t. j. stopa plochy polární jest hypocykloida homothetická se stopou plochy tečen základní čáry šroubové.

V případě $R = 3r$ je tato hypocykloida vepsána kruhu poloměru

$$\frac{9 + 8c^2}{3} R.$$

O sestrojování tečen jistých křivek rovinných.

Píše **V. Láska.**

Rovnice přímky v souřadnicích nomografických zní

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = 1.$$

Prochází-li táž dvěma body $u_1 v_1$, $u_2 v_2$, pak platí vztah

$$\begin{vmatrix} u & v & uv \\ u_1 & v_1 & u_1 v_1 \\ u_2 & v_2 & u_2 v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Úseky a, b na osách U a V jsou tudíž

$$a = u_1 u_2 \frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - v_1 u_2}, \qquad b = v_1 v_2 \frac{u_2 - u_1}{v_1 u_2 - v_2 u_1}.$$

V limitě obdržíme dále pro úseky tangent

$$\left.\begin{aligned} t_a &= \frac{u^2 \dfrac{dv}{du}}{u \dfrac{dv}{du} - v} = \frac{dv}{d\left(\dfrac{v}{u}\right)} \\ t_b &= \frac{v^2 \dfrac{du}{dv}}{v \dfrac{du}{dv} - u} = \frac{du}{d\left(\dfrac{u}{v}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Pomocí těchto vzorců lze v některých případech snadno sestrojiti tečny křivek.

Prvým příkladem budiž *ellipsa*, jejíž rovnice jest

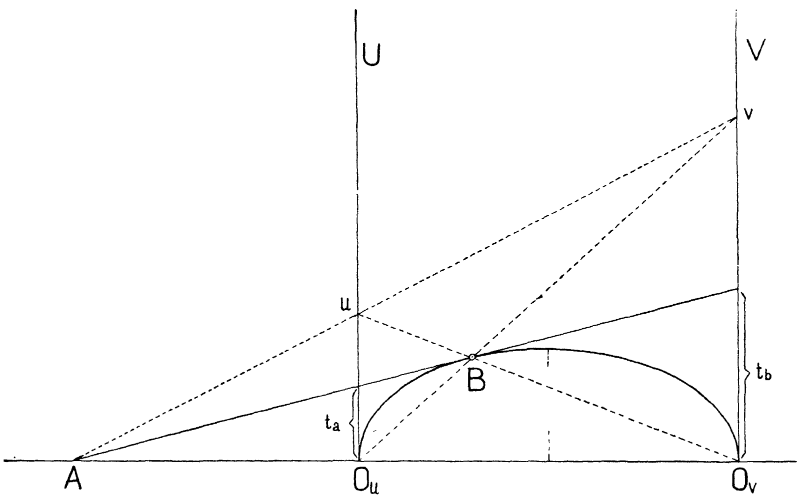
$$uv = c^2.$$

Ze vzorců (1) plyne

$$t_a = \frac{u}{2}, \quad t_b = \frac{v}{2}$$

a tím také sestrojení tečny podané na obr. 1., známé již ve starověku.

Tečnu rýsujeme, jak následuje. Spojme body u, v přímkou, která seče prodloužení $\overline{OuOv}$ v bodě A. Bod ten spojen s bodem B dá nám hledanou tečnu.



Obr. 1.

Pro hyperbolu

$$uv = -c^2$$

obdržíme podobně

$$t_a = \pm \frac{u}{2}, \quad t_b = \mp \frac{v}{2}.$$

Podobně lze sestrojiti tečnu *cissoidy*.

Rovnice cissoidy

$$y = x\sqrt{\frac{x}{D - x}}$$

přejde pomocí transformačních vzorců pro souřadnice nomografické

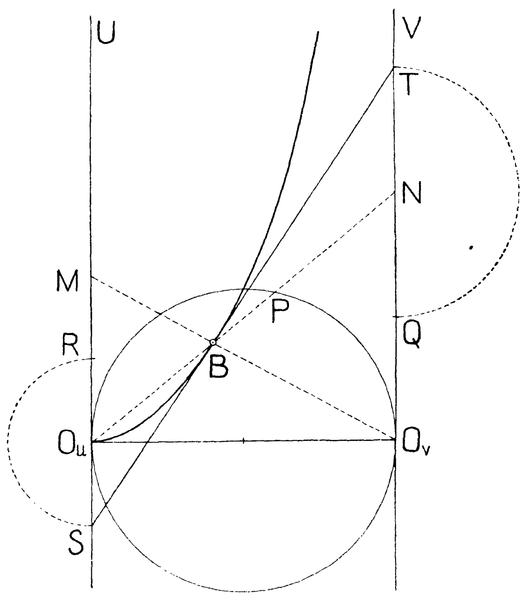
$$x = \frac{Du}{u+v}, \qquad y = \frac{uv}{u+v} \tag{2}$$

ve tvar

$$v^3 - D^2u = 0.\text{*)}$$

Z toho obdržíme

$$t_a = -\frac{u}{2}, \qquad t_b = +\frac{3}{2}v.$$



Obr. 2.

Cissoidu sestrojíme, jak známo, následujícím způsobem, (Viz obr. 2.) V koncových bodech O_u, O_v průměru kružnice rýsujme tečny a dále bodem O_u libovolnou přímku O_uN, která seče kružnici v bodě P. Učiníme-li $\overline{O_uB} = \overline{PN}$, bude B bodem cissoidy.

*) O významu tohoto tvaru viz poj. *F. London-a*: Die geometrischen Konstruktionen 3. und 4. Grades. V. Schlömilch's Zeitschrift, 1896, str. 148.

Nomografické jeho souřadnice jsou

$$u = \overline{O_u M}, \quad v = \overline{O_v N}.$$

Rozpůlíme-li tytéž souřadnice body R resp. Q a opíšeme-li poloměry $\overline{RO_u}$ resp $\overline{NQ}$ z bodů O_u resp. N kružnice, obdržíme body S resp. T, pro které platí vztahy

$$t_a = \overline{O_u S} = -\frac{u}{2}, \quad t_b = \overline{O_v T} = +\frac{3}{2} v.$$

Spojnice ST jest tudíž tečnou cissoidy v bodě B.

O správnosti konstrukce přesvědčíme se také přímo.

Platí totiž rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v + u}{2D} = \frac{3Dx^2 - 2x^3}{2y\,(D - x)^2}.$$

Jako třetí příklad uvedena budiž *versiera* *), která představuje hyperbolismus **) kuželosečky.

Budiž

$$uv = c^2$$

rovnice ellipsy a $\overline{O_v v} = v$ souřadnice libovolného jejího bodu B. (Viz obr. 3.)

Rýsujeme-li $\overline{BE} \perp \overline{O_u O_v}$ a $\overline{vB'} \parallel \overline{O_u O_v}$, jest průsečík B' obou přímek bodem *versiery elliptické* ***).

Nomografické souřadnice bodu B' buďtež $u'v'$.

Snadno se přesvědčíme, že platí vztahy

$$u' = u + v, \quad v' = \frac{v}{u}(u + v), \tag{3}$$

tak že platí zde

$$\frac{v'}{u'} = \frac{v}{u}. \tag{4}$$

K sestrojení tečny třeba znáti jednu z úseček; ku př. t'_b. Vzorec (1) dává

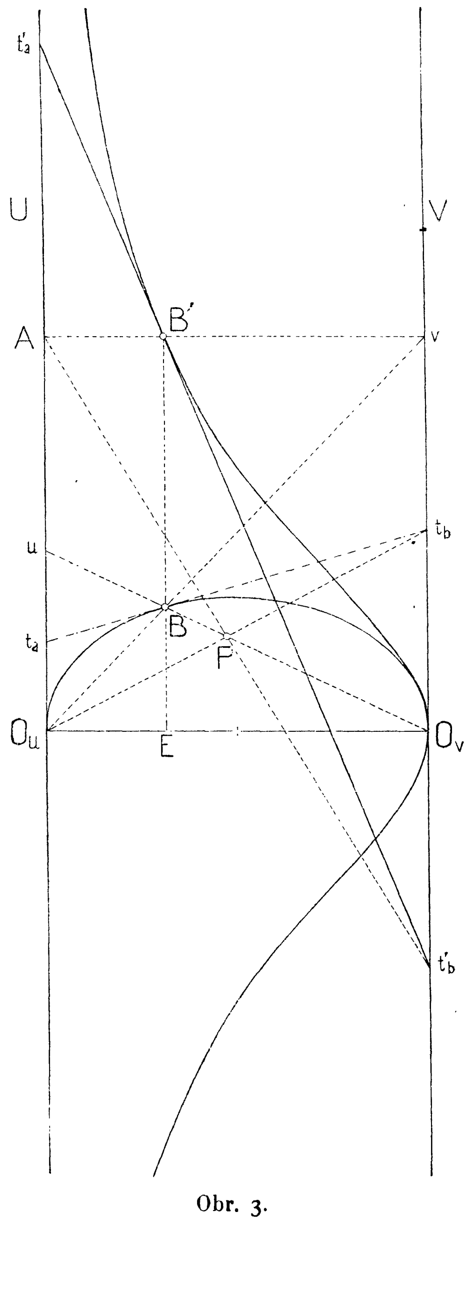
$$t'_b = \frac{du'}{d\left(\frac{u'}{v'}\right)}, \quad t_b = \frac{du}{d\left(\frac{u}{v}\right)}.$$

---

*) Srovnej: Článek p. *Suchardy* ve Věstníku král. čes. spol. nauk 1904 a *G. Loria*: Spezielle algebr. und transsc. Kurven, str. 78.

**) *G. Loria*, l. c. str. 20.

***) Viz *Doehlemann*, Geometrische Transformationen, II. díl, § 5.



Obr. 3.

S ohledem na rovnice (3) a (4) můžeme tudíž psáti

$$\frac{t'_b}{t_b} = \frac{du'}{du} = \frac{du + dv}{du} = 1 + \frac{dv}{du}.$$

Rovnice ellipsy

$$uv = c^2$$

dá nám dále

$$\frac{dv}{du} = -\frac{v}{u},$$

tím obdržíme konečně

$$\frac{u}{t_b} = \frac{u - v}{t'_b}. \tag{5}$$

Bod t'_b na ose V obdržíme, jak následuje (viz obr. 3.).

Rýsujme $\overline{vA} \parallel \overline{O_u O_v}$, načež bude

$$\overline{uA} = v - u.$$

Spojme dále O_v s u a O_u s t_b; tím obdržíme průsečík P. Týž spojen s bodem A určuje přímku, jež protíná osu V v hledaném bodě t_b'. Platí zde vztah (5) prve uvedený

$$\frac{u}{t_b} = \frac{v - u}{-t'_b}.$$

Konstrukce, ke které na základě úvah kinematických dospěl Sucharda (l. c.), určuje průsečík t'_a rovnicí

$$2v + t_a - t_b = t'_a.$$

O její správnosti snadno se přesvědčíme, vyjádříme-li veličiny t_a, t_b, t'_a dle svrchu uvedených vzorců jako funkce hodnot u a v.

Uvažujme dále křivku zvanou *conchoida punctata* o rovnici

$$y = x\sqrt{\frac{D - x}{D}}. \tag{6}$$

Tuto sestrojíme následovně. (Viz obr. 4.)

Rýsujme k libovolnému bodu P kružnice souřadnice u a v. Dále z bodu Ov přímku $\overline{O_v v_1} \parallel \overline{uv}$.

Nomografické souřadnice bodu B buďtež $u_1 v_1$.

Máme vztahy

$$uv = D^2,$$

$$v = v_1, \qquad u - v = u_1,$$

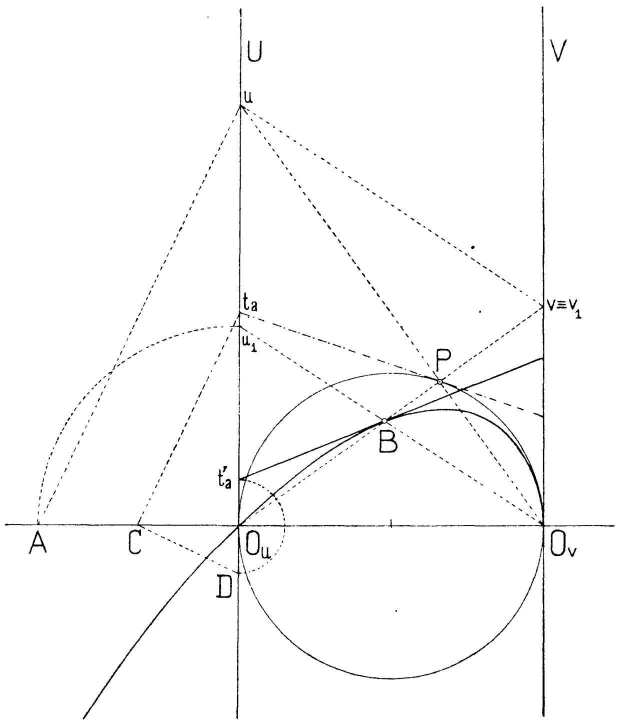
Rovnice křivky v souřadnicích nomografických jest

$$v_1\,(u_1 + v_1) = D^2,$$

neboť převedeme-li ji pomocí transformačních vzorců (2) do souřadnic pravoúhlých, obdržíme rovnici (6)

Zde obdržíme obdobným počtem jako při předešlém příkladě

$$t'_a = \left(\frac{u_1}{u}\right)^2 t_a. \qquad (7)$$



Obr. 4.

K sestrojení úseku t'_a rýsujme $\overline{O_u A} = \overline{O_u u_1} = u_1$ kolmo na osu U. Dále $\overline{t_a C} \,||\, \overline{uA}$, $\overline{CD} \perp \overline{t_a C}$. Pak jest $\overline{O_u D}$ hledanou délkou t'_a. Protože jest t_a v obraze kladné, musíme též t'_a nanésti kladným směrem na osu U, jak plyne z rovnice (7).

Na konec budiž uvedena všeobecnější věta.

Předpokládejme. že dovedeme ke křivce (uv) sestrojiti tečny, že tudíž známe úseky t_a, t_b.

Budiž dále $(u_1 v_1)$ nová křivka, jež s předešlou souvisí rovnicemi

$$uu_1 = a^2, \qquad vv_1 = b^2,$$

a jejíž tečna má úseky t'_a, t'_b, potom platí všeobecně

$$t'_a = \left(\frac{u_1}{a}\right)^2 t_a, \quad t'_b = \left(\frac{v_1}{b}\right)^2 t_b.$$

Tečnu tu lze tudíž snadno sestrojiti.

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních.

Napsal Dr. **Frant. Rádl.**

(Pokračování.)

6. Lineární parciální rovnici 2ho řádu o 2 neodvisle proměnných, kterou možná psát ve formě

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c jsou funkce x, y), nelze složit z úkonů $\frac{\partial z}{\partial x} + bz$, $\frac{\partial z}{\partial y} + az$, leč platí-li o koefficientu c jistá podmínka.

Laplace*) dal rovnici pro případ všeobecný, kdy tedy podmínka tato není splněna, tvar

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 - hz = 0, \; z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az, \text{ kde } h = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

Eliminací z obdržel transformovanou rovnici téhož tvaru

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1\frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1\frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0.$$

Tuto rovnici možná podobně přetvořiti na rovnici o koefficientech a_2, b_2, c_2, vzniklou opět atd., při čemž může konečně

*) Darboux, Surfaces t. II, p. 23 sq.