Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bedřich Procházka; Josef Žďárek

Doplněk ku článku „Harmonické středy soustavy trojbodové"

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 4-5, 304--313

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122171

91. Über eine birationale kubische Verwandtschaft und deren Anwendung. Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss. in Wien 14., 1905, str. 669—691.
92. O determinantech. Brno, J. Barvič 1905, 50 stran.
93. Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen. Věstník Král. čes. spol. nauk v Praze 1906, XXX., 19 stran.
94. Příspěvek k theorii differenciálních rovnic lineárních. Časopis mathem. a fys. 36., 1907, str. 9—13.
95. Konstruktion der rationalen Kurven dritter und vierter Ordnung respektive Klasse vermittels der kollinear incidenten Elemente. Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss. in Wien 117., 1908, str. 1167—1190.
96. Analytická geometrie. Díl I. Geometrie bodu, přímky a kuželoseček. Brno, A. Píša 1907, 184 strany.
97. Einige Bemerkungen zu den zirkularen Zissoidalen als Fusspunktskurven. Věstník Král. čes. spol. nauk v Praze 1909, III., 8 stran.
98. Věta o trojúhelníku. Časopis mathem. a fys. 39., 1910, str. 35—36.
99. Geometrický význam koefficientů rovnice kuželosečky opsané danému trojúhelníku. Časopis mathem. a fys. 39., 1910, str. 36—37.
100. Einige Eigenschaften der Osculationstripel am Kegelschnitte. Věstník Král. čes. spol. nauk v Praze 1910, V., 6 stran.
101. Zur Theorie der Fokale. Věstník Král. čes. spol. nauk v Praze 1911, IV., 16 stran.
102. O průsecích kuželosečky s fokálou. Časopis mathem. a fys. 40., 1911, str. 1—9.
103. Některé vlastnosti oskulačních trojin na kuželosečce. Časopis mathem. a fys. 41., 1912, str. 519—523.

Doplněk ku článku „Harmonické středy soustavy trojbodové.“

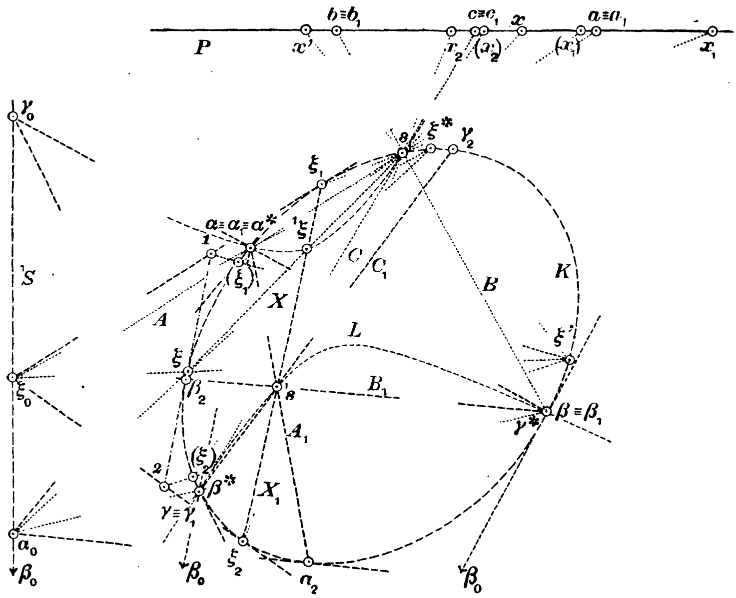
Napsali dvorní rada **B. Procházka** a assistent **J. Žďárek**.

1. V pojednání *„Harmonické středy soustavy trojbodové“**) bylo ukázáno, že k daným třem bodům $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, $c \equiv c_1$ přímky P jako základním sestrojí se harmonické středy stupně 2-ho a 1-ho pro libovolný pól x téže přímky následní konstrukcí.

„Promítněme body abc s libovolného bodu s na libovolnou bodem s procházející kuželosečku K (obr. 1.) do bodů $\alpha \equiv \alpha_1$, $\beta \equiv \beta_1$, $\gamma \equiv \gamma_1$; sestrojme v těchto ke kuželosečce K tečny tvořící trojúhelník, v němž spojnice $A_1 B_1 C_1$ jeho vrcholů s protilehlými body dotyčnými protínají se v jediném bodě $'s$ a vytí-

*) Uveřejněno týmiž autory v „Časopise pro pěst. m. a f.“ v ročníku XLV. na str. 321.

nají na K další body $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$. Je-li ξ průmětem bodu x s bodu s na K, a přiřadíme-li třem paprskům $A_1 B_1 C_1$ svazku ${}^1s$ projektivně paprsky $A \equiv \overline{s\alpha}$, $B \equiv \overline{s\beta}$, $C \equiv \overline{s\gamma}$ svazku o středu s, odpovídá paprsku $X \equiv \overline{s\xi}$ svazku druhého v prvém paprsek X_1, kterýž vytíná na kuželosečce K body $\xi_1 \xi_2$, jichž průměty $x_1 x_2$ s bodu s na P jsou harmonickými středy $x_1 x_2$ 2. stupně pro



Obr. 1.

pól x. Spojnice bodu ξ s pólem ξ_0 přímky X_1 vůči kuželosečce K protíná tuto v bodě ξ', jež se promítá s bodu s na P do harmonického středu 1-ho stupně x'. Zmíněné svazky vytvořují kuželosečku L, určenou body s, ${}^1s$, $\alpha \equiv \alpha_1$, $\beta \equiv \beta_1$, $\gamma \equiv \gamma_1$. Je-li tudíž ${}^1\xi$ průsečík paprsku $\overline{s\xi}$ s touto kuželosečkou L, spojuje paprsek $\overline{\xi_1 \xi_2} \equiv X_1$ body ${}^1\xi$ ${}^1s$."

Je patrno, že možno ke konstrukci této použiti místo bodu s kteréhokoliv bodu o křivky K; svazek paprskový $o(\alpha\beta\gamma \ldots \xi \ldots)$ prométný se svazkem ${}^1s(A_1 B_1 C_1 \ldots X_1 \ldots)$ vytvořuje kuželosečku L^0, již možno ke konstrukci stejně použiti jako kuželosečky L. Všechny takovéto kuželosečky náležejí svazku kuželoseček, jdoucích základními body $\alpha\beta\gamma\,{}^1s$.

Stotožňují-li se dva z bodů základních, na př. $b \equiv b_1$ a $c \equiv c_1$, stotožní se i body $\beta \equiv \beta_1$ a $\gamma \equiv \gamma_1$, a s těmito i bod ${}^1s$; zmíněný svazek přejde ve svazek kuželoseček jdoucích bodem α, dotýkajících se kuželosečky K v bodě $\beta \equiv \gamma$ a tamtéž se vzájemně oskulujících. Ježto neznáme společný poloměr křivosti tohoto bodu*) a ježto degenerovaná kuželosečka svazku, sestávající z tečny v bodě $\beta \equiv \gamma$ a spojnice $\overline{\alpha\beta}$, k cíli nevede,**) odvodíme konstrukci jinou.

Póly $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \ldots \xi_0 \ldots$ paprsků $A_1 B_1 C_1 \ldots X_1 \ldots$ svazku ${}^1s$ vzhledem na K vyplňují poláru ${}^1S$ bodu ${}^1s$ (obr. 1.) tvoříce na této bodovou řadu, projektivnou k řadě $\alpha\beta\gamma \ldots \xi \ldots$ Body $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ jsou průsečíky tečen kuželosečky K v bodech $\alpha\beta\gamma$ vždy se spojnicemi druhých dvou z těchto tří bodů. Promítněme dále tuto řadu bodovou s bodu α na kuželosečku K do bodové řady $\alpha^* \beta^* \gamma^* \ldots \xi^* \ldots$, projektivné a soumístné s řadou $\alpha\beta\gamma \ldots \xi \ldots$ Jak patrno, jest $\alpha^* \equiv \alpha$, $\beta^* \equiv \gamma$, $\gamma^* \equiv \beta$, pročež jsou zmíněné řady v poloze involutorní pro bod α_0 jako střed involuční. Tímto procházejí tudíž i spojnice $\overline{\xi\xi^*} \ldots$ homologických bodů ξ, ξ^* zmíněných řad. Promítneme-li naopak takto sestrojený bod ξ^* s bodu α na přímku ${}^1S$ do bodu ξ_0, jsou *hledané harmonické středy 2-ho stupně* $\xi_1 \xi_2$ *dotyčnými body obou tečen s bodu* ξ_0 *ke kuželosečce* K *vedených*. Spojnice $\overline{\xi\xi_0}$ protíná kuželosečku K v bodě ξ', kterýž odděluje s bodem ξ body $\xi_1 \xi_2$ harmonicky, a je tudíž průmětem harmonického středu x' 1-ho stupně pro pól x.***)

Stejně jako bodu α_0 možno použiti ke konstrukci bodu ξ_0 i bodů $\beta_0 \gamma_0$.

Stotožňuje-li se bod β s bodem γ (obr. 2.), sestrojíme harmonické středy 2-ho a 1-ho stupně pro libovolný pól ξ, promítneme-li dle předchozího tento bod s bodu α_0 — v němž polára ${}^1S$ bodu ${}^1s$, t. j. tečna křivky K v tomto bodě, stotožněném s body $\beta \equiv \gamma$ protíná tečnu sestrojenou v bodě α — na kuželosečku K do bodu ξ^*; spojnice $\overline{\alpha\xi^*}$ protne ${}^1S$ v bodě ξ_0, jehož polára X_1 vůči K vytíná na této body $\xi_1, \xi_2 \equiv \beta \equiv \gamma$,

---

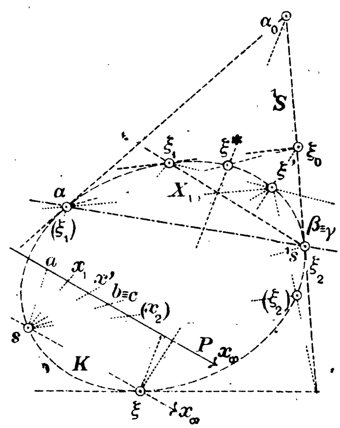
*) Tento poloměr lze však snadno určiti, na př. zvolíme-li za K kružnici nad úsečkou $\overline{ab}$ přímky P jako průměrem, dotýká se společná oskulační kružnice vnějšího obvodu kružnice K, majíc oproti této poloviční poloměr.

**) Podobně nevedou k cíli ostatní konstrukce zmíněného pojednání.

***) Tamtéž, str. 328.

spojnice pak $\overline{\xi_0 \xi}$ bod ξ'. V tomto případě stotožňuje se tudíž jeden z obou harmonických středů 2-ho stupně ξ_2 s bodem $\beta \equiv \gamma$. Druhé body $\xi_1 \ldots$ tvoří řadu bodovou, projektivnou s řadou příslušných pólů $\xi \ldots\ldots$ i s řadou harmonických středů 1-ho stupně $\xi' \ldots$

2. *Sestrojíme-li na přímce P bod (x_1)* (obr. 1.) *oddělující harmonicky bod x' od bodů x, x_1, jakož i bod (x_2), oddělující harmonicky bod x' od bodů x, x_2, slují tyto body (x_1) (x_2) přidružené ku pólu x.* Konstrukci proveďme na kuželosečce K.



Obr. 2.

Jsou-li *1, 2* průsečíky tečny v bodě ξ s tečnami $\overline{\xi_0\xi_1}$, $\overline{\xi_0\xi_2}$, jsou hledané body (ξ_1) (ξ_2), — jež promítají se s bodu s na přímku P do bodů (x_1) (x_2) — průměty bodů *1, 2* s bodu ξ' na kuželosečku K. Je zřejmo, že spojnice $\overline{(\xi_1)(\xi_2)}$ jde pólem paprsku $\overline{\xi\xi'}$.

Spadají-li však dva základní body, na př. $\beta \equiv \gamma$, tu, jak dokážeme, *stotožňuje se jeden z přidružených bodů s jednoduchým bodem základním α.* Neboť přihlížejíce k sečnám $\overline{\xi_0\xi^*\alpha}$, $\overline{\xi_0\xi\xi'}$ (obr. 2.) shledáváme, že paprsky $\overline{\alpha\xi'}$, $\overline{\xi\xi^*}$ protnou se na přímce X_1 jakožto poláře bodu ξ_0. Prochází tudíž spojnice $\overline{\xi'\xi_1}$ pólem přímky $\overline{\xi\xi^*}$, ležícím na paprsku $\overline{\alpha\beta}$. Ježto pak body $\xi\xi'\xi_1\xi_2 \equiv \beta$ tvoří harmonickou čtveřinu, platí totéž i o bodech $\xi\xi_1\xi'\alpha$, do nichž se tato čtveřina s právě jmenovaného pólu na kuželosečku K promítá. Přidružený bod (ξ_1) jest však definován vztahem $(\xi\xi_1\xi'(\xi_1)) = -1$, je tudíž skutečně $(\xi_1) \equiv \alpha$. Druhý přidružený bod (ξ_2) má polohu obecnou a vytvořuje při pohybu pólu ξ po kuželosečce K řadu s řadou pólů projektivnou.

V tomto případě nabýváme jasné představy o vzájemné poloze přidružených bodů vzhledem k pólu a harmonickým středům, promítneme-li tyto body na přímku P tak, aby průmětem x pólu ξ byl úběžný bod x_∞ přímky P (obr. 2.). Označíme-li průměty bodů α, ξ_1, ξ', $\beta \equiv \gamma$, (ξ_2) pořadem a, x_1, x', $b \equiv c$, (x_2), jsou vzdálenosti kterýchkoliv dvou sousedních bodů stejné. Neboť ježto je $(x_\infty x_1 a x') = -1$, jest $\overline{ax_1} = \overline{x_1 x'}$; ježto $(x_\infty x' x_1 b) = -1$, jest $\overline{x_1 x'} = \overline{x' b}$; posléze ježto $(x_\infty b x' (x_2)) = -1$, jest i $\overline{x'b} = \overline{b(x_2)}$.

Ukážeme ještě, že naše synthetická definice přidružených bodů (x_1) (x_2) jest totožná s analytickou definicí *Cremonovou.**)

Mezi harmonickými středy 2-ho stupně x_1 x_2, harmonickým středem 1 ho stupně x' a pólem x platí, jak již předem uvedeno, relace $(x x' x_1 x_2) = -1$. Přidružený bod (x_1) definován vztahem $(x x_1 x' (x_1)) = -1$. Vyloučíme li z obou těchto rovnic veličinu $\overline{xx'}$, nabýváme vztahu

$$\frac{1}{\overline{x(x_1)}} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{\overline{xx_1}} - \frac{1}{\overline{xx_2}}\right].$$

Obdobně platí i vztah $\dfrac{1}{\overline{x(x_2)}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{3}{\overline{xx_2}} - \dfrac{1}{\overline{xx_1}}\right]$. Obě tyto relace jsou definice Cremonovy.

3. Sestrojíme-li pro každý z paprsků svazku o středu x harmonické středy $x_1 x_2$ 2-ho stupně, a x' 1-ho stupně pro bod x jako pól vzhledem na průsečíky téhož paprsku s nějakou křivkou 3-ho stupně jako body základní, vyplňují body $x_1 x_2$ kvadratickou poláru P, body x' přímou poláru P' pólu x.**) Přidružené body (x_1) (x_2) vyplňují pak kuželosečku (P) zvanou *přidruženou* (satellitní) pólu x.***) Tato prochází průsečíky $\alpha\beta$ polár PP', dotýkajíc se v nich poláry P. Neboť v těchto dotyčných bodech tečen s bodu x k poláře P vedených sjednocují se příslušné body x_1 x_2 x' a tím i body (x_1) (x_2). Pro libovolný paprsek R zmíněného svazku promítněme na něm ležící harmo-

*) *Cremona-Weyr:* „Úvod do geom. theorie křivek rov.", str. 150.

*) Tamtéž, str. 73. a násl.

**) Tamtéž, str. 150.

nický střed x_1 s bodů $\alpha\beta$ na přímky $\overline{x\beta}$, $\overline{x\alpha}$ do bodů $\alpha'\beta'$. Spojnice $\alpha'\beta'$, vytínající na transversále R bod (x_1), je spolu v tomto bodě tečnou přidružené kuželosečky (P).

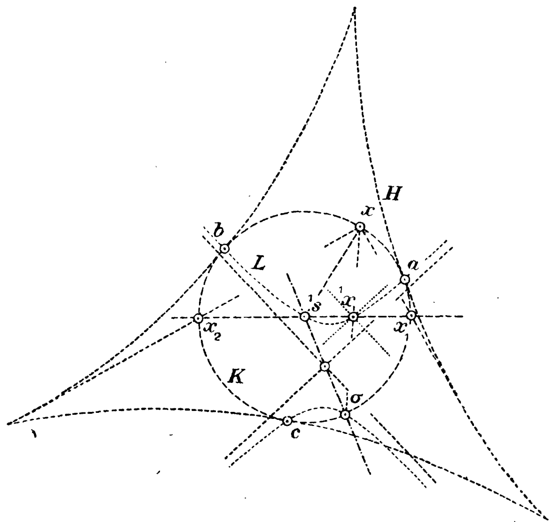
Je-li paprsek R tečnou uvažované křivky kubické, spadá jeden z přidružených bodů s jednoduchým průsečíkem téže tečny t. j. *přidružená kuželosečka libovolného pólu prochází šesti tangenciálnými body tečen s tohoto pólu ke křivce 3. stupně vedených.* Vzhledem k právě odvozené konstrukci přidružené kuželosečky shledáváme, že tuto lze též definovati jako involuční kuželosečku specielní kubické involuce bodové na první poláře P, která má v průsečících této s přímou polárou P' body trojnásobné.

4. Jedno dvojznačná příbuznost pólů a harmonických středů 2-ho stupně, totožná s příbuzností harmonických středů 1-ho stupně s řadou pólů,*) *není povahy obecné*, t. j. nelze každou jedno-dvojznačnou příbuznost pokládati za příbuznost tohoto druhu. Je-li totiž na př. involuční řada dána dvěma družinami, je zmíněná příbuznost stanovena, známe-li pro jednu z těchto družin příslušný pól; neboť každé družině involuční řady, jejíž oba body se stotožňují v bodě samodružném, přísluší v jednoduché řadě bod stotožněný s druhým z těchto samodružných bodů **) Tím je projektivnost třemi družinami odpovídajících elementů úplně stanovena.

Specielní povaha zmíněné příbuznosti jeví se ještě jiným způsobem. Dán-li totiž na kuželosečce obecný jedno-dvojznačný vztah, a spojíme-li každý bod jednoduché řady s oběma příslušnými body přidružené dvojiny řady involuční, obalují tyto spojnice obecnou křivku *třetí třídy* — ježto každým bodem kuželosečky procházejí tři tečny této křivky — která je *stupně šestého.* Je-li však jedno-dvojznačný vztah specielní uvažované povahy, potom spojnice samodružných bodů kvadratické involuční řady je dvojnou tečnou zmíněné křivky obalové, kteráž je tudíž v tomto případě *stupně čtvrtého.* Je-li zmíněná involuce elliptická, je dvojná tečna této křivky isolována, všechny pak samodružné body zmíněné příbuznosti, jež jsou základními body trojbodové soustavy, jsou reálné. Kdyby v tomto případě uvažovaná

*) Proch.-Žď.: „Harm. středy soust. trojb.“, str. 332.
**) Tamtéž, str. 337.

kuželosečka byla kružnicí K, střed její ^1s involučním středem, byla by uvažovaná křivka *hypocykloidou Steinerovou* H (obr. 3.). V tomto případě konstrukce základních bodů trojbodové soustavy jakožto samodružných bodů zmíněné příbuznosti řeší spolu známý problém *trisekce*. Přísluší-li totiž pólu x body $x_1\, x_2$ jako harmonické středy stupně 2-ho (obr. 3.), promítněme řadu pólů $x \dots$ s libovolného bodu σ kružnice svazkem paprskovým, jenž spolu s promětným involučním svazkem $x_1 x_2 \dots$ určuje kuželosečku L. Jsou-li ij imaginárné úběžné body kruhové, odpovídá jednomu



Obr. 3.

z nich jako pólu druhý jako samodružný bod kvadratické involuce. Promítneme-li s bodu σ bod i na tečnu $\overline{^1sj}$ kružnice K do bodu i_0 jakož i bod j na tečnu $\overline{^1si}$ do bodu j_0, je čtyrúhelník $^1sj_0\,\sigma i_0$ vepsán kuželosečce L. Body kruhové ij jsou tudíž sdruženými póly kuželosečky L, která je tudíž hyperbolou rovnoosou; přímky $\overline{ij}$, $\overline{^1s\sigma}$ jsou jak zřejmo sdružené poláry téže hyperboly, a ježto prvá je úběžná, je druhá, t. j. $\overline{^1s\sigma}$, průměrem hyperboly L. Tato je dalším svým bodem $^1x \equiv (\overline{x_1 x_2}\ \overline{\sigma x})$ úplně stanovena. Střed její půlí poloměr $\overline{^1s\sigma}$, asymptoty jsou rovnoběžné se symmetrálami úhlu $^1s\,^1x\,\sigma$. Zbylé průsečíky abc kuželoseček KL jsou základními body trojbodové soustavy. Je patrno, že se zmíněná hypocykloida H v těchto základních bodech dotýká kružnice K. Vzhledem ku známé vlastnosti této křivky*) je (dle označení v obr. 3. zvoleného):

$$\sphericalangle x_1\,{}^1sa = \frac{1}{3} \sphericalangle x_1\,{}^1sx, \quad \sphericalangle x_2\,{}^1sb = \frac{1}{3} \sphericalangle x_2\,{}^1sx.$$

5. Uvažované specielní příbuznosti jedno-dvojznačné možno užiti i v geometrii deskriptivní k *sestrojení bodů vratu obrysu centrálného průmětu sborcených ploch 3. stupně.*

Je-li X libovolnou povrchovou přímkou této plochy, X' její centrálný průmět, jest obrys O_4^3 obálkou těchto průmětů. Dotyčný bod x' tečny X' s křivkou O_4^3 stanovíme známým způsobem pomocí dotyčného hyperboloidu. Rovina středem promítání a přímkou X vedená protne plochu ještě v kuželosečce; vedeme-li k této středem promítání tečny, jichž dotyčné body buďtež $x_1 x_2$, jeví se průměty $x'_1 x'_2$ těchto bodů jako průsečíky přímky X' s obrysem O_4^3. Družiny $x_1' x_2' \ldots$ vyťaté jednotlivými tečnami X' obrysu tvoří na této křivce kvadratickou involuční řadu, projektivnou s řadou dotyčných bodů $x' \ldots$ týchž tečen; tím vytčena na obrysu příbuznost jedno-dvojznačná.

Promítající rovina proložená jednoduchou řídící přímkou J plochy obsahuje dvě povrchové přímky MN. Tyto vytínají na přímce J body mn, v jichž průmětech $m'n'$ se obrys O_4^3 dotýká průmětu J' přímky J, jež je dvojnou tečnou obrysu. Bodům $m'n'$ jakožto bodům jednoduché řady zmíněné příbuznosti jedno-dvojznačné přísluší v kvadratické řadě involuční body $m'_{12} \equiv n'$, $n'_{12} \equiv m'$; je tudíž tato příbuznost téže povahy jako příbuznost pólů a harmonických středů 2-ho stupně.

Splývá-li bod x' s jedním z bodů $x'_1 x'_2$, má obrys v tomto bodě vrat. Body vratu obrysu jeví se tudíž jako samodružné body zmíněné příbuznosti jedno-dvojznačné.

Přiřadíme-li bodu x' křivky O_4^3 onen bod (x) na některé kuželosečce K plochy, v němž přímka X tuto kuželosečku protíná, odpovídá naopak každému bodu (x) na kuželosečce K určitý bod obrysu, totiž onen bod x', v němž se průmět X' bodem (x) vedené povrchové přímky X sborcené plochy dotýká obrysu O_4^3.

*) *Beutel: Algebraische Kurven*, II. Teil, Sammlung Göschen N. 436 str. 117.

Obrys kubické plochy je na libovolné kuželosečce K téže plochy tímto způsobem *racionálně zobrazen,* každému bodu x' obrysu přísluší na centrálném průmětu K' kuželosečky K průmět (x') bodu (x) jakožto jeho obraz.*)

Samodružným bodům $m' n'$ zmíněné kvadratické involuce na obrysu přiřazeny jsou jako obrazy průsečíky (m') (n') centrálných průmětů $K' J'$ útvarů KJ, jakožto průměty oněch bodů (m) (n), v nichž kuželosečka K protíná přímky MN. Ježto je $(m') \equiv (n'_{12})$ a $(n') \equiv (m'_{12})$, zastupují tyto body dvě družiny jedno-dvojznačného vztahu. Pól $'s$ přímky J' vůči kuželosečce K' je středem kvadratické involuce na kuželosečce K'. K úplnému stanovení jedno-dvojznačného vztahu na této kuželosečce třeba ještě k obrazu (x) bodu x' jakožto bodu jednoduché řady znáti jeden z obrazů (x'_1) (x'_2) bodů x'_1 x'_2. Bod na př. (x_1) sestrojíme jakožto průsečík kuželosečky K s onou povrchovou přímkou sborcené plochy, jež prochází bodem x_1. Výhodněji však dospějeme k třetí družině homologických bodů jedno-dvojznačného vztahu, uvažujeme-li onu středem promítání jdoucí rovinu, která obsahuje dvojnou řídící přímku D plochy sborcené. Rovina ta protne sborcenou plochu kromě přímky D ještě v přímce U. Její průmět U' dotýká se obrysu O_4^3 v bodě u', jenž je centrálným průmětem průsečíku u přímek UD. Tomuto bodu u' přísluší na kuželosečce K jakožto obraz průsečík (u) přímky U s touto kuželosečkou, jehož centrálný průmět (u') je oním průsečíkem kuželosečky K' s přímkou $D' \equiv U'$, jenž není průmětem skutečného průsečíku útvarů D, K. Průmět $U' \equiv D'$ protne obrys v bodech u'_1 u'_2, jež jsou průměty kuspidálních bodů sborcené plochy. Jich obrazy (u'_1) (u'_2) na kuželosečce K' jsou průměty průsečíků (u_1) (u_2) přímek torsálních s kuželosečkou K. Obdržíme je tudíž jako dotyčné body obou tečen, vedených ke kuželosečce K' s bodu p', jenž je centrálným průmětem průsečíku p roviny kuželosečky K s řídící přímkou J.

Sestrojíme-li samodružné body $a b c$ takto určené jedno-dvojznačné příbuznosti na kuželosečce K, procházejí jimi ony povrchové přímky plochy sborcené, jichž průměty jsou spolu

*) Bodům $x' \ldots$ možno též přiřaditi průsečíky přímek $X \ldots$ s přímkou J, čímž je obrys také na této přímce racionálně zobrazen.

tečnami vratu obrysu. Sestrojíme-li posléze pro každou z nich dotyčný bod roviny jdoucí středem promítání s plochou, jsou centrálné průměty těchto bodů hledanými body vratu obrysu.

O de la Vallée-Poussinově methodě sčítací.

Napsal Dr. **K. Rychlík**.

Jeden ze způsobů sčítání divergentních řad je založen na tvoření „středních hodnot“. Východiskem je věta, že pro konvergentní posloupnost čísel reálných neb komplexních $s_0, s_1, s_2 \ldots s_n \ldots$ posloupnost arithmetických středů

$$s_0, \frac{s_0+s_1}{2}, \frac{s_0+s_1+s_2}{3}, \ldots \frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}, \ldots$$

je také konvergentní a má tutéž limitu. Posloupnost arithmetických středů může však konvergovati, i když je daná posloupnost $s_0, s_1, s_2 \ldots$ divergentní: na př. pro divergentní posloupnost 1, 0, 1, 0, 1, 0 ... $s_{2m}=1$, $s_{2m+1}=0, \ldots$ je posloupnost arithmetických středů

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \ldots \frac{m+1}{2m+1}, \frac{1}{2} \ldots$$

konvergentní a má za limitu $\frac{1}{2}\cdot$

O posloupnosti u níž konverguje posloupnost arithmetických středů, řekneme, že konverguje dle arithmetického středu.

Je-li při nekonečné řadě

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

posloupnost částečných součtů

$$s_0, s_1, s_2, \ldots$$

konvergentní dle arithmetického středu, nazývá se ona řada sčítatelná dle arithmetického středu. Tak známá řada divergentní

$$1-1+1-1+\ldots$$

je sčítatelná dle arithmetického středu se součtem $\frac{1}{2}$.*)

---

*) O methodě arithmetického středu a použití jejím na řady Fourierovy viz: Petr, Počet integrální, str. 481—485.