Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Machovec

O počtu bodů, jimiž křivka n-ho řádu jest určena a o jejích bodech mnohonásobných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 5, 225--227

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122141

O počtu bodů, jimiž křivka n-ho řádu jest určena a o jejích bodech mnohonásobných.

Podává
František Machovec,
prof. v Karlíně.

Určení počtu bodů, jimiž křivka n-ho řádu jest určena, činí v geometrii polohy potud nesnáze, pokud nepřipouští se vyjádřiti křivku její rovnicí. Cremona a jeho stoupenci přemáhají tyto nesnáze předpokládajíce, že onen počet jest závislý *jen* na čísle n a že tedy zůstane týž i když křivka n-ho řádu přejde v n bodem procházejících přímek. A tu ještě vyšetřiti jest jim dříve, kolik jednoduchých podmínek zastupuje udání, že určitý bod má býti r-násobným bodem křivky n-ho řádu.

Ukáži v následujícím, jak lze určiti jinak

1. počet bodů potřebných k určení křivky n-ho řádu,

2. kolik jednoduchých podmínek zastupuje udání, že určitý bod jest r-násobným bodem křivky n-ho řádu.

K tomu užiji oné kvadratické transformace, jejíž hlavní zákony sestaveny byly ve článku „O křivkách třetího řádu obepsaných úplnému čtyřúhelníku atd.“ (Číslo 3. tohoto ročníku). První číslo označím $K(n)$ a druhé $B(r)$.

1. *a)* Budiž dána křivka C_n řádu n-ho, která má ve vrcholu A_1 společného polárného trojúhelníku kuželoseček svazku Σ bod $(n-2)$násobný a která mimo to jedním z ostatních dvou vrcholů onoho trojúhelníku, na př. vrcholem A_2, prochází.

S touto křivkou jest vzhledem k Σ sdružena křivka C_{n+1}, která má bod A_1 za $(n-1)$násobný, bod A_2 za dvojnásobný a která mimo to prochází vrcholem A_3.

Je-li pro křivku C_n kromě bodů již vytčených dáno ještě tolik bodů, kolik jest jich k jejímu určení nutno, bude body s nimi sdruženými a body dříve již vytčenými (A_1, A_2, A_3) určena i křivka C_{n+1}. Z toho jde rovnice

$$K(n) - B(n-2) - 1 = K(n+1) - B(n-1) - B(2) - 1$$

čili

$$K(n+1) - K(n) = B(n-1) - B(n-2) + B(2).$$

b) Je-li dána křivka C_{n-1}, která má v A_1 bod $(n-2)$násobný a která body A_2 a A_3 neprochází, jest s ní sdružena křivka C_n, která má bod A_1 za $(n-1)$násobný a která body A_2 a A_3 prochází. Z toho jest zřejma rovnice

$$K(n-1) - B(n-2) = K(n) - B(n-1) - 2,$$

čili

$$K(n) - K(n-1) = B(n-1) - B(n-2) + 2.$$

Odečtouce tuto rovnici od rovnice v *a*) vyšetřené, nabudeme

(I) $$K(n+1) - 2K(n) + K(n-1) = B(2) - 2.$$

2. *a*) Křivce řádu $(n+1)$-ho, která má body A_1 a A_2 za jednoduché a která bodem A_3 neprochází, přísluší vzhledem k Σ křivka řádu $2n$-ho, která má A_1 a A_2 za body n-násobné a bod A_3 za $(n-1)$násobný. Platí tudíž rovnice

$$K(n+1) - 2 = K(2n) - B(n-1) - 2B(n).$$

b) S křivkou řádu $(n+1)$-ho, která má bod A_1 za dvojnásobný a která body A_2 a A_3 neprochází, jest vzhledem k Σ sdružena křivka řádu $2n$-ho, která má v A_1 bod $(n+1)$násobný a v A_2 a A_3 body $(n-1)$násobné. Máme tudíž rovnici

$$K(n+1) - B(2) = K(2n) - B(n+1) - 2B(n-1).$$

Z posledních dvou rovnic odvodíme snadno

(II) $$B(n+1) - 2B(n) + B(n-1) = B(2) - 2.$$

V geometrii polohy určí se poměrně snadno $K(1) = 2$, $K(2) = 5$ a $K(3) = 9$. Vložíce tyto hodnoty do rovnice (I) pro $n = 2$, obdržíme $B(2) = 3$ a užitím této hodnoty obě rovnice nabudou tvaru

(I) $$K(n+1) - 2K(n) + K(n-1) = 1,$$

(II) $$B(n+1) - 2B(n) + B(n-1) = 1,\text{*)}$$

z nichž lze vypočísti postupně každé $K(n)$ a $B(n)$.

Z postupu tohoto jest patrno, že jsem sice předpokládal, že číslo $K(n)$ závisí jen na n, ale nebylo nutno vyšetřovati místo křivky n-ho řádu soustavu n přímek bodem procházejících. Uznávám, že toto odvození čísel $K(n)$ a $B(n)$ neuspokojí pěstitele ryze geom. polohy, za jichž hlavního zástupce pokládati sluší Reye, ale jest přece poněkud všeobecnější než Cremonovo. Mimo to lze správnosť a všeobecnosť rovnic (I) a (II) částečně

*) Jest patrno, že rovnice tyto souvisí s tou okolností, že po sobě jdoucí čísla $K(n)$ i $B(n)$ tvoří řadu arithmetickou druhého stupně. O počtu $P(n)$ určovacích bodů plochy n-ho řádu platí podobná rovnice totiž

$$P(n) - 3P(n-1) + 3P(n-2) - P(n-3) = 1.$$

kontrolovati tím, že podrobíme křivky C_n, C_{n-1} atd., vyskytující se v 1. a 2., jiným podmínkám, než jsme právě učinili a přesvědčíme se, že při vhodné volbě těchto podmínek dospějeme opět k rovnicím (I) a (II).

Podobným způsobem lze též určiti, kolik dvojných bodů může míti nejvýše křivka n-ho řádu.

Podotýkám ještě, že k odvození vět kvadratické transformace, jichž jsme tuto užili, dostačí znalost základních vět o svazku kuželoseček a definice křivky n-ho řádu, že totiž má s přímkou nejvýše n společných bodů.

O bicirkulární šestiřadce.

Podává **J. S. Vaněček**,
professor v Jičíně.

Jsou dány dvě dvouřadky *) O, M ve všeobecné poloze.

Na jedné z nich, O, vytkněme dva body a, b a spojme je s libovolným bodem o této křivky přímkami ao, bo. Přímka ao protíná dvouřadku M v bodě m. Tímto veďme přímku mn tak, aby tvořila s ao daný úhel α. Ta protíná bo v bodě n. Určeme místo N bodu n, když bod o probíhá dvouřadku O, a úhel α zůstává stálým.

Stanovme především, kolik bodů n místa N dostáváme přímo na libovolném paprsku bo. Přímka ao protíná M ve dvou bodech m, m_1. Každým z nich prochází jedna přímka tvořící s ao daný úhel α. Dostáváme tudíž na bo dva body n, n_1 místa N.

Hledejme nyní, kolikrát se dostane bod n do polohy b. K tomu cíli sestrojíme nad ab trojúhelník abm' tak, aby při při vrcholu m' byl výplňkový úhel α' daného úhlu α. Místem takového vrcholu m' je, jak známo, kružnice M', která má ab za tětivu. Když bod m' přijde na dvouřadku M, pak dřívější mn sjednocuje se s $m'b$ a protíná příslušný paprsek ob v bodě b. Takové polohy bodu m' dostaneme čtyry, neboť kružnice M'

---

*) Rčení „křivka čtvrtého řadu" je nahrazeno v tomto článku kratším „čtyřřadka." Zrovna tak místo slova „kuželosečka" užijeme „dvouřadka" neb „dvoutřídka" pro budoucnost, dle toho, jak na ni pohlížíme.