + 6y^2}{2x^2 - xy + 3y^2}.$$

čili, po rozkladu v činitele linearné,

$$z = \frac{(3x - 2y)(2x - 3y)}{(x + y)(2x - 3y)};$$

jest tedy
$$z = \frac{3x - 2y}{x + y} = \frac{3 \sqrt[3]{3} - 2 \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}.$$

Znásobíme-li čítatele i jmenovatele tohoto zlomku trojčlenem $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$, obdržíme

$$z = 1 + \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18}.$$

Úloha 32.

Rozložiti jest v činitele linearné magický determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \end{vmatrix}.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Rychlík,* stud. VI. tř. akad. g. v Praze.)

Rozložme daný determinant dle prvků prvního řádku; est pak

$$\Delta = a \begin{vmatrix} d & a & b \\ c & b & a \\ a & d & c \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & d \\ d & c & b \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} b & c & d \\ a & d & c \\ c & b & a \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} c & d & a \\ d & c & b \\ b & a & d \end{vmatrix}.$$

Vyčíslíme-li tyto determinanty, shledáme, že

$$\Delta = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2$$
$$- 2b^2d^2 - 2c^2d^2 + 8abcd$$
$$= (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 - (a+b)^2 (c-d)^2 - (a-b)^2 (c+d)^2$$
$$= [(a+b)^2 - (c+d)^2] [(a-b)^2 - (c-d)^2],$$

z čehož konečně

$$\Delta = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

Poznámka. Magickým čtvercem slove soustava n^2 čísel rozložených do n řádek a n sloupců tak, že součet čísel v každé řádce, v každém sloupci i v každé úhlopříčce jest tentýž. Na př.

1	13	8	12
16	4	9	5
10	6	15	3
7	11	2	14.

Úloha 33.

Vyjádřiti tvarem co nejjednodušším hodnotu determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & a_9 & a_4 \\ a_7 & a_5 & a_3 \\ a_6 & a_1 & a_8 \end{vmatrix},$$

jehož prvky jsou členy arithmetické řady prvého stupně.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Pleva,* stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

Daný determinant, ve kterém ukazatelé členů tvoří magický čtverec, lze vypsati takto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-3d & a+4d & a-d \\ a+2d & a & a-2d \\ a+d & a-4d & a+3d \end{vmatrix},$$

označíme-li prostřední člen řady písmenem a a rozdíl její d; řada jest pak:

$$a-4d,\ a-3d,\ a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d.$$

Vyčíslivše determinant, obdržíme

$$\begin{aligned}\Delta = a(a^2-9d^2) &+ (a-d)(a+2d)(a-4d) \\ &+ (a+d)(a-2d)(a+4d) - a(a^2-d^2) \\ &- (a+2d)(a+3d)(a+4d) \\ &- (a-2d)(a-3d)(a-4d),\end{aligned}$$

z čehož

$$\Delta = -72ad^2.$$

Úloha 34.

Řešiti jest rovnici

$$x^3 - 11\,x - 2\,\sqrt{3} = 0,$$

ve které součet čtverců dvou kořenů jest 10.

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Alois Habrich*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.)

Jsou-li x_1, x_2, x_3 kořeny dané rovnice, jest

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -11,$$
$$x_1x_2x_3 = +2\sqrt{3}.$$

Jestliže od zdvojmocněné relace 1. odečteme dvojnásobnou relaci 2., nabudeme rovnice

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 22.$$

Poněvadž však dle podmínky jest

$$x_1^2 + x_2^2 = 10,$$

bude

$$x_3^2 = 12.$$

Snadno se přesvědčíme, že rovnici vyhovuje pouze kladný kořen

$$x_3 = 2\sqrt{3}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnic hořejších, dospějeme k rovnicím

$$x_1 + x_2 = -2\sqrt{3}, \qquad x_1 x_2 = 1,$$

z kterých vypočítáme

$$x_1 = -\sqrt{3} + \sqrt{2}, \qquad x_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Úloha 35.

Je-li n sudé číslo, jest výraz

$$n^2(n^2 - 4)(n^2 - 16)$$

dělitelný číslem 11520. Podejte důkaz.

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Baumann*, stud. VI. tř. r. v Hodoníně.)

Poněvadž n jest sudé, položme $n = 2k$; daný výraz dostane pak tvar

$$V = 64k^2(k^2 - 1)(k^2 - 4)$$

čili

$$V = 64k^2(k - 1)(k - 2)(k + 1)(k + 2).$$

Součin pěti po sobě následujících čísel celých

$$(k - 2)(k - 1)k(k + 1)(k + 2)$$

jest dělitelen 3mi, 4mi i 5ti, pročež výraz V vždy jest dělitelen číslem $64 \times 3 \times 4 \times 5 = 3840$. Nad to však ještě obsahuje V činitele 3. Je-li totiž k dělitelno 3mi, jest V dělitelno 9ti, obsahujíc činitele k^2; není-li k dělitelno 3mi, jest současně buď $k - 1$ a $k + 2$ aneb $k - 2$ a $k + 1$ 3mi dělitelno, tudíž činitel 3 dvakráte obsažen.

Proto jest V násobkem čísla $3840 \times 3 = 11520$.

Úloha 36.

Poloměrem AB opsány jsou z bodů A, B kruhové oblouky protínající se v bodě C. Ustanoviti jest v oblouku AC bod M a v oblouku BC bod N tak, aby MN bylo rovnoběžno k AB, a úhel MAN aby rovnal se danému ostrému úhlu.

Prof. Dr. *Jos. R. Vaňaus.*

Řešení. (Zaslal p. *Bohuslav Hostinský*, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze.)

Označme daný úhel $\sphericalangle MAN = \alpha$, odchylku $\sphericalangle BAN = x$. Úhly v trojúhelníku ABM jsou pak:

$$\sphericalangle A = \alpha + x, \quad \sphericalangle B = x, \quad \sphericalangle M = \alpha + x.$$

Proto jest $\qquad 2\alpha + 3x = 2R,$

z čehož $\qquad x = \frac{2}{3}(R - \alpha) = 60^0 - \frac{2}{3}\alpha.$

Jelikož $\qquad \text{arc } BC = 60^0,$

stačí přenésti $\qquad \text{arc } CN = \frac{2}{3}\alpha$

a vésti MN || AB, aby úloha byla řešena.

Druhé řešení. (Zaslal p. *Bohuslav Závada*, stud. VII. tř. r. v Lipníku.)

Prodlužme AM až protne prodloužený oblouk BC v bodě D. Jelikož jest

$$\sphericalangle BAD = \alpha + x, \quad \sphericalangle BAC = 60^0,$$

jest $\qquad \sphericalangle CAD = \alpha + x - 60^0 = \alpha - \frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{3}\alpha.$

Týž výsledek vysvítá z této úvahy:

Úhel MAC jest obvodovým úhlem nad obloukem MC, tudíž roven polovici středového úhlu nad týmž obloukem a též roven polovici středového úhlu nad shodným obloukem NC.

Jest tedy $\qquad \sphericalangle MAC = \frac{1}{2}\sphericalangle CAN = \frac{1}{3}\alpha.$

Třetí řešení. (Zaslal p. *Karel Rychlík*, stud. VI. tř. akad. gymn. v Praze.)

Označme $\qquad \sphericalangle BAM = \sphericalangle ABN = \beta;$

potom jest $\qquad \sphericalangle BAN + \sphericalangle NAM = \sphericalangle BAM$

čili $\qquad 2R - 2\beta + \alpha = \beta,$

z toho $\qquad \beta = 60^0 + \frac{\alpha}{3}.$

Jelikož úloha vede ku trisekci úhlu, hleďme cestou analytickou najíti řešení, které by vyžadovalo pouze sestrojení kuželoseček.

Učiňme $\sphericalangle BAP = \alpha$ a zvolivše A za počátek, AB za osu X soustavy pravoúhlé, položme souřadnice bodu P (m, n); protíná-li prodloužená tětiva AM prodloužený oblouk BC v bodě D, mějme ustanoviti souřadnice x, y tohoto bodu.

Je-li AB $= r$, jest

(1) $$x^2 + y^2 = r^2;$$

jelikož $$x = r\cos\beta,\quad y = r\sin\beta,$$

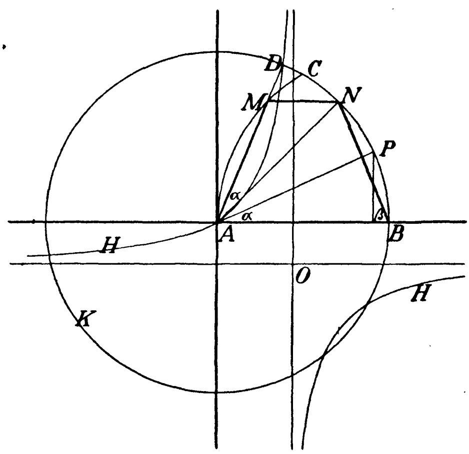
jest $$2xy = r^2\sin 2\beta = r^2\sin(2\mathrm{R} + \alpha - \beta)$$

čili $$2xy = r^2(-\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).$$

Rozložme a upravme dále takto:

$$2xy = -r\sin\alpha \,.\, r\cos\beta + r\cos\alpha \,.\, r\sin\beta,$$

z čehož (2) $$2xy = my - nx.$$



Hledejme střed kuželosečky vyjádřené touto rovnicí. Položíme-li

$$x = x' + a,\quad y = y' + b,$$

nabude rovnice tvaru

$$2x'y' + x'(2b + n) + y'(2a - m) + 2ab + na - mb = 0$$

a stává se rovnicí středovou, je-li

$$b = -\frac{n}{2},\quad a = \frac{m}{2};$$

jest pak $$x'y' = -\frac{mn}{4}.$$

Z toho poznáváme, že jest bod D průsečíkem kružnice (1) s hyperbolou (2); hyperbola ta má střed $\left(\frac{m}{2},\ -\frac{n}{2}\right)$, asymptoty rovnoběžné s osami X, Y a prochází bodem A.

Vyloučíme-li z rovnic (1), (2) pořadnici y, nabudeme rovnice

$$4x^4 - 4mx^3 - 3r^2x^2 + 4r^2mx - m^2r^2 = 0,$$

jejíž jeden kořen jest patrně

$$x_1 = m.$$

Odstraníme-li kořenového činitele $x-m$, dostaneme rovnici

$$4x^3 - 3r^2x + mr^2 = 0.$$

Avšak
$$4\cos^3\frac{\alpha}{3} + 3\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\alpha = 0,$$

z čehož poznáváme druhý kořen

$$x_2 = -r\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Po odstranění činitele $x + r\cos\frac{\alpha}{3}$ zbývá rovnice

$$4x^2 - 4rx\cos\frac{\alpha}{3} + 4r^2\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3r^2 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$x = \frac{r}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{3} \pm \sqrt{3}\,.\sin\frac{\alpha}{3}\right)$$

čili
$$x_3 = r\cos\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$x_4 = r\cos\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right).$$

K těmto hodnotám x přísluší pořadnice

$$y_1 = -n, \qquad y_2 = -r\sin\frac{\alpha}{3},$$

$$y_3 = r\sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right), \qquad y_4 = -r\sin\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Úloze vyhovuje ten průsečík kružnice a hyperboly, který jest v první čtvrti; souřadnice jeho jsou x_3, y_3.

P o z n á m k a. Úloha jest stupně třetího; rozdělení úhlu na 3 stejné díly nelze — jak známo — vykonati přesnou geometrickou konstrukcí užívající pouze přímek a kružnic. K účelu tomu vymyšleny byly též rozmanité křivky vyšších stupňů; o jedné z nich pojednává prof. Dr. Josef Vaňaus v článku Trisektorie (tohoto Časopisu ročník X. str. 153). Viz též Lošťák, Příspěvek ku trisekci úhlu (Časopis, ročník XIV., str. 38.).

Úloha 37.

Sestrojiti jest rovnoramenný trojúhelník, je-li součet všech jeho výšek roven polovině jeho obvodu.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Mikulášek*, stud. VI. tř. r. v Hodoníně.)

Budiž v trojúhelníku rovnoramenném ABC půdice $AB = a$, ramena $AC = BC = b$, výšky $CD = v$, $AE = BF = v_1$.

Dle podmínky má býti

$$v + 2v_1 = \frac{a + 2b}{2}.$$

Jest však $$v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad v_1 = \frac{av}{b},$$

pročež daná podmínka přechází v tuto:

$$(1 + \frac{2a}{b}) \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a + 2b}{2}.$$

Z rovnice této lze ustanoviti poměr

$$x = \frac{b}{a}.$$

Upravme rovnici nejprve na tvar

$$(2a + b)\sqrt{(2b + a)(2b - a)} = b\,(a + 2b),$$

zkraťme na $$(2a + b)\sqrt{2b - a} = b\sqrt{a + 2b},$$

a zdvojmocnivše upravme na rovnici

$$3b^2 + 2ab - 2a^2 = 0$$

čili $$3x^2 + 2x - 2 = 0$$

Jest tedy

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 1).$$

K sestrojení nejlépe se hodí užiti úhlu ramen

$$\alpha = \sphericalangle ACB.$$

Jestiť $$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{4}(\sqrt{7} + 1),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{7} - 1),$$

pročež

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}.$$

Úloha 38.

Každý vrchol obdélníka spojen jest se středem protější strany. Tyto spojnice omezují souměrný osmiúhelník. Jsou-li m, n rozměry obdélníka, jest vypočítati:

a) obsah osmiúhelníka

b) osy ellipsy jemu vepsané.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Bedřich Rychlík*, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě.)

a) Budiž v obdélníku $abcd$ střed o; strana ad půlena buď bodem e, strana cd bodem h; mimo to označme průsečíky $g = (ah, oe)$, $f = (ce, oh)$. Jsou-li rozměry obdélníka

$$\overline{ab} = m, \quad \overline{bc} = n,$$

úhlopříčka jeho $\overline{ac} = \overline{bd} = u,$

můžeme obsah osmiúhelníka takto vyjádřiti: Je-li k průsečíkem spojnic $\overline{ef}$, $\overline{gh}$, jest čtyrúhelník $ofkg$ čtvrtinou osmiúhelníka, o který se jedná. Jest pak

$$\overline{ok} = \frac{1}{3}\overline{od} = \frac{1}{6}u;$$

$$\triangle ofk : \triangle odh = \overline{of}\,.\,\overline{ok} : \overline{oh}\,.\,\overline{od}$$

čili $\triangle ofk : \frac{1}{8}mn = \frac{n}{4}\cdot\frac{u}{6} : \frac{n}{2}\cdot\frac{u}{2}$

$$\triangle ofk = \frac{mn}{48};$$

podobně jest $\triangle ogk = \frac{mn}{48}.$

Hledaný obsah osmiúhelníka

$$O = 4\,.\,(\triangle ofk + \triangle ogk) = \frac{mn}{6}.$$

b) Zvolme $\overline{oc}$ a $\overline{oh}$ osami souřadnými X, Y; a, b nechť jsou poloosy ellipsy vepsané v souměrný osmiúhelník, o němž uvažujeme. Tečna ec dotýká se ellipsy v bodě (x_1, y_1), tečna ah v bodě (x_2, y_2). Z toho plynou rovnice:

$$\frac{m}{2}=\frac{a^2}{x_1}, \quad \frac{n}{4}=\frac{b^2}{y_1},$$
$$\frac{m}{4}=\frac{a^2}{x_2}, \quad \frac{n}{2}=\frac{b^2}{y_2}.$$

Jelikož souřadnice bodů dotyčných vyhovují rovnici ellipsy

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

přijdeme dosazením k rovnicím

$$4a^2n^2+16b^2m^2=m^2n^2$$
$$16a^2n^2+4b^2m^2=m^2n^2;$$

odtud vypočítáme poloosy

$$a=\frac{m}{10}\sqrt{5}, \quad b=\frac{n}{10}\sqrt{5}.$$

Úloha 39.

Základnou jehlanu jest čtyrúhelník ABCD pravoúhlý při A; strany jsou

$$AB=24, \; BC=28, \; CD=30, \; DA=10.$$

Hrany AE, BE, CE jsou stejně veliké 38·8 cm. Vypočítejte hranu DE a obsah jehlanu.

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Spurný*, stud. VII. tř. gymn. v Místku.)

Jelikož *abd* jest pravoúhlý trojúhelník, jest

$$BD=\sqrt{10^2+24^2}=26;$$

protože AE = BE = CE, jest patou výšky EF jehlanu střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Je-li

$$\sphericalangle ABD=\beta_1, \quad \sphericalangle CBD=\beta_2,$$

jest

$$\sin\beta_1=\frac{5}{13},$$

$$\cos\beta_2=\frac{26^2+28^2-30^2}{2\,.\,26\,.\,28}=\frac{5}{13},$$

pročež

$$\beta_1+\beta_2=90^0$$

a tedy trojúhelník *abc* jest pravoúhlý při *b*. Základna ABCD jest lichoběžník se dvěma pravými úhly. Střed F kružnice opsané o trojúhelník ABC půlí přeponu

$$2r=AC=\sqrt{24^2+28^2}=4\sqrt{85}.$$

Výška jehlanu jest pak

$$v = \mathrm{EF} = \sqrt{38{\cdot}8^2 - 340} = \sqrt{1165{\cdot}44} = 34{\cdot}14\ldots,$$

délka čtvrté hrany

$$\mathrm{DE} = \sqrt{12^2 + 4^2 + v^2} = \sqrt{1325{\cdot}44} = 36{\cdot}41\ldots$$

Obsah jehlanu jest

$$\mathrm{J} = \frac{1}{3} Zv = \frac{1}{3} \,.\, 19 \,.\, 24 \,.\, 34{\cdot}14 = 5189{\cdot}28\ldots$$

Úloha 40.

Vyšetřiti jest vztah křivek daných rovnicemi

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{a}\right) = \frac{ab}{xy} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

$$\frac{1}{ab}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 2\left(\frac{1}{xy} \mp \frac{1}{ab}\right).$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Pleva,* stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

Zbavíme-li rovnici prvou zlomků, nabude tvaru

$$(ay + bx)(ax + by) = a^2b^2 + (a^2 + b^2)\,xy$$

čili po vynechání společných členů obou stran a po zkrácení součinem ab

$$x^2 + y^2 = ab.$$

Jest tedy rovnicí prvou dána kružnice. Rovnice druhá v podobě zjednodušené jest

$$x^2 + y^2 = 2\,(ab \mp xy)$$

neboli $$x^2 \pm 2xy + y^2 = 2ab;$$

odmocněním obdržíme

$$x \pm y = \pm\sqrt{2ab},$$

z čehož patrno, že rovnice ta vyjadřuje 4 přímky omezující čtverec, jehož střed jest v počátku soustavy a vrcholy na osách souřadných.

Vyšetříme vztah jedné z těchto přímek ke kružnici. Zvolíme-li k tomu

$$x + y = \sqrt{2ab},$$

obdržíme zdvojmocněním

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2ab,$$

tudíž vzhledem k rovnici kružnice

$$2xy = ab.$$

Souřadnice bodů společných přímce a kružnici jsou kořeny symmetrické rovnice

$$x^2 - x\sqrt{2ab} + \frac{ab}{2} = 0;$$

kořeny ty jsou

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \sqrt{\frac{ab}{2}}.$$

Přímka ta jest tečnou kružnice, a obdobně i 3 ostatní, tvoříce čtverec o kružnici opsaný.

Úloha 41.

Do paraboly $y^2 = 2px$ vepsati jest lichoběžník, dána-li jeho půdice $\overline{ab} = 2n$ kolmá k ose paraboly a jsou-li ostatní tři strany stejné.

Vyčísliti výsledek při $p = \sqrt{3}$, $n = 4$.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Alois Sládek*, stud. VI. tř. r. v Uher. Brodě.)

Náleží-li tětiva $\overline{ab} = 2n$ k úsečce m, jest

$$n^2 = 2pm.$$

Má-li v lichoběžníku vepsaném *abdc* býti $ac = cd = db$, a jsou-li (xy) souřadnice vrcholu c, má býti vyhověno podmínce

$$\overline{ac} = 2y$$

čili

$$(m - x)^2 + (n - y)^2 = 4y^2.$$

Dosaďme do této rovnice hodnoty

$$m = \frac{n^2}{2p}, \qquad x = \frac{y^2}{2p};$$

obdržíme

$$(n^2 - y^2)^2 + 4p^2 (n - y)^2 = 16p^2 y^2$$

čili

$$(n^2 - y^2)^2 = 4p^2 [4y^2 - (n - y)^2].$$

Rozložíme-li pravou stranu v součin, poznáme, že rovnice

$$(n^2 - y^2)^2 = 4p^2 (y + n)(3y - n)$$

má jeden kořen $y = -n$;
při této hodnotě vrchol c sjednotí se s b, d s a, lichoběžník hledaný přechází v tětivu ab.

Zkrátíme-li rovnici činitelem kořenovým $y + n$, vznikne rovnice 3. stupně

$$(y - n)(y^2 - n^2) = 4p^2 (3y - n),$$

neboli $y^3 - ny^2 - (n^2 + 12p^2) y + n^3 + 4np^2 = 0$.

Má tedy daná úloha obecně 3 řešení; povahu jich poznáme z číselného příkladu.

V případě úlohou daném jest

$$y^3 - 4y^2 - 52y + 112 = 0;$$

zde snadně poznáme kořen $y_1 = 2$, k němuž přísluší

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Tyto hodnoty stanoví lichoběžník abd_1c_1 vepsaný do úseče parabolické na tětivě ab; strany jeho jsou

$$ab = 8, \quad ac_1 = c_1d_1 = d_1b = 2y_1 = 4.$$

Dělíme-li rovnici pro y činitelem $y-2$, zůstává rovnice kvadratická

$$y^2 - 2y - 56 = 0,$$

ze které vypočítáme

$$y_{2,3} = 1 \pm \sqrt{57}, \quad x_{2,3} = \frac{1}{3}(29\sqrt{3} \pm 3\sqrt{19}).$$

Tím stanoveny jsou dva lichoběžníky, z nichž abd_2c_2 má strany

$$ab = 8, \quad ac_2 = c_2d_2 = d_2b = 2y_2 = 17{\cdot}1\ldots;$$

v lichoběžníku abd_3c_3 strana ac_3 a bd_3 se křižují a jest

$$ab = 8, \quad ac_3 = c_3d_3 = d_3b = 2y_3 = 13{\cdot}1\ldots$$

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Bahník Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Příbrami, úl. 22. až 31., 34. až 40.
Barbořík Štěpán, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21.
Baumann Josef, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 21., 24., 26., 31. až 36., 38., 39.

Bezloja Alois, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 41.
Bršlica J., stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 21., 34.
Brzobohatý Břetislav, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 21. až 41.
Cenefels Karel, stud. V. tř. g. v Domažlicích, úl. 37.
Čupr Karel, stud. VI. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 21. až 41.
Doležal Jaromír, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 13., 28., 29.
Dubský Otto, stud. V. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 35.
Eichler Jaroslav, stud. VI. tř. g. v Praze (Křemencová ul.), úl. 31., 36.
Fiala C., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 21. až 27., 29., 30., 32. až 40.
Fiala František, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 21. až 25., 31. až 37., 39.
Grössl Václav, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 21. až 35., 37. až 40.
Habrich Alois, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 21. až 25., 27. až 31., 33., 34., 35., 37., 38., 39., 41.
Hanosek Bohumír, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21., 22., 23., 25., 28., 29., 30., 33., 34., 35., 40., 41.
Hassmann Antonín, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 28., 29., 30., 36., 38., 41.
Hostinský Bohuslav, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 21., 22., 25., 26., 28., 29., 30., 33., 35. až 41.
Janota Rudolf, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 21., 22., 24., 31., 33., 34., 35.
Jarý Josef, soukr. stud. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 21., 22., 23., 25. až 41.
Kálal František, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 21. až 41.
Klíma Rudolf, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 21. až 41.
Kneidl F., stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21., 22., 24., 25., 26., 28., 29., 30., 31., 36. až 41.
Kordina Karel, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 28.
Lochmann Vilém, stud. VIII. tř. g. v Praze (Žitná ul.), úl. 21. až 41.
Los František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 41.
Mikulášek Adolf, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 21. až 24., 30. až 39.
Navrátil Josef, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 21. až 41.
Novák Jaroslav, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 41.
Novák Josef, stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 30., 33.
Pavelec Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 21. až 41.
Pergler František, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 21., 22., 24., 31., 34., 35., 36.

Petz Leopold, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21., 22., 28., 29., 34., 35., 40.
Pleva Eduard, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 21. až 41.
Procházka Bedřich, svob. pán, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 22., 24., 36., 38.
Raus František, stud. V. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 35.
Rolinc Antonín, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 21., 28., 30., 31., 34., 35.
Růžička Jan, učitel v Tetíně, úl. 24., 28., 29., 36., 39.
Rychlík Bedřich, stud. VI. tř. r. v Uher. Brodě, úl. 21., 31., 33., 34., 35., 38., 39.
Rychlík Karel, stud. VI. tř. akad. g. v Praze, úl. 21. až 41.
Ryšlink Emil, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 21., 22., 24., 31., 33., 34., 35., 37.
Seifert Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 21., 22., 24. až 27., 30., 34., 35., 37., 38., 40.
Schönbaum Antonín, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 21. až 41.
Skála Jan, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 24., 28., 31., 35., 36., 38., 39.
Sládek Alois, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 21. až 41.
Sova Josef, stud. V. tř. r. v Lounech, úl. 39.
Spurný Karel, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 21. až 41.
Strumhaus Ladislav, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 21. až 41.
Svoboda Hugo, stud. VI. tř. r. v Uher. Brodě, úl. 24., 31., 34., 35.
Šantroch Jaroslav, právník v Turnově, úl. 21. až 24., 26., 28. až 35., 37. až 40.
Šebela Mikuláš, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 28., 31., 40.
Šilhan Ludvík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 25., 27., 28., 29., 31. až 35., 40.
Šmeral Theodor, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 24., 28., 31., 35., 36.
Špíšek Julius, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 21. až 41.
Šrámek Leopold, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 41.
Valach František, bohoslovec v Olomouci, úl. 21. až 41.
Vališ Ignát, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 21., 24., 26., 28., 29., 40.
Váňa Robert, bohoslovec v Olomouci, úl. 21. až 41.
Weissenstein Rudolf, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 36.
Vodička Karel, jednoroč. dobrovolník u c. a k. pěšího pluku č. 75. v Jindř. Hradci, úl. 21. až 26., 28. až 35., 38., 40.
Vondráček František, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 21. až 26., 28., 29., 30., 33. až 39.
Závada Bohuslav, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 21. až 41.

Zavadil Stanislav, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 21. až 41.
Zelenka František, stud. VI. tř. g. v Roudnici, úl. 24., 26., 27., 36.
Ziegler František, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 36.
Zlámal František, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 26., 36.
Žáček Augustin, stud. V. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 22., 35., 36.
Nepodepsaný stud. r. v Brně, úl. 21., 24, 25., 35.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1902) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků obdrželi tito řešitelé:

I. Ceny první.

1. *Bezloja Alois,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
2. *Brzobohatý Břetislav,* stud. VII. tř. r. v Lipníku.
3. *Čupr Karel*, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě.
4. *Kálal František*, stud. VII. tř. r. v Písku.
5. *Klíma Rudolf*, stud. VII. tř. r. v Písku.
6. *Lochmann Vilém*, stud. VIII. tř. g. v Praze (Žitná ul.).
7. *Navrátil Josef,* stud. VI. tř. r. v Uher. Brodě.
8. *Pleva Eduard*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.
9. *Rychlík Karel*, stud. VI. tř. akad. g. v Praze.
10. *Schönbaum Antonín,* stud. VIII. tř. g. v Benešově.
11. *Sládek Alois,* stud. VI. tř. r. v Uher. Brodě.
12. *Spurný Karel*, stud. VII. tř. g. v Místku.
13. *Strumhaus Ladislav*, stud. VII. tř. g. v Místku.
14. *Šrámek Leopold,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
15. *Valach František,* bohoslovec v Olomouci.
16. *Váňa Robert*, bohoslovec v Olomouci.
17. *Závada Bohuslav,* stud. VII. tř. r. v Lipníku.
18. *Zavadil Stanislav,* stud. VII. tř. r. v Lipníku.

II. Ceny druhé.

1. *Bahník Ladislav*, stud. VIII. tř. g. v Příbrami.
2. *Grössl Václav,* stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.
3. *Habrich Alois*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.
4. *Jarý Josef,* soukr. stud. g. ve Vysokém Mýtě.

5. *Los František*, stud. VII. tř. g. v Brně.
6. *Novák Jaroslav*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
7. *Šantroch Jaroslav*, právník v Turnově.
8. *Špíšek Julius*, stud. VI. tř. r. v Uher. Brodě.
9. *Vodička Karel*, jednoroč. dobrovolník v Jindř. Hradci.
10. *Vondráček František*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.

III. Ceny třetí.

1. *Barbořík Štěpán*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
2. *Fiala C.*, stud. VII. tř. r. v Plzni.
3. *Fiala František*, stud. VI. tř. r. v Písku.
4. *Fibiger Karel*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.
5. *Hanosek Bohumír*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
6. *Hassmann Antonín*, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze.
7. *Hostinský Bohuslav*, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze.
8. *Kneidl F.*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
9. *Mikulášek Adolf*, stud. VI. tř. r. v Hodoníně.
10. *Pavelec Jaroslav*, stud. VII. tř. r. v Písku.
11. *Petz Leopold*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
12. *Pithard Jaroslav*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.
13. *Ryšlink Emil*, stud. V. tř. r. v Rakovníku.
14. *Seifert Jaroslav*, stud. VI. tř. r. v Karlíně.
15. *Skála Jan*, stud. VII. tř. g. v Třebíči.
16. *Surka Leopold*, stud. VII. tř. g. v Brně.
17. *Šilhan Ludvík*, stud. VII. tř. g. v Brně.
18. *Šmeral Theodor*, stud. VII. tř. g. v Třebíči.
19. *Šrámek Stanislav*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
20. *Vališ Ignát*, stud. VII. tř. g. v Brně.

Cenu, kterou vypsal prof. Dr. Jos. R. Vaňaus za nejlepší řešení úlohy 36. (viz str. 264.), přisoudila redakce řešení, jež zaslal p. *Karel Rychlík*, studující VI. třídy c. k. akadem. gymnasia v Praze. Mimo řešení uveřejněné na str. 472.—474. podal též konstruktivní řešení užitím konchoidy Nikomedovy a užitím trisektorie. Všech řešitelů této úlohy jest 34.