Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

O přímočarosti světelných paprsků a vztahu mezi zákonem Newtonovým a Euklidovou geometrií

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 4-5, 338--367

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122170`

odtud plyne rovnice asymptotických čar ve tvaru

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{C}{x}\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Vložíme-li sem hodnotu

$$y\frac{\partial F}{\partial y} = -x\frac{\partial F}{\partial x},$$

obdržíme výsledek symetričtější

$$(\mathfrak{A}^*) \qquad 2xy\frac{\partial F}{\partial z} = C\left(x\frac{\partial F}{\partial x} - y\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Užije-li se této rovnice u konoidu (22), obdržíme pro asymptotické čáry další rovnici

$$\xi\eta\,[\xi^2(z+c)^2 + \eta^2(z-c)^2 + 2\xi\eta\,(z^2 - \tfrac{1}{3}c^2)\cos 2\alpha]$$
$$= C[\xi^2(z+c)^3 - \eta^2(z-c)^3],$$

která definuje svazek ploch šestého stupně naše čáry na konoidu (V) vytínající.

Plocha tato má dvojné přímky δ, δ_1, Oz a úběžnou přímku roviny základní; s plochou (V) má mimo to společné přímky úběžné rovin $x \pm i\,y = 0$; průseč obou ploch obsahuje tedy stálé přímky, a sice jsou

4 + 4 soustředěny v přímkách δ, δ_1
4 „ v Oz
6 „ v úběžné přímce roviny základní,
2 splývají s uvedenými pomyslnými přímkami úběžnými.

Čáry asymptotické nejsou tedy stupně vyššího než $5 \times 6 - 20 = 10$.

O přímočarosti světelných paprsků a vztahu mezi zákonem Newtonovým a Euklidovou geometrií.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

O geometrii a jejím významu existuje celé spektrum názorů. Pod vlivem Herodotovým ujalo se již v klasickém starověku mínění, že geometrie vznikla v Egyptě, odkud se jako nakažlivá nemoc*) rozšířila na ostatní svět. Ale již antický komentátor Proklus (410—485 po Kr.) upozorňuje na to, že osel po přímce jde za svou potravou, čím naznačuje, že kořeny geometrie třeba položiti hluboko zpět do světa zvířat. Neboť osel projevuje zde instinktivní znalost axiomata Archimedova: *τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν.* Blízký tomuto mínění jest názor, že geometrie jest záležitost všelidská. Emil Weyr zachytil r. 1884. tuto myšlenku v slavnostní přednášce řka: „Musí se považovati za jisté, že každý národ při svém vývoji jest nucen, aby si geometrické vědomosti osvojil. Hladina těchto vědomostí závisí na rozsahu praktických potřeb, k nimž třeba přičísti také potřeby náboženské."

Že geometrie Euklidova náleží k společnému fondu lidského myšlení na celé zeměkouli, k tomu, co Bastian označuje slovem „Völkergedanke", lze různo vykládati. Poincaré mluví o výchově lidského rozumu a lidských smyslů naším světem, skutečností.**) Kant hledal příčiny toho v silné subjektivnosti pojmu prostor a čas, na niž poukazuje rčení o těchto *formách* našeho názoru. Ale ať už si zjev ten vykládáme tak či onak: v praxi užíváme geometrie Euklidovy jako theorie, jako myšlenkové stavby určené k tomu, abychom se ve světě zevním vyznali.

Dokud byla známa jen jediná geometrie, mohli Kantovci zastávati názor, že tato theorie světa, pro její intensivně subjektivní původ, žádného ověření skutečností nepotřebuje. Kdo vzal santonín a vidí vše žlutě, nemusí dokazovat, proč vidí věci žlutě. Jakmile však bylo známo, že existuje více takových logických theorií jako Euklidova geometrie, vzniká otázka, proč právě tuto pokládáme za theorii světa zevního. Poincaré praví, že geometrie Euklidova jest možná, poněvadž neobsahuje sporů; že je užitečná, dokazuje zkušenost.***) Uvědomiti si jasně tyto

---

*) Toto trefné přirovnání pochází od Maxe Simona: „Geschichte der Mathematik im Altertum". 1909. Úvod, str. XVI.

**) H. Poincaré: Věda a hypothesa. Začátek kapitoly „Prostor a geometrie".

***) H. Poincaré: Cena vědy. Konec paragrafu „Pojem změny místa". Tutéž myšlenku vyjádřil jsem v přednášce o názoru řka: Euklidova geometrie jest krásná, poněvadž jest logicky bezvadná, a jest pravdivá, ponězkušenosti, odhadnouti jejich váhu a vymeziti jim hranice, jest cílem této přednášky.

Většina přírodopisců pokládá tuto práci za zbytečnou. Považují totiž Euklidovu geometrii za předem zabezpečenou podmínku své práce. Fysik na př. vmýšlí si do kovové tangentní bussoly, s níž experimentuje ideální schema kruhovitého proudu, uprostřed přímočarý elementární magnet.*) Uchylky kovového přístroje od schematického odstraňuje korrekturami na výsledku měření, ale ani ve snu mu nenapadne, že by se tyto korrektury mohly rozšířiti na geometrii, že by se na př. vzorec pro obvod kruhového proudovodu $2\pi r$ měl korrigovati!

Není ovšem vědy bez takových předpokladů, jimž věříme bez ověření. Ostatně považuji obvyklý postup fysiků vůči Euklidově geometrii za správný. Jen, že jej mohu odvoditi na základě pozorování a předpokladů skromnějších. To není k zahození; neboť nedokázané předpoklady mohou člověka důkladně zavésti, jak viděti z následujícího žertovného příkladu.

Na špinavém dvoře mezi předměstskými činžáky novoyorkskými vychováno bylo kotě, jež nepatřilo nikomu. Živilo se z kbelíků s odpadky a naučilo se otevírati plechovky s mlékem, jež měly porouchané víko. Poněvadž bylo pěkné, učinil s ním předměstský ptáčník krutý experiment. Nechal je v kleci po celou zimu na dvoře a živil je olejnatou stravou, aby dostala krásný hustý kožich. Ptáčník vydával je nyní za vzácnou orientální kočku a jako taková byla draho koupena od bohaté rodiny.

Předměstská micka chovala se v paláci milionářů po předměstsku; kde by se také jiné chování v ní vzalo? — Urozené okolí interpretovalo však všechny její nezpůsoby na základě pevného předpokladu, že koupili vzácnou orientální kočku. Komické jest, že s úspěchem. Když byla divoká a nechtěla se mazlit, řeklo

vadž jest užitečná. — Upozorňuji, že z takových dvojích vyjádření bývají zbytečné debaty. Viděl jsem někde při četbě poznámku: G. E. *není* pravdivá, ale jest užitečná. Z textu okolního bylo jasně vidět, že autor míní totéž co já, řeknu-li, že *jest* pravdivá. Řeč je příliš hrubá k vyjadřování takových jemností; odtud pak zbytečné spory, jež stojí pracovní čas a vědu neobohatí.

*) Příklad Piera Duhema v jeho díle o „Cíli a struktuře fysikálních theorií“. Kapitola VIII. § 3.

se: má aristokratickou nechuť k důvěrným stykům. Skákala na klec s kanárkem; to se prominulo, poněvadž v Orientu přivykla despotickému jednání. Způsob, jak sundává pokličku s baňky na mléko, shledán vznešeným. Odpor proti hedvábnému loži a skoky na okenní tabule daly se také snadno vysvětliti. Koš vystlaný hedvábím byl jí sprostý a v palácích Orientu nemají zasklených oken. Marné pokusy chytiti vrabce byly důkazem její urozené neschopnosti. Šťárání v nádobě s odpadky pokládáno za malou prominutelnou výstřednost vzácné kočky. Zkrátka: ať předměstská micka chovala se sebe přirozeněji, boháči, kteří za ni zaplatili krvavé peníze, dovedli si vše krásně vyložiti jejím orientálním původem.

Takovým způsobem lze vždy přijíti ke škodě, když nějakou myšlenku houževnatě držíme. Jde to, jak lze viděti na příkladě státního návladního a obhájce, kteří zpracují tatáž fakta, jednou za pevného předpokladu: obžalovaný jest vinen, podruhé za předpokladu: není vinen. U čínského filosofa Licia čteme příklad: Muž jakýsi přišel o svou sekeru a podezíral syna sousedova. Pozoroval jej; kroky a skoky prosvítal zloděj; výrazem očí prosvítal zloděj; ze slov a řečí prosvítal zloděj; z pohybu, postavy a chování, ze všelikého počínání — prosvítal zloděj. Náhodou kopal onen muž ve své sluji a nalezl tam sekeru. Druhého dne spatřil zase syna sousedova. Pohyby, skutky, postava a chování už nepoukazovaly na zloděje.

Volím příklady sytých barev k objasnění noetické zvláštnosti člověka, že si může uložiti vazbu pro své myšlenky. Takovou vazbou jest pro většinu přírodopisců geometrie Euklidova. Nejedná se mi snad o sesměšnění tohoto postupu. Vždyť ihned oznámím svou vlastní vazbu, kterou chci při studiích našich zachovávati. Jde jen o to, abychom si uvědomili, že takové vazby jsou věcí víry, přesvědčenosti, k níž nelze nikoho nutiti.

Odstupuji v zájmu těchto studií od obvyklého přírodopisného kreda v Euklidovu geometrii a nahražuji je jiným. Věřím, že *světelný paprsek má vlastnosti přímky.*

Pro víru svou mám pronikavé argumentum ad hominem: není totiž na celé zeměkouli člověka, jenž by o tom pochyboval. O tuto větu opírá se truhlář, když visíruje dle hrany, kterou ohobloval, zeměměřič, když zjišťuje, že zabodnuté tyčky jsou v přímce, astronom, když měří angulární polohu těles nebeských.

Ale víra v to ono může býti společným majetkem celého lidstva, jako na př., že slunce na obzoru má dvě stopy v průměru a přece to není pravda! — Proto přednesu odůvodnění aspoň historické.

Myšlenka, že světelné paprsky jsou přímkami, pokládá se za nejstarší přírodopisný zákon, který byl člověkem objeven. Formulován a vysloven byl u Řeků, kde nalezl také první praktická použití. Římský stavitel Vitruvius (kol r. 14. př. Kr.) vypravuje, že k Aischylovým dramatům, jež byla kol r. 470. př. Kr. v Athénách provozována, jakýsi Agatharchos upravil jeviště. Dle zvyku tehdejšího mělo jen nepatrnou hloubku. Aby se fantasii diváků napomohlo, pomalovalo se pozadí. Účel tohoto pomalování nebyl ovšem baviti diváky pohledem na nástěnnou malbu, nýbrž vzbuditi illusi, že herci pohybují se před palácem. O obtížích, jež Agatharchovi tento první pokus o pořízení dobrých, to jest perspektivně správných, divadelních kulis dělal, napsal pojednání. Tím dal filosofům Anaxagorovi a Demokritovi popud, aby uvažovali, jak se mají kreslené přímky zorným paprskům z oka vycházejícím přiřaďovati, předpokládáme-li určitý střed, tak, aby se budovy na dekoracích zachytiti, vyjádřiti daly, tak že co v rovině nakresleno bylo, tu ustupovalo, onde vystupovalo.*)

S perspektivou dostali Řekové ovšem také hned správné názory o stínu Připomínám Aristotelův důkaz, že země jest koulí, z projekce stínu zemského na kotouč úplňku. U Platona zakončuje se vývoj sledované myšlenky poznámkou, jež definuje přímku pomocí světla: *Přímka jest čára, jejíž vnitřek konce zastiňuje. . . .* „*καὶ μὴν εὐθύ γε, οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ.*“

Aby si Řekové mohli vysvětliti přímku pomocí světla, musila jim býti již odjinud známou. Myslím, že jim byla povědoma jednak jako nejkratší spojnice dvou bodů — vzpomeňme ještě jednou Proklova osla, — jednak jako napnuté lano. Nade

*) Cantor, „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“. Vyd. II. Svazek I. 1894, str. 177.

vši pochybnost zajištěny jsou tyto dvě realisace přímky ve starém Orientu. Sumerské slovo „tim" pro přímku znamená původně provaz.*) Egypťané měli pak jakési úředníky geometrie znalé, patrně zeměměřiče, kterým Řekové říkali harpedonapté,**) napínači (do slova) vazači provazů. Proč egyptští zeměměřiči užívali lana k realisaci přímky? Poněvadž pracovali také v noci užívajíce hvězd k orientaci

Platon klade svou definicí přímky myšlenkovou pásku mezi napnutou nití a paprskem světelným. Tak to však nemíním, řeknu-li, že paprsek světelný považuji za přímku. Mne napnuté nitě vůbec nezajímají, poněvadž je již pro krátkost pokládám za špatnou realisaci přímky. Abych své stanovisko mohl vyjádřiti, musím uvésti začátek z Hilbertových slavných základů geometrie:

Myslíme na tři různé systémy věcí, jimž říkáme body, přímky a roviny. — Další text nás poučuje, že netřeba žádné vědomosti o tom, co jest bod, neb co jest přímka. Geometr, jenž pěstuje geometrii jen jako immanentní pletivo myšlenek, nesmí o nich vůbec věděti víc než mu praví axiomata na př. věta: Dvěma body jest přímka dokonale určená.

Toto stanovisko není však naším, není přírodopisným. Nám jde o transienci geometrie na přírodu a proto musíme vědět, co jest přímka. Odpovídáme pak na to za souhlasu všech národů a časů: přímka jest paprsek světelný.

Touto větou, kterou snad mohu nazvati axiomem Platonovým, stávají se všechny věty Euklidovy geometrie transientními na přírodu, v nichž není metrických pojmů. Jsou to věty t. zv. projektivní. Tato věta dává na př. zeměměřiči právo, aby pomocí konstrukce čtvrtého bodu harmonického úplným 4-rohem prodloužil přímku, to jest světelný paprsek přes překážku, např. les.***)

O této konstrukci zmiňuje se také F. Klein ve svých přednáškách o ne-euklidické geometrii.†) Praví, že když si pomoci

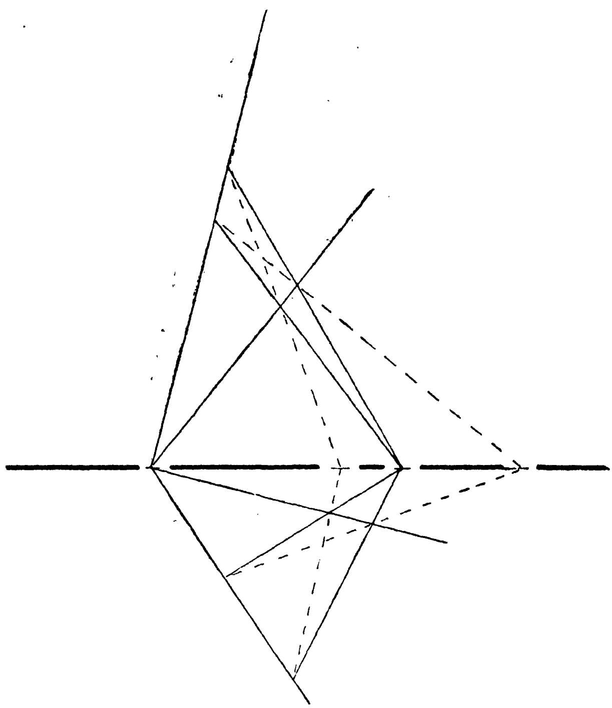
*) Cantor, str 99.

**) Cantor, str. 62.

***) Uvádí Th. Reye „Die Geometrie der Lage". Vyd. II. 1877. Díl I. Úvod str. 4. Reye doporučuje začátečníku, aby konstrukcí různých 4-rohů zjistil, že 4. bod harmonický je třemi ostatními dokonale určen. Tento experiment dokazuje, že pravítko (= paprsek světelný) má vlastnosti přímky.

†) Jsou to přednášky zimního pololetí r. 1889—90, jež vydal Fr. Schilling r. 1893. Druhý otisk. Str. 359 dílu I.

dvou různých úplných čtyrrohů nalezneme k třem bodům 4. harmonický, vyjde tento tím přesněji stejně, čím přesněji kreslíme. (Viz obr. 1.) Tím jest řečeno, že přímočarost pravítka, to jest světelných paprsků stavíme mimo dosah experimentů. Kdyby to na př. při zeměměřičské konstrukci nevycházelo, připíšeme to lomu světla v nestejně teplých vrstvách vzduchových. Kdyby



Obr. 1.

známé takové příčiny k vysvětlení nestačily, povolujeme fysice libovolně veliký úvěr ve směru příčin ještě neznámých.

V konstrukci 4. bodu harmonického úplnými čtyrrohy z paprsků světelných vidím takový kritický pokus, jakým jest zkoumání součtu úhlův v trojúhelníku pro geometrii Euklidovu.

Než se mohu obrátiti k experimentálním ověřením věty o trojúhelníku, musíme stručně přehlédnouti historii projektivní geometrie. Starší odborníci mínili, že není vůbec žádné souvislosti mezi geometrií Euklidovou a projektivikou. Nebylo ani zvykem, aby týž odborník pracoval v obojím směru. Myslím, že není náhodou, že to byl mladík tradicí nezatížený, jenž učinil průlom v domnělé přehradě mezi geometrii metrickou a projektivní. Laquerre dokázal r. 1853, že úhel elementární geometrie lze vyjádřiti dvojpoměrem dvou reálných paprsků, jež jej omezují, a dvou imaginárních paprsků, jež spojují vrchol jeho s imaginárními body kruhovými v nekonečnu.

Francouzská škola, k níž Laquerre sám náležel, dopracovala se pak čím dále tím určitěji k mínění, že metrické vlastnosti jsou projektivní vlastnosti, jež se vyjadřují o poměru útvarů studovaných k nekonečně vzdálené rovině a k imagináního kruhu, v němž každá koule tuto protíná. Ve Francii prorazilo toto mínění někdy kol r. 1860. V Německu se na mylném oddělení projektiviky od geometrie Euklidovy ještě setrvávalo.

Další krok ku předu učiněn byl v Anglii. Cayley a Sylvester vybudovali theorii invariantů, algebraické zevšeobecnění projektivní geometrie. V letech 50-tých uveřejnil Cayley ve Philosophical Transactions devět pojednání, v nichž tehdejší výsledky theorie invariantů shrnuje.

Šesté pojednání, jež vyšlo r. 1859, věnováno jest metrikám. Užívám slova toho v nezvyklém nám plurale s jistou úmyslností. Neboť Cayley neomezil se na analysu obvyklé metriky a její vklínění do projektiviky, jak učinili Laquerre a nástupci. Vybudoval si logickou stavbu, jež si všímala vlastností daného útvaru vůči pevně zvolenému útvaru 2 stupně. Tyto vlastnosti prohlásil za metrické vůči tomuto útvaru, poněvadž specialisací fundamentálního útvaru v kulový kruh dostaneme metriku obvyklou.

Co jsou to za nové metriky, jež dle myšlenkových konstrukcí Cayley-ho projektivika vedle metriky Euklidovy v sobě chová? Odpověď na tuto otázku dal r 1871/2 F. Klein ve dvou pojednáních. „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.“ Objevil, že třeba jen nepodstatné malé změny v definicích Cayley-ho, aby se nové jím objevené metriky ztotožnily s geometrií Lobačevského, po případě Riemannovou.

V této nepochybně krásné interpretaci algebraických prací Cayley-ových jest však jistá obtíž. Cayley-ovy úvahy náležejí do analytické geometrie. Ta se opírá o zavedení čísla měřením. Toto měření míníme po Euklidově způsobu. Jest obava, že se točíme v kruhu, když oklikou přes analytickou geometrii objevíme metriku Lobačevského a Riemannovu vyšedše od metriky Euklidovy. Tím vzniká zdání, že nové geometrie vznikají jen *„systematickým zneužíváním zvlášť k tomu účelu vynalezené terminologie"*.

Jinak by bylo, kdyby se podařilo zavésti číslo do projektiviky bez Euklidovského měření. Pak bychom ovšem postupujíce v šlépějích Cayley-ových objevili všechny metriky jako vůči projektivice stejněprávné. Nuže, samostatné vybudování projektiviky, samostatné zavedení čísla do geometrie, aniž by se užilo měření souřadnic v obvyklém slova smyslu, se podařilo.

Konstrukce 4-rohové, jíž se k třem daným bodům hledá čtvrtý harmonický, lze použíti ku očíslování bodů na přímce, aniž by se o měření v obvyklém slova smyslu zavadilo. Pak lze zavést souřadnice, čímž cesta k analytické geometrii jest volná. Myšlenku tuto nadhodil kdysi Staudt. Klein ji provedl a omezil se při konstrukcích svých dokonce vědomě na konečnou oblast prostorovou, aby úvahy jeho byly najisto na rovnoběžkovém axiomatě nezávislé.

Za logickou bezvadnost těchto theorií ručí algebra; vždyť náležejí analytické geometrii. Transientními na přírodu stávají se úvahy ty prostřednictvím Platonova axiomata, že paprsek světelný lze pokládati za realisaci přímky. Porovnáme-li však obsah projektivné geometrie s historicky se vyvinuvší geometrií Euklidovou, shledáváme, že jen část jejich vět má přírodopisný význam. To jest od toho, že vznik Euklidovy geometrie respektuje vedle existence *světelných paprsků* také existenci *tuhých těles.*

Pomocí paprsků světelných lze protínáním a promítáním realisovati projektivní transformace. Jinou v sobě uzavřenou skupinu transformací představují pohyby tuhých těles. Tyto transformace pokládají se za skupinu užší, skupinou všech projektivních transformací zahrnutou. Důvod toho nemůže býti logický, jest experimentální, jest v tom, že i rotační osa jest přímkou.

Všimněme si, že pravítko dělá se tak, aby vodivá hrana jeho, totiž ta, dle níž vedeme tužku chceme-li si pomocí pravítka zjednati přímku, byla osou rotační. Zda pravítko jest dobré, zkoumá se tím, že se obrátí, to jest otočí o 180°. Přiloží se ku koncům již udělané čáry a vedeme čáru znova. Obě tyto čáry musí se krýti, jinak jest pravítko nepotřebné.

Co to znamená, že takové pravítko dává mi přímku. Tím jest řečeno, že pomocí takového pravítka čtvrtý bod harmonický čtyrrohem Staudtovým stanovený jest nezávislý na individualitě použitého čtyrrohu. Je tím ale zároveň řečeno, že osa rotační souhlasí s paprskem světelným? Nikoliv, neboť právě rotací, kružidlem, lze realisovati ještě jiné „přímky“, které nesouhlasí s paprskem světelným. Jsou to kruhy a přímky jdoucí daným pevným bodem. I o nich platí Staudtova konstrukce čtyrrohová, — viz obr. 2. — jak lze dokázati inversí Euklidovského prostoru na dané kouli.*)

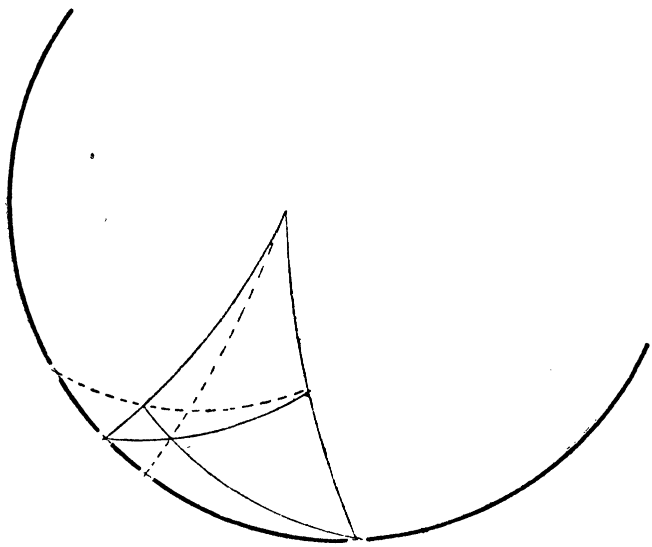
Vidím v tom experimentální fakt, že přímka pořízena osou rotační souhlasí s paprskem světelným, to jest, že vedle zkoumání pravítka rotací jeví se stejněprávným zkoumání pravítka vizírováním. Teprvé na základě tohoto fakta stává se skupina všech pošinutí a otočení tuhých těles podskupinou souhrnu všech transformací projektivních, realisovaných světelnými paprsky.

Pak musí však metrika, kterou nám existence tuhých těles zaručuje, býti jednou z metrik, jež metrika projektivní v sobě chová. Zda tuhá tělesa v přírodě se vyskytující realisují metriku Riemannovu, či Lobačevského neb společný přechodní případ obou, metriku Euklidovu: o tom musí rozhodnouti pokus.

Tyto přírodopisné pokusy se často chybně interpretují. Nejedná se při tom o zjištění logické bezvadnosti Euklidovy geometrie; tu si zabezpečujeme algebrou. Jde o to, jak dalece jsou immanentní věty geometrické transientní na tuhá tělesa a světelné paprsky. Že takové experimenty nejsou žádnou pošetilostí, za to nám ručí jména velkých mathematiků, kteří potřebu jejich uznávali. Jsou to: Bolyai, Gauss a Lobačevský, zakladatelé ne-euklidických studií.

*) Viz Encyklopädie der Elementarmathematik, Weber-Wellstein. Svazek II., r. 1905, str. 34 a násl. „Euklidische Geometrie im parabolischen Kugelgebüsche“.

Teprvé když jak paprsek světelný tak osu rotační v tuhém tělese prohlásíme za přímku, zúží se nám výběr mezi možnými náhradami geometrie Euklidovy na případ Riemannův a Lobačevského. Tím odpadají ohledy na geometrii ne-Archimedovskou, ne-Desarquesovu, ne-Pascalovskou, jichž konstrukcí se může geometr „baviti",*) popřev jiný postulát než větu o rovnoběžkách. Tyto immanentní myšlenkové konstrukce nemají takovou váhu jako geometrie Lobačevského a Riemannova. Geometrie



Obr. 2.

ty přecházejí totiž v oblasti velmi malé v geometrii Euklidovu. Jen takové geometrie lze v přírodních vědách potřebovati, poněvadž touto jejich vlastností jest vysvětleno, proč historicky se vyvinuvší geometrie jest právě Euklidova. Myšlenka, že geometrie náhradná musí se v nekonečně malé oblasti redukovati na Euklidovu, vyskytuje se nejprve u Gausse. V krátké poznámce své pozůstalosti sdílí, že rozšířením Euklidovy geometrie v nekonečně malém prostoru platící na konečnou oblast, dospěje

*) Jak praví francouzský mathematik Couturat ve spise o filosofických principiích mathematiky.

se buď ke geometrii Euklidově neb Lobačevského.*) Geometrii Riemannovu přehlédl Gauss, poněvadž mlčky pokládá přímku za nekonečnou.

Jest v povaze věci, že první kroky, jež učiníme ve směru experimentálního probádání geometrických vlastností tuhých těles, povedou nás k platnosti geometrie Euklidovy; jinak by tato geometrie ve starověku vůbec nebyla vznikla. Jde tedy nejprve o nalezení fakt, jež inspirovala starověké geometry, aby myšlenky jejich zabočily ve směru geometrie Euklidovy.

Již starý vykladač Euklida Proklus věděl, že Euklidův postulát rovnoběžkový jest rovnocenný s větou o součtu úhlů v trojúhelníku.**) Zaznamenal nám také, že Pythagorejci dokazovali zmíněnou větu pomocí rovnoběžky vedené vrcholem k základně. Ale to není původní, totiž historicky vzato, nejstarší důkaz, o němž víme. U pozdního spisovatele Eutokia z Askalonu (narozený asi r. 480 po Kr.) zachoval se nám zlomek pocházející od Gemina, jenž žil kol r. 77 po Kr. na Rhodu. Tento zajímavý zlomek osvětluje prvopočátky geometrie. Praví, že „staří pro každou formu trojúhelníka theorém dvou pravých dokazovali zvlášť, nejdříve pro stejnostranný, pak pro rovnoramenný a konečně pro obecný, kdežto pozdější dokazovali najednou obecný theorém: vnitřní úhly *každého* trojúhelníka rovnají se dvěma pravým.“

Poněvadž tento důkaz proveden byl Pythagorejci, zachycuje sdělení Geminovo stav geometrie za časů Thaleta Milétského (asi r. 624—548 př. Kr.). Nejdříve bylo součet $2R$ připisovati úhlům pravidelného trojúhelníka. Jak na to přišli? —

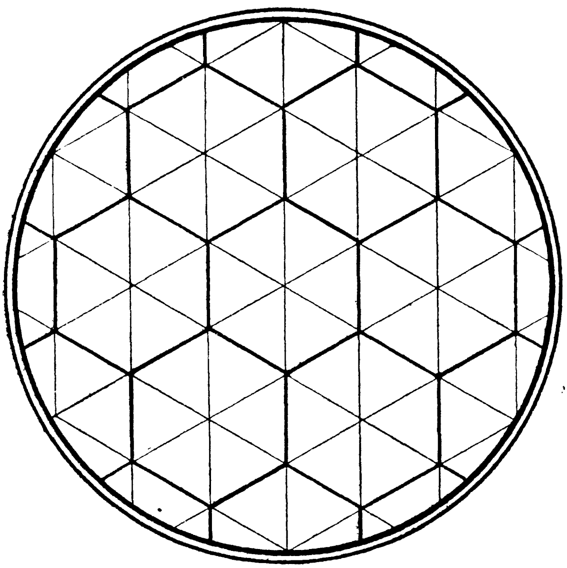
O tom již není zápisů, ale myslím, že věc bez velkého risika můžeme rekonstruovati. Dejme tomu, že někdo měl chodbu dlážděnou shodnými, pravidelnými trojúhelníky. Všimněme si, že shodnost cihel zaručena jest společným jejich původem z téže

*) Konstrukcí přírodopisně významných geometrií jakýmsi integračním processem z Euklidovy g. infinites. oboru zabývali se také C. Flye St.-Marie 1871 a J. De La Vallée Poussin 1895. Tak lze na př. z obyčejné trigonometrie infinitesimálních trojúhelníků vyintegrovati sferickou.

**) Zmínka se zajímavou poznámkou o t. zv. axiomatu Archimedově, přesněji Eudoxově, ve velké Teubnerově encyklopaedii mathematiky. Článek M. Zacharias, Elementargeometrie und el. nicht-Euklidische g. str. 865.

formy. Forma tato zaručuje také experimentem, že tři úhly na cihle jsou stejné, poněvadž každou cihlu lze trojím způsobem do formy vložiti. Kdo si jest stejnosti úhlů vědom a spoléhá na to, co chce, aby totiž podlaha trojúhelníky bez mezer byla pokryta, snadno vyčte z takového dláždění větu: součet tří úhlů v pravidelném trojúhelníku činí dva pravé. Viz obr. 3.

Předpoklad, že v 7. století př. Kr. takové mosaiky existovaly, není nijak odvážný. Větu zmíněnou lze vyčísti také z baby-

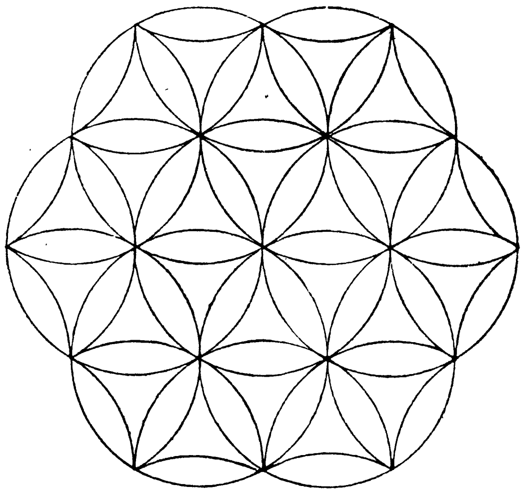


Obr. 3.

lonské mosaiky, jež pochází asi z r. 700 př. Kr., na obr. 4.*) Ostatně zaznamenal nám Proklus pythagorejskou větu, že rovina kol bodu úplně se vyplní šesti pravidelnými trojúhelníky, čtyřmi čtverci neb třemi pravidelnými šestiúhelníky, kterou vlastnost mají jen tři jmenované figury a žádné jiné. — Myslím, že zde původ věty abstrakcí ze zkušeností na mosaikách jest docela jasný. Téhož mínění jest na př. Mach a s ním zajisté ještě mnozí jiní.

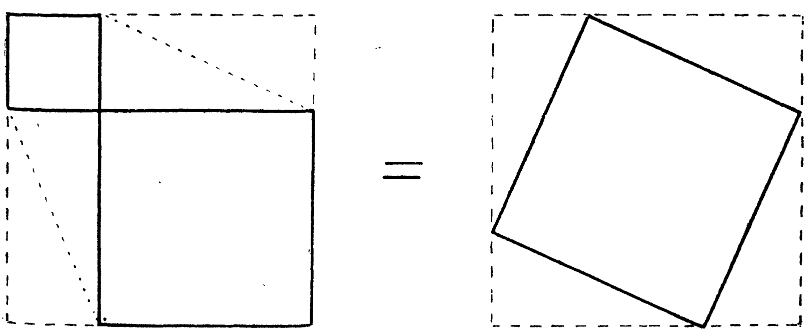
*) Vzata ze sešitu díla Die Kultur der Gegenwart, jejž H. G. Zeuthen věnoval mathematice ve starověku a středověku. Str. 28, obrazec 2.

Snad ještě starší jest znalost čtverečných mosaik. U Indů vznikly počátky geometrie z rituálních pravidel, jež známe pro-



Obr. 4.

střednictvím Sulba-suter, sice teprve ve 4.—5. stol. př. Kr. napsaných, ale obsahem mnohem starších. Veledůležitou záležitostí



Obr. 5.

bylo Indům pro jejich obětnictví, aby oltář, pořizovaný zpravidla z kvadratických cihel, přesně odpovídal předpisům. Nestalo-li se to, byla oběť pro boha urážkou. Zdá se, že Indové již ve století 8. př. Kr. vyčetli z kvadratického dláždění větu Pythagorovu prostřednictvím obr. 5.

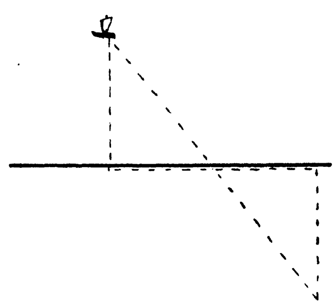
Čerpáme-li z těchto pozorování na dláždění trojúhelníky, čtverci neb šestiúhelníky větu, že tyto figury rovinu kol bodu úplně vyplňují, je tím zaručeno, že se geometrie Euklidova smí aplikovati na figury menší než jsou cihly, jimiž se dláždí. Tím ale není řečeno, že se smí tato geometrie použíti také na velké figury, na př. přes celou podlahu rýsované. K tomu třeba nových zkušeností, na př. věty, že i figura z 4, 9, 16 shodných trojúhelníků složená jest trojúhelník, což se musí zjistiti visírováním dle hran. Takovým způsobem lze si zajistiti právo na užívání Euklidovy geometrie uvnitř síně budovy.

Euklidova geometrie nebyla by všelidská, kdyby neplatila uvnitř každé budovy na povrchu země. Z toho ale nesmíme souditi, že platí také uvnitř tak veliké koule jako jest země sama. Divoši žijící na ostrovech Tichého Oceánu pořizují si zajímavé, dosti přesné mapy. Nákresna vzniká tím, že se těsně k sobě připoutají tenké hůlky. Nejdokonalejší jsou z ostrovů Marshallských. Tam naleznou se mapy, jež právě jako moderní evropské obsahují všechny ostrovy skupiny ve správných relativních polohách a velikostech. Tito divoši, kteří nevědí, že země jest koulí, zajisté si myslí: poněvadž se pro každou skupinu ostrovů dá pořiditi rovinná mapa, lze pořiditi rovinnou mapu v relativní poloze i velikosti ostrovů správnou i pro celý nesmírný Tichý Oceán. Tato myšlenka jest chybnou, poněvadž koule má sice v oblasti proti poloměru velmi malé vlastnosti roviny, ale nemá je jako celek, není na rovinu rozvinutelná. Podobnou chybu myšlenkovou by dělal ten, kdo z platnosti Euklidovy geometrie v každém domě by soudil na platnost pro veliké figury pnoucí se pod širým nebem od domu k domu. V každé sklenici vody v Evropě, Americe i Australii jest povrch přibližně rovinný, ale země sama rovinou není.

Veliké figury pnoucí se přes krajinu užívají od pradávna zeměměřiči. Musíme se nyní zabývati otázkou, zdali snad u těchto figur neobjevuje se již nedostatečná transience Euklidovy geometrie na přírodu.

Hned předem můžeme říci, že veliké úchylky čekati nelze. Jest totiž zeměměřičská konstrukce světelnými paprsky v přírozené velikosti starší než užívání zmenšených figur na nákresně. Řecké slovo geometrie značí přesně „zeměměřičství". Jestliže tedy geometrie při vzniku svém dala se inspirovati obrovskými světelnými figurami zeměměřičů, nebude se nikdo diviti, že theorie euklidovské jsou na zeměměřičství transientní.

Příkladem takových obrovských figur jsou Thaletova figura, jíž měřil výšku pyramidy pomocí jejího stínu, dále obrazec, jímž zjišťoval vzdálenost lodi od břehu. Myslím, že se tato vzdálenost skutečně na břehu vytyčila pomocí obr. 6. Římští agrimensoři měli pro určování šířky řeky takovým způsobem jméno „varatio fluminis". Tutéž methodu vynalezli si zajisté samo-



Obr. 6.

statně severoameričtí Indiáni, což jest zajímavým dokladem pro všelidskost zeměměřičství ve smyslu Bastianově.*)

Geometrický pokus ve smyslu častěji vyloženém učinil příležitostně Gauss,**) když se vyměřovalo království Hannoverské. Zkoumal větu o součtu úhlů v trojúhelníku. Tento byl dán triangulačními body na horách Broken, Inselberg a Hohenhagen, jež vzdáleny od sebe 69, 85, 197 *km*. Úhly stanovil Gauss pomocí heliotropů. Uvážíme li nedokonalost přístrojů, v nichž části, jež by měly býti tuhé, jsou přece jen byť i sebe méně pružné, uvážíme-li nedokonalost spojných paprsků, jež se lámou, byť

*) Viz Cantor, Geschichte der Mathematik. Svazek I., str. 502. — Simon, Gesch. der Math. 123. — Hoppe, Math. und Astr. im klassischen Altertum. 1911, str. 66.

**) Zmínka v § 28. Gaussových »Disquisitiones circa superficies curvas«.

i sebe méně procházejíce nestejně hustými vrstvami vzduchovými, nahlédneme, že při měření úhlů nevyjde součet jejich roven 180°. Ale takový nesouhlas nebude nikdo pokládati za projev nedostatečné transience Euklidovy geometrie na přírodu. Tu třeba nejprve rozboru, zda pozorované úchylky vybočují z hranic, jež známé nedokonalosti strojů a známé obtíže s paprsky světelnými nám kladou. Nuže, ani při měřeních Gaussových ani při pozdějších takových pracích*) neukázala se žádná úchylka, jež by vzbuzovala pochybnosti o užitelnosti geometrie Euklidovy při pracích zeměměřičských.

Máme tedy praktickou jistotu, že na figury měřící několik desítek kilometrů Euklidovu geometrii použíti smíme. Tím jest zaručeno, že teprve při užívání geometrie na větší figury astronomické mohly by se objeviti úchylky. Na takovou zkoušku geometrie pomýšlel nejdříve W. Bolyai, Lobačevský a Schweikart, jenž proto ne-euklidické geometrii říkal „astrální".**

W. Bolyai poznamenal, že astronomové při svých počtech opírají se o Euklidův axiom rovnoběžkový. Počty jejich se skutečností souhlasí. Z toho soudí, že i veliké figury astronomické pomocí geometrie Euklidovy zpracovati smíme a ovšem a fortiori menší figury pozemské. Tato poznámka Bolyai-ova zaručuje užitelnost Euklidovy geometrie v oblasti tak veliké jako jest soustava sluneční.***)

Ostřejšího vyjádření dostalo se myšlence Bolyai-ově tím, že Laplace připoutal platnost Euklidovy geometrie k zákonu Newtonovu o všeobecné tíži. Laplace sledoval jinou nit myšlenkovou vedoucí k Euklidově postulátu. Objevil ji J. Wallis†) (1616—1708). Euklidova geometrie jest zaručena, existuje-li ke

*) Dle citov. již přednášek Kleinových o ne-euklidické geometrii, díl I., str. 164.

**) Byl profesorem práv (1780—1859) a uveřejnil r. 1807 práci o theorii rovnoběžek. Později dopracoval se samostatně ke geometrii Lobačevského, o čemž Gaussovi r. 1818 dal zprávu prostřednictvím listu.

***) Vzato z Frischauf. „Elemente der absoluten Geometrie". 1876, str. 67.

†) De postulato quinto et definitione quinta lib. 6. Euklidis disceptatio geometrica. Operum mathematicorum volumen alterum, Oxford 1693, p. 665—678. Spis ten obsahuje dvě přednášky konané na universitě Oxfordské r. 1651 a r. 1663.

každé figuře podobná, to jest rovnoúhlá, zachovávající poměry stran. Pak lze totiž platnost Euklidovy geometrie z nekonečně malých figur přenésti na figury veliké. Stačí ostatně existence dvou podobných trojúhelníků, aby se ze serie metrik v obvyklé geometrii projektivní obsažených vyloučily všechny možnosti Riemannovy a Lobačevského.

Znovu upozornil na pojem podobnosti L. N. M. Carnot.*). Zdálo se mu, že podobnost jest něco tak samozřejmého jako shodnost, a chtěl ji proto učiniti východiskem theorie rovnoběžek.

Laplace jde dál než oba předchozí geometrové. Ti jen vyslovili svou víru v podobnost. Laplace hledá pro ni přírodopisné důvody. R. 1824**) vyslovil se, že Newtonův zákon pro jeho jednoduchost, obecnost a souhlas se skutečností platí přesně. Všiml si pak následující zajímavé konsekvence Newtonovy mechaniky nebeské. Kdyby se rozměry všech těles jejich vzájemné vzdálenosti a rychlosti v témž poměru zmenšily, opisovala by zmenšená soustava dráhy, jež by byly stejným zmenšením drah původní soustavy. Kdyby se tedy celý svět poznenáhla na sebe menší prostor smrskl, pozorovatel tohoto smrštění účastný by — dle Laplace — nic neznamenal. Zdálo by se mu, že svět jde dál svým normálním chodem. Pohled, který nám svět skýtá, jest tedy na absolutních rozměrech jeho nezávislý. Jen poměry délek lze zjistiti. Odtud přechází Laplace ku pojmu geometrické podobnosti, v níž vidí přirozenější postulát než v Euklidově axiomatu rovnoběžkovém. Shledává v pořádku, že ji v důsledcích nauky o gravitaci znova objevujeme.

Poněvadž nás význam pojmu podobnosti bude v dalším ještě důkladněji zaměstnávati, věnuji mechanické podobnosti trochu více místa, než by snad nyní bylo třeba.

Již v prvním spise mechanickém, v Aristotelových „Mechanických problémech“, obírá se týž prohnutím geometricky podobných tyčí dřevěných.***) Pevnost geometricky podobných válců proti lomu zkoumal Galilei. Myšlenky ty prohloubil

*) Géométrie de position. Paris 1808, p. 481; pod čarou.

**) Oeuvres t. VI., libre V., ch. V., p. 72.

***) Ve velké Teubnerově encyklopaedii mathematiky článek P. Stackel, „Elementare Dynamik“. Č. 8.

Newton.*) Newton zavedl pojem podobné hmotné soustavy. Dvě soustavy mechanické jsou si ve smyslu Newtonově podobny, když jsou si ve smyslu geometrie podobny, a když hmoty sobě příslušné jsou v témž poměru. Praví pak, že takové soustavy konají podobný pohyb, když body, jež si přísluší, opisují podobné dráhy v úměrných časech.

Dejme tomu, že ν-tý bod původní soustavy má v čas t souřadnice x_ν, y_ν, z_ν a hmotu m_ν. Tytéž veličiny pruhované přísluší druhé soustavě. Pak jest mechanická podobnost ve smyslu Newtonově dána relacemi:

$$\bar{x}_\nu = a x_\nu \qquad \bar{y}_\nu = a y_\nu \qquad \bar{z}_\nu = a z_\nu$$
$$\bar{m}_\nu = b m_\nu$$
$$\nu = 1, 2, \ldots n.$$
$$\bar{t} = ct.$$

Veličiny a, b, c jsou konstanty, jež na sobě nezávislé býti mohou, ale nemusí.

Differenciální rovnice pruhované soustavy zní

$$\bar{m}_\nu \bar{x}_\nu'' = \bar{X}_\nu \qquad \bar{m}_\nu \bar{y}_\nu'' = \bar{Y}_\nu \qquad \bar{m}_\nu \bar{z}_\nu'' = \bar{Z}_\nu$$
$$\nu = 1, 2, \ldots n.$$

Differenciální rovnice podobné soustavy, jež koná pohyb ve smyslu Newtonově podobný dostaneme, když do differenciálních rovnic zavedeme nové proměnné bez pruhů pomocí horní 5-tirozměrné affinity: **)

$$bm_\nu \frac{a}{c^2} x_\nu'' = \bar{X}_\nu, \quad bm_\nu \frac{a}{c^2} y_\nu'' = \bar{Y}_\nu, \quad bm_\nu \frac{a}{c^2} z_\nu'' = \bar{Z}_\nu.$$

Složky sil $\bar{X}_\nu$ $\bar{Y}_\nu$ $\bar{Z}_\nu$ myslíme si dány jako funkce času, souřadnic a rychlostí pruhovaných. V posledních relacích musí se arci eliminovat a nahraditi pomocí affinity naší veličinami bez pruhů.

Obecně mají rovnice transformované jinou formu než původní. Bude to zvláštní významná událost, jestliže se nám při transformaci zmíněné forma původních rovnic restituuje. Tím jest totiž řečeno, že týmiž prostředky, jimiž se realisuje sou-

*) Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Vyd. III. R. 1897, str. 159.

**) Poznámka Machova; viz místo citované.

stava pruhovaná, lze realisovati také soustavu zvětšenou. Nuže tento významný případ nastává právě u pohybů jen silám gravitačním podřízených, jak objevil Laplace.

Stručně si dokážeme tuto důležitou vlastnost pohybů nebeských vycházejíce od principu Hamiltonova. Zákony pohybů jen tíži všeobecné podléhající, lze stěsnati v relace:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\,[T + U] = 0,$$

kde

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{n} {}^{\nu}\, m_\nu \left({x'_\nu}^2 + {y'_\nu}^2 + {z'_\nu}^2\right),$$

$$U = \varkappa \sum \frac{m_\nu m_\mu}{r_{\nu\mu}};$$

$r_{\nu\mu}$ ve jmenovateli znamená vzdálenost ν-tého bodu od μ-tého; summace vztahuje se na všechny kombinace bodů po dvou.

Vztahujme tyto relace nejprve na soustavu pruhovanou. Transformace těchto výrazů bude záležeti v tom, že se každá délka nahradí a-násobkem, každá hmota b-násobkem a každý čas c-násobkem; právě následkem toho nahradí se každá rychlost hodnotou a/c-násobnou. Provedeme-li takto transformaci na veličinách T a U, dostaneme místo nich

$$\frac{ba^2}{c^2}\,T, \quad \frac{b^2}{a}\,U.$$

Součet $T + U$ nahradí se proto výrazem:

$$b\left(\frac{a^2}{c^2}T + \frac{b}{a}\,U\right).$$

Dosadíme do Hamiltonova principu a dostaneme pro druhou soustavu zkrátivše bezvýznamného stálého činitele a odstranivše zlomky

$$\delta \int_{t_0 : c}^{t_1 : c} dt\,[a^3 T + bc^2 U] = 0.$$

Poznamenali jsme již, že veličiny a, b, c nemusí býti na sobě nezávislé.*) Toho použijeme, aby variace transformovaného

*) Nauku o mechanické podobnosti s na sobě nezávislými konstantami vypracoval v zájmu theorie strojních modelů J. Bertrand r. 1847. Průhledný výklad těchto theorií obsahuje: Föppl, „Vorles. über technische Mechanik IV. Dynamik. Vyd. 3. R. 1909, str. 302.

integrálu Newtonovou transformací se restituovala. Uložíme třem konstantám zmíněným podmínku

$$a^3 = bc^2.$$

Pak se činitelé za integrálem vykrátí a objeví se podruhé integrál od něhož jsme vyšli. Divize libovolných hranic konstantou c jest ovšem bezvýznamnou.

Považujeme-li hmotné body za volné, jest tím Laplaceovo tvrzení dokázáno. Ale platí také, jsou-li body spojeny tuhými vazbami. Neboť je-li pro pruhovanou soustavu

$$\bar{r}_{\sigma\tau} = konst.,$$

jest pro druhou soustavu

$$r_{\sigma\tau} = \frac{konst.}{a}$$

tedy zase konstantou. Transformací restituuje se Hamiltonův integrál i vazby, tedy vše, na čem závisejí differenciální rovnice. Platí tedy zvětšovací věta Laplaceova i pokud pokládáme tělesa nebeská za tuhá neb tekutiny nestlačitelné, jak lze prokázati transformací podmínky pro virtuálné posuvy nestlačitelných tekutin.

Ze všech případů zachycených podmínkou

$$a^3 = bc^2$$

nejzajímavější jest ten, kde hustota hmotných bodů se nemění. Pak jest totiž

$$b = a^3,$$

poněvadž se hmoty transformují jako objemy. Spojíme-li novou podmínku se starou, dostaneme, že

$$c = 1,$$

to jest, zachová-li se při zvětšení hustota, konají obě soustavy podobné pohyby ve stejných časech.

Na tuto krásnou větu naráží patrně Laplace řka, že pozorovatel se světem sebou zmenšovaný nic by neznamenal. Zajisté musí pro něho olovo zůstati olovem a měď mědí. Kdybychom si pořídili zmenšený model soustavy slunce a země, zachovávající jejich hustoty a relativní rozměry, pak bychom jen zemi musili úderem uděliti příslušnou rychlost počáteční, aby model země běžel vlivem gravitačních sil — jimiž ho k sobě táhne model slunce — také jednou za rok v kruhu okolo.*) Tato věta, jež krásně illustruje nepatrnost sil gravitačních, vyčte se na základě předchozích úvah snadno též přímo z podmínky pro pohyb kruhový:

$$\varkappa \frac{M_\odot}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

Ještě jinou cestou lze připoutati naše vědění o přírodě ke geometrii Euklidově. Již klassický starověk věděl, že světlo slábne se čtvercem vzdálenosti. Vyslovena nalézá se věta tato poprve v Optice, jež Euklidovi se připisuje. Důkaz provedl roku 1604 Kepler. Nás zajímají však více theoretické úvahy, jež prováděl již v XIII. století Roger Bacon. Zabýval se obecně „specierum multiplicatione", což znamená v terminologii moderní slábnutí vektoru, jenž zachovává kontinuitu, ale vytryskuje z daného bodu. Úvahy Baconovy jsou správné. Duhem praví, že kdyby byl býval tak dobrým mathematikem, jakým dle jeho vlastních požadavků fysik býti má, byl by shledal, že jeho species slábnou kvadraticky se vzdáleností od pramene.

Nápodobme úvahy Rogera Bacona opírajíce se o platnost geometrie projektivní. Nejobecnější vzorec s naší projektivikou se srovnávající připisuje kouli s poloměrem r plochu

$$4\pi\, k^2\, sin^2 \frac{r}{k},$$

kde symbol sinx míněn jako zkratka za nekonečnou řadu

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Je-li k reálné, značí pak „sin" z trigonometrie známou funkci cyklickou a vzorec dává kouli Riemannovu.**) Je-li k imaginární, promění se hořejší řada v sinus hyperbolický a do-

*) Že tato věta není obecně známa, viz na př. Kraemer „Weltall und Menschheit", díl věnovaný Astronomii, str. 238. Vyvozuje se tam, že hustoty modelu α-krát menšího by musily být α-krát větší; autor — jehož si jako odborníka i člověka velice vážím — přehlédl, že v urychlení již jest ukryta délka, že má dimensi LT^{-2}.

**) Průhledné odvození tohoto vzorce obsahuje článek: Das Weltbild im Riemannschen Raume v 11. svazku Ostwaldových „Annalen der Naturphilosophie".

staneme plochu koule v geometrii Lobačevského.*) Je-li k nekonečné, dostaneme známý vzorec geometrie Euklidovy.

Užijme nyní hořejší projektivní**) vzorec k řešení problému Rogera Bacona. Bodovitý pramen vysílá stejnoměrně na všechy strany tok vektorový $4\pi E$. Proudění vektoru zachovává kontinuitu. Je-li velikost vektoru ve vzdálenosti r od pramene J, vystoupí plochou koule s poloměrem r také $4\pi E$, tak že

$$4\pi E = J \,.\, 4\pi k^2 \sin^2 \frac{r}{k}$$

z čeho

$$J = \frac{E}{k^2 \sin^2 \frac{r}{k}}.$$

To jest obecný, s naší projektivikou srovnatelný vzorec pro slábnutí *světla* i *tíže* se vzdáleností. Nyní stává se nám most mezi Euklidovou geometrií a Newtonovým zákonem takřka viditelným. Kvadrát ve jmenovateli Newtonova zákona pochází od plochy koule v geometrii Euklidově. Porovnáme-li Newtonův zákon s kvadrátem ve jmenovateli, jak se osvědčil v geometrii s horním projektivním vzorcem, vidíme, že souhlas nastane, když k jest nekonečné. To budeme opatrně interpretovati v ten smysl, že vzdálenosti interplanetární, v nichž se Newtonův zákon osvědčil, jsou velmi malé vůči reálné neb imaginární konstantě k. Máme tedy právo podložiti v praxi všem figurám uvnitř naší planetární soustavy geometrii Euklidovu.

Abychom methody k odhadu veličiny k, parametru prostoru, od Lobačevského a jiných vymyšlené co do ceny a významu mohli srovnati s poznámkou Laplaceovou, užijeme sdělení astronomů a fysiků o spolehlivosti Newtonova zákona k stanovení numerických hranic pro konstantu prostoru, jež svou dimensí, jak na vzorci pro kouli jest viděti, znamená délku.

Experimentálně pomocí točivých vážek zkoumal závislost tíže na vzdálenosti Mackenzie r. 1835. Shledal, že uchylky mezi

*) Vzorec ten nalezl asi nejprve Taurinus, jenž r. 1826 uveřejnil v Kolíně n. R. »Geometriae prima elementa.«

**) Pro takové vzorce s trojitým významem navrženo také označení »pangeometrické« — slovo pochází od Lobačevského. Ale vzorce ty jsou pangeometrickými jen v rámci projektiviky. Proto hořejší označení.

pozorováním a výpočtem ze zákona Newtonova jsou najisto menší než 1/500 celé přítažlivosti. Tyto pokusy — ač samy o sobě zajímavé — nemají však významu pro naše studie geometrické. Pro nás třeba zkoumati zákon Newtonův na obrazcích co jen možno velikých.

Práci tu provedl r. 1895 S. Newcomb. Uvádím jeho výsledky.*)

a) Pozorovaná parallaxa měsíční souhlasí přibližně s parallaxou počítanou z urychlení tíže na povrchu zemském. Tím jest 2 v r^2, jež stojí ve jmenovateli Newtonova zákona zaručena až na 1/5000 svého obnosu pokud r se drží mezi poloměrem zeměkoule a poloměrem dráhy měsíční.

b) Pozorované poruchy pohybu měsíčního pod vlivem přítažlivosti slunce souhlasí přibližně s hodnotami počítanými dle zákona Newtonova. Z toho plyne, že funkce r se stejným asi přiblížením platí až do vzdáleností, jež jsou tak veliké jako poloměr dráhy zemské, to jest 24000krát větších než poloměr zeměkoule.

c) Z platnosti třetího zákona Keplerova plyne platnost zákona Newtonova až k hranicím soustavy planetární, to jest asi na 20 poloměrů dráhy zemské. Přesnost, s jakou však pro tuto vzdálenost 2 v kvadrátu smíme pokládati za jistou, žel určitě udati nelze.

Volme za jednotku délky poloměr zeměkoule, tak že poloměr dráhy zemské:

$$a = 24.000.$$

Pak jest dle Newcomba, pokud r jde od 1 do 24.000, ve jmenovateli Newtonova zákona

$$r^{2\left(1 \pm \frac{1}{5000}\right)} = r^{2 \pm 0{\cdot}0004}$$

Tato funkce musí se v duchu našich úvah pokládati za přibližné vyjádření funkce

$$k^2 \sin^2 \frac{r}{k} = k^2 \left[\frac{r}{k} - \frac{1}{3!}\left(\frac{r}{k}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{r}{k}\right)^5 - \cdots\right]^2$$

*) Ve velké Teubnerově encyklopaedii mathematiky článek J. Zenneck, Gravitation, str. 41.

Porovnáme-li oba výrazy, dostaneme, že

$$\frac{2 \pm 0{\cdot}0004}{r} \doteq r^2 \left[1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{r}{k}\right)^2 + \dots\right]^2$$

Pro začáteční hodnotu

$$r = 1$$

jest tato přibližná relace splněna. Neboť z platnosti Euklidovy geometrie v soustavě planetární plyne, že vzdálenosti planet jsou maličké proti k. Zlomek z poloměru země a konstanty k jest teprve nepatrný, tak že se celá hranatá závorka stáhne na jednotku a rovnice naše praví, že $1 = 1$.

Positivních výsledků dospějeme, když za r dosadíme horní hranici, poloměr dráhy zemské „a". J nyní jest zlomek a/k maličký,*) tak že přibližně platí

$$\frac{2 \pm 0{\cdot}0004}{a} = a^2\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{k}\right)^2\right]$$

Zjednodušíme a dosadíme za a v levo numerickou hodnotu

$$\frac{\pm\, 0{\cdot}0004}{24.000} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{k}\right)^2$$

Levou stranu pomocí logarithmů vypočítáme a dostaneme

$$1 \pm 0{\cdot}0040 = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{k}\right)^2$$

z čeho

$$\left(\frac{k}{a}\right)^2 = \mp \frac{10.000}{120}$$

a dále

$$\frac{k_L}{a} = \frac{100}{11}\, i$$

$$\frac{k_R}{a} = 9{\cdot}01.$$

Jsou tedy minimální hodnoty, jež pro parametr prostoru udati můžeme, již 9krát větší než poloměr dráhy zemské.

Nepochybně jsou hodnoty pro k, jež jsme si z čísel Newcombe-ových zjednali, příliš malé. Již Newton věděl, že úchylka

---

*) Direktní důkaz z numerické hodnoty aberační konstanty a zatmění měsíců Jupiterových jest v článku »Das Weltbild im Lobacevskyschen Raume.« Ostwaldových »Annalen der Naturphilosophie«. Svazek XII.

v exponentu jeho zákona od dvojky způsobila by pohyby perihelia u každé planety. Takové pohyby perihelií, ač velice nepatrné, ale ze zákona Newtonova nevysvětlitelné, skutečně existují Největší jest tento zvláštní effekt u Merkura, kde činí $45'' \pm 5''$ za století. M. Hall*) pokusil se proto o zavedení mocniny $r^{2+\lambda}$, kterou také již G. Green r. 1835 se zabýval. Doplněk $\lambda = 16.10^{-8}$ ustanovil pomocí Merkura. Tím jest také anomální pohyb perihelia Martova vysvětlen. Pro Zemi a Venuši vycházejí však hodnoty příliš veliké.

Použitím Hallova doplňku λ lze podobným způsobem jako dříve vypočítati, že

$$\frac{k_L}{a} = 543\, i$$

tedy číslo asi 50-krát větší než dříve. Ale i to jest zajisté příliš maličké.

Jest totiž podezřelé, že úchylky od Newtonova zákona projevují se právě na Merkuru, na planetě, jež se pohybuje nejrychleji. Není tu na snadě myšlenka, že rozdíly jsou od toho, že na takový hbitý pohyb gravitační statiku Newtonovu již applikovati nesmíme? Po starších pokusech Levy-ových a Gerbertových, kteří připsali šíření gravitačních poruchů rychlost světla a dostali z pozměněného zákona Newtonova správně pohyb perihelia Merkurova,**) uvádím zejména, že Einstein 18. listopadu 1915 předložil královské pruské akademii věd pojednání: „Erklärung der Perihelbewegung des Merkurs aus der allgemeinen Relativitätstheorie“, kde udává vzorec pro pohyb perihelia, který pro Merkura dává 43″.

Nelze tedy z pohybu perihelia Merkurova dělati žádné úsudky o eventuálním zakřivení prostoru. Ostatně v ne-euklidickém prostoru vůbec perihelia planet vlivem gravitačního působení slunce se nepohybují.

Musím nyní vložiti několik slov o mechanice, neb raději hned o fysice ne-euklidické geometrie.

---

*) A. Hall, »A Suggestion in the Theory of Merkur.« Astr. Journal 14, pag. 45.

**) Viz v citovaném již článku encyklopaedie J. Zenneck, Gravitation odstavec III. Erweiterung des Newton'schen Gesetzes für bewegte Körper.

Kdyby skutečný prostor byl Euklidův, tak že geometrie Lobačevského a Riemannova staly by se jen immanentní myšlenkovou konstrukcí, bylo by zbytečno, ba nesmyslno uvažovati o tom, jaká by byla fysika, to jest příroda v takovém neexistujícím prostoru. Ale platnost geometrie Euklidovy by mohla býti illusí způsobenou vázaností naší do velmi maličké oblasti prostorové. Pak by i naše mechanika a fysika nesly na sobě stopy původu v nekonečně malé oblasti. Při úvahách fysikálních o velikých figurách neb pohybech bude pak třeba opatrnosti. Jen věty, jež jsou povahy differenciální, smí se beze všeho převzíti.*) Tak lze právě proto definovati kinetickou energii v rámci projektivní geometrie výrazem

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{n} m_\nu \left(\frac{ds_\nu}{dt}\right)^2$$

kde ds znamená ne-euklidický element délkový. — Dále lze převzíti ty věty fysikální, na nichž prostornost vůbec jest smazána, jako na př. v thermodynamice, kde počet parametrů soustavy jest neskonale důležitější než její třírozměrnost v prostoru. Jiná veledůležitá taková věta jest princip Hamiltonův

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \,(T + U) = 0,$$

který beze všeho lze převzíti.**)

V jiných větách, kde prostorový podíl není smazán a jež nelze pokládati za věty differenciální, třeba nejprve interpretace prostorového podílu a pak obezřelého přenesení v prostor ne-euklidický. Příklad takové úvahy dal jsem právě proto tak pečlivě a podrobně, když jsem vyšetřoval, proč světlo slábne se čtvercem vzdálenosti. Tu se nesmí mechanicky přenésti kvadrát

---

*) Dvě takové věty jsou na příklad základní myšlenky prvé a druhé serie rovnic Maxwellových. Proto lze beze všech obtíží pořídíti Maxwellovy rovnice pro Lobačevského neb Riemannův prostor. Provedl jsem tuto práci před lety, abych si zjistil zda snad odtud by nemohla vzniknouti námitka proti přímočarosti světelných paprsků. Publikovány byly jen úvahy o prostoru Lobačevského. Viz v tomto časopise »Rovnice Maxwellovy v prostoru Lobačevského.« Ročník XL., r. 1910.

**) Stran mechaniky v ne-euklidickém prostoru viz citované již přednášky Kleinovy sv. II., str. 203 a násl., kde uvedena literatura otázky.

do prostoru ne-euklidického. Nejprve se musí z kvadratického zákona vyabstrahovati kontinuita toku, ta se přenese do prostoru ne euklidického a tím teprve získáme vzorec pro slábnutí tíže se vzdáleností Integrací nalezeného výrazu, jenž má sin^2 ve jmenovateli, dostaneme pro gravitační potenciál vzorec

$$U = \frac{\mu}{k} \, cotg \, \frac{r}{k}.$$

V případě Riemannově jedná se o skutečnou kotangentu; v případě Lobačevského jest tato jen symbolem pro zlomek ze součtu a rozdílu exponenciel.*)

Na tomto základě lze si zodpověděti otázku, jaké jsou dráhy planet v prostoru Riemannově neb Lobačevského. Práci tuto provedl W. Killing v pojednání „Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen“, 1883.**) Přepočítal jsem úvahy Killingovy pokud se týkají planet a uznávám je za správné. Zůstane tedy první i druhá věta Keplerova zachována tak, že elipsy planet leží pevně v prostoru.

Čtenáře, jenž by se snad Killingovým pojednáním chtěl zabývati, upozorňuji, že se hemží chybami tiskovými, jichž nalezení není vždy lehké pro skočný způsob Killingových výkladů. Často nezbývá, než aby si člověk výsledek jeho vyvinul samostatně a pak jda po zpátku doplňoval a tiskové chyby odstraňoval. Problém dvou těles na př. je dán Hamiltonovým principem uvedeným již Scheringovým výrazem pro potenciál a výrazem pro kinetickou energii, jenž v polárních souřadnicích zní

$$T = \tfrac{1}{2} \left(r'^2 + k^2 \sin^2 \frac{r}{k} \cdot \varphi'^2 \right).$$

Převedení na kvadratury podaří se pomocí theoremu Liouville-ova,***) když učiníme činitele při φ' druhou souřadnicí místo r, vzdálenosti planety od slunce.

Na první pohled jsou výsledky naší námahy chudičké. Že se nepodařilo u nejvzdálenějších planet zjistiti nějakou úchylku od zákona Newtonova, zabezpečuje nám kvalitativní sdělení, že

*) Udal Schering r. 1870 pro Lobačevského prostor a r. 1873 také pro Riemannův případ.

**) Dole není o původu udáno víc než: Brilon, M. Friedländers Offizin.

***) Charlier, Die Mechanik des Himmels. Sv. I. R. 1912, str. 50 a 56.

eventuální absolutní hodnota parametru k měří na tisíce průměrů dráhy zemské. Velmi cenným stane se však objasnění poměru zákona Newtonova ke geometrii, všimneme-li si dvojhvězd a platnosti zákona Newtonova v jejich okolí.

Zavadili jsme touto poznámkou o t. zv. problém Villarceau-ův.*) Pozorováním jest zjištěno, že jedna dvojhvězda opisuje kol druhé elipsu. Plocha průvodičem opsaná jest sice úměrná času, ale hlavní hvězda nesedí v ohnisku dráhové elipsy. A. Yvon Villarceau ptal se pak po charakteru síly, jíž dvojhvězdy na sebe musí působiti, aby se nám takto na klenbu nebeskou promítaly. Ač úkol rozřešil, chopil se ho znovu J. Bertrand a obíral se jím v řadě publikací od r. 1873—1894. Ukázalo se pak, že síla, jež má býti jen funkcí vzdálenosti, musí býti buď této vzdálenosti přímo neb čtverci jejímu obráceně úměrná. V prvém případě by však hlavní hvězda stála vždy uprostřed elipsy dráhové, což není. Zbývá tedy jen druhý případ, to jest případ Newtonův. Ovšem jest eliptičnost dráhy následkem nedokonalosti měření dosti špatně zajištěna. Proto řekl r. 1893. Dunèr: „Dalo by se sotva odůvodniti, že nějaké posavadní stanovení drah by se mohlo uvésti jako potvrzení Newtonova zákona vně soustavy sluneční“. Ale Bertrand později problém rozšířil. Předpokládal jen, že dráha jest uzavřenou křivkou, když rychlost počáteční zůstane pod jistou hranicí. A přece zase dospěl k svým zákonům.**)

Poněvadž není nejmenšího důvodu, abychom dráhy dvojhvězd měli za spirály, pokládáme úvahy Bertrandovy za dostatečnou záruku pro platnost Newtonova zákona v okolí dvojhvězd. S Newtonovým zákonem platí však v okolí jejich také Euklidova geometrie.

Tím zdařil se nám v zájmu geometrie výpad do velikých vzdáleností interstellárních. Odvážíme se na základě zkušeností na dvojhvězdách myšlenky, že také v okolí dvojhvězd, to jest vůbec v okolí každého bodu ve vzdálenostech interstellárních, platí geometrie Euklidova Tím ovšem není řečeno, že také pro veliké figury světelné, pnoucí se od stálice k stálici,

*) Connaissance des temps pour 1852.

**) Literatura otázky viz v Teubnerově encyklopaedii mathematiky P. Stäckel, Elementare Dynamik, str. 499, pod čárou číslo 157.

platí geometrie Euklidova. Ale jest tím aspoň zaručeno, že platí o paprscích světelných geometrie projektivní, jest zaručena přímočarost světelných paprsků i na tratích mnoho světelných roků dlouhých. Podařilo se nám tedy rozepnouti oblast, ve které každý nekonečně malý obor vyhovuje geometrii Euklidově, až k stálicím. Prostor stellární astronomie budeme nyní ohledávati dál, abychom rozhodli, zda jemu jako celku nepatří snad metrika Riemannova neb Lobačevského, což neustále zůstává možností, s níž třeba počítati.

Studie tyto byly zahájeny již Lobačevským samotným. Znal jen dvě geometrie, Euklidovu a svou; proto předpokládal, že třeba jen hledati rozhodnutí mezi těmito dvěma Pokusil se o to applikací theorií o úhlu rovnoběžkovém na trojúhelník, v jehož rozích stojí slunce, země a nějaká stálice. Rozbor této práce a důsledky její ponechávám pro přednášku*) příští. Jen stručně podotýkám, že zajisté činí konstanta prostoru mnoho světelných roků, není-li vůbec nekonečná.

Věstník literární.

Recense knih.

*Sammlung Vieweg II.***) Mezi svazky 19. až 31., jež vydány byly v letech 1914., 15. a 16. pro čtenáře našeho »Časopisu« zajímavy a důležity jsou tyto:

21. Dr. *Bruno Glatzel*: ***Elektrische Methoden der Momentphotographie.*** Mit dem Bild des Verfassers und 51 Abbildungen. Sammlung Vieweg 21. Brunšvík 1915. Str. X+103, cena 3·60 M.

Dr. Bruno Glatzel, profesor vysoké školy technické v Berlíně, sestavil v zajímavém spise tomto přehled metod osvětlovacích, kterých užívá balistika při momentních fotografiích letících projektilů. Byl to vídeňský prof. Mach, který již v letech 70-tých století minulého upozornil ve zprávách vídeňské akademie, že lze měřiti rychlost šíření vln zvukových při explosích pomocí osvětlení elektrickými jiskrami; metody té uchopili se četní badatelé a hlavně zdokonalil ji Dr. C.

*) Článek ten určen byl za pokračování dvou již konaných přednášek »o geometrii se stanoviska věd přírodních«. Poněvadž jsem se však musil nechati zastupovat pro nenadálé onemocnění, ostýchal jsem se žádati kollegy o tutéž službu v zájmu své přednášky. Proto ji uveřejňuji jen tiskem.

**) O svazcích této sbírky fysikálního obsahu od 1. do 18. referováno bylo v ročníku XLV. tohoto časopisu na str. 66. až 78. a na str. 237. a 238.