Josef Klíma

Deskriptivně geometrické řešení problému normál kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 1, 32--42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122124

z rovnic hořejších (2), tím obdržíme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^4}{a^2} \ldots \qquad (6)$$

křivky M_1.

Pokládáme-li $ae_1 = z$ za souřadnice $ee_1 = z$ bodu e v pravoúhlé soustavě souřadnic, jejíž osy jsou $o_1 a \equiv X$, $o_1 b \equiv Y$ a kolmice Z postavená v počátku o_1 na rovinu $(XY) \equiv \pi$ ellipsy K. Ježto přímka $en \| e_1 n_1$ a $mn \| m_1 n_1 \| \pi$, mají body m, n stejnou souřadnici z, tak že rovnice (4) značí válec hyperbolický, jeho podstavou na rovině $(XZ) \equiv \nu$ je hyperbola rovnicí (4) vyjádřená. Rovnice (5) přináleží hyp. paraboloidu, jehož útvary řídícími jsou osa Z, přímka A svírající se svým průmětem A_1 úhel $(A_1 A) = \alpha = 45^0$ a průmětna $(XY) \equiv \pi$. Rovnicemi (4) a (5) je tudíž stanovena křivka M, v níž plocha válcová (4) a hyperbolický paraboloid (5) navzájem se pronikají. Ježto rovnici (6) dostali jsme vyloučením souřadnice z z rovnic (4) a (5), značí ona průmět M_1 proniku M, jak bylo dříve geometricky ukázáno.

Podobně obdržíme křivku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^4}{a^4}$, je-li K hyperbolou.

Deskriptivně geometrické řešení problému normál kuželoseček.

Napsal **Josef Klíma**, assistent české techniky.

Prastarý tento bikvadratický problém má již skoro svoji vlastní literaturu. Řešení jeho nacházíme již v páté knize o kuželosečkách u *Appolonia*, a jeho řešení považováno v staré geometrii za jedno z nejlepších. On sestrojoval paty normál vedených z bodu ke kuželosečce pomocí hyperboly rovnoosé, později po něm nazvané, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny s osami dané kuželosečky a obsahuje střed této a daný bod. Avšak *de la Hire* (1640—1718) prvý ukázal, že paty hledaných normál dají se sestrojiti též použitím kružnice a dané kuželosečky vyrýsované. Jinou konstrukci použitím kružnice podává r. 1853 *Joachimsthal* [1]) pomocí dvou vět, jím nalezených, z nichž však jednu, jak

---

[1]) »Journal für reine und angewandte Mathematik« sv. 48.

podotýká později r. 1865 *Grunert*[1]), znal již *Fortunato Padula* v Neapoli. Ostatně nazývá Joachimsthal svou konstrukci předběžnou, ježto při sestrojení kružnice úlohu tu řešící druhá souřadnice středu této dána vzorcem. Prvá věta Joachimsthalova praví, že průsečíky kolmic k normálám téhož bodu, spuštěné s některého vrcholu *a* kuželosečky, s kuželosečkou samou, leží na kružnici. Druhá pak, že tečna kuželosečky v bodě, v němž ji kolmice s prve řečeného vrcholu k průměru, daný bod obsahující, protíná, je chordálou zmíněné kružnice a kružnice vrcholové kuželosečky vrchol *a* obsahující.

Na těchto větách zbudovaná řešení problému liší se jen v tom, že střed kružnice Joachimsthalovy sestrojen více méně jednodušeji. Tak Grunert činí v uvedeném pojednání, dále r 1870 *M. Painvain*[2]), téhož roku *Etienne Smith*[3]), jenž též věty ty dokázal poprvé syntheticky, r. 1876 a r. 1880 *Ed. Lucas*[4]). Jednoduchou cestou synthetickou odvozuje věty Joachimsthalovy a podává příslušnou konstrukci a některé její applikace r. 1882 dv. r. *Pelz*[5]). V roce 1885 řeší u nás tento problém dv. r. Šolín[6]) a sice uvažuje svazek kuželoseček určený danou ellipsou a Appoloniovou hyperbolou a převádí tento involutorní affinitou ve svazek, v němž vyskytuje se kružnice, jejíž střed a poloměr určuje vzorci, jež geometricky sestrojuje. Dva roky na to dv. r. *Pelz*[7]) zabývá se degenerací problému toho u ellipsy v problémy kvadratické řešitelné použitím jen pravítka a kružítka a dospívá k tomu, že problém ten dá se řešiti u ellipsy za těchto okol-

---

[1]) Ve svém archivu, 43. roč., v pojednání »Über die Aufgabe durch einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes Normalen an derselben zu ziehen.«

[2]) »Note sur la construction géométrique des normales à une conique«, »Nouvelles Annales«, 2 sv., IX. t.

[3]) »Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques«, F. Briochi e L. Cremona: »Annali di mathematica«, II. sv., III. t.

[4]) »Problème sur l'ellipse« a »Note sur la construction des normales à l'ellipse«, Nouvelles Annales, 2. sv., t. XV. a t. XIX.

[5]) »Zum Normalenproblem der Kegelschnitte«, Sitzungsberichte der Akademie in Wien.

[6]) »Kterak strojiti normály ellipsy bodem mimo křivku«, tento časopis roč. XV

[7]) »Zum Normalenproblem der Ellipse«, Sitzb. d. Ak. W.

ností pro body průměrů kolmých k oněm sdruženým průměrům, jež s osami ellipsy svírají tytéž úhly. Téhož roku uveřejňuje dv. r. *Pelz* [1]) řešení problému normál ellipsy uvažováním svazku kuželoseček stanovené ellipsou a Appoloniovou hyperbolou a affinní transformací jako dv. r. Šolín přichází ke kružnici, jež prochází transformovanými body k patám hledaných normál. Podává velice jednoduché sestrojení středu a poloměru kružnice té.

Pojednání dv. r. Pelze, týkající se degenerace problému tohoto v problémy kvadratické, dalo vznik celé řadě dalších prací, jež zabývají se tímto. Tu třeba jmenovati analytická pojednání od *Lauermanna* [2]), *Mertense* [3]), *Schoutea* [4]) a *Tesaře* [5]).

Roku 1902 zabývá se problémem tímto z jiného stanoviska *Weyr* [6]), jenž vychází z poznámky *Steiner-ovy*, že paty normál s bodu *p* ke křivce vedených leží též na křivce, v níž daná přejde nekonečně malým otočením kol bodu *p*, a stvrzuje výsledky dřívější.

Téhož roku prof. *Janisch* [7]) převádí sestrojení normál z bodu k středové kuželosečce na průsečíky přímky s plochou sborcenou 4-ho stupně, určenou danou kuželosečkou a přímkami rovnoběžnými s rovinou kuželosečky v rovinách kolmých k této rovině a jdoucí osami. Analyticky určuje degeneraci problému toho.

V roce následujícím zabývá se syntheticky problémem tímto prof. Dr. *Sobotka* [8]) ve dvou pojednáních, v nichž hlavně ukázáno, kdy degenerace v problémy kvadratické nastává.

---

[1]) Tamže »Zum Normalenproblem einer vollständig gezeichneten Ellipse«.

[2]) »Zum Normalenproblem der Ellipse«, Sitzungsberichte der Akademie in Wien. 1889. »Zum Normalenproblem der Hyperbel«, tamže r. 1898.

[3]) »Zum Normalenproblem der Kegelschnitte«, tamže r. 1889.

[4]) »Zum Normalenproblem der Kegelschnitte«, tamže r. 1889.

[5]) »Über ein Paar unicursale Degenierungscurven dritter Ordnung des Normalenproblems und das Normalenproblem einer confocalen Kegelschnittschaar«, tamže r. 1889.

[6]) »Zum Normalenproblem der Ellipse«, Věstník král. české spol. nauk 1902.

[7]) »Über das Normalenproblem der Kegelschnitte auf Grund räumlicher Betrachtungen«, Monatshefte für Math. u. Physik«, XIII. roč.

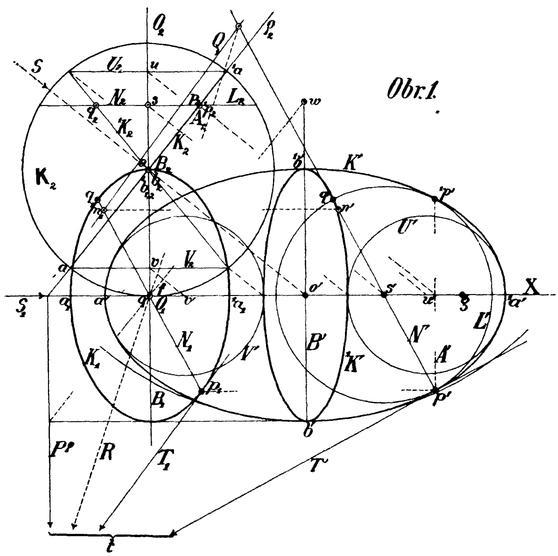
[8]) »Zum Normalenproblem der Kegelschnitte«, Sitzungsberichte der Akademie in Wien. »Zu den quadratischen Lösungen des Normalenproblems von Kegelschnitten«, Zprávy král. č. spol. nauk. 1903.

R. 1904 řešení dv r. Šolína analyticky provádí zvěčnělý prof. *V. Jung*[1]) a odvozuje novou konstrukci středu kružnice tam se vyskytující. Konečně r. 1906 ještě jedna práce problému toho se dotýká a to od *Stibitze*[2]).

Tím v hlavním vyčerpána literatura problému tohoto. V následujícím chci ukázati, jak problém tento dá se též řešiti methodami deskr. geometrie, předpokládáme-li, že daná kuželosečka není narýsována.

Ellipsa.

Budiž dána ellipsa K' (obr. 1.) o ose hlavní $\overline{a'^1a'} = 2a$ a vedlejší $\overline{b'^1b'} = 2b$, střed označme o' a ohniska buďtež f a g.



takže $\overline{o'f} = e$, lineárná to výstřednost. Ellipsou touto možno proložiti nekonečně mnoho rotačních kuželů, jichž vrcholy, jak známo, vyplňují hyperbolu v rovině jdoucí hlavní osou $\overline{a'^1a'}$

---

1) »Poznámka k problému normál u ellipsy«, tento časopis.

2) »Ein zum Normalenproblem der Ellipse gehöriger Satz und dessen konstruktive Verwendung«, Sitzb. d. A. in Wien.

kolmo k rovině dané ellipsy K' a jejíž vrcholy hlavní osy splývají s ohnisky f a g a ohniska její jsou ve vrcholech a', ${}^1a'$. Rovinu dané ellipsy K' volme za půdorysnu a rovinu této hyperboly za nárysnu. Mezi oněmi rotačními kužely jsou též dva rotační válce, jež lze ellipsou touto proložiti a jichž osy splývají s asymptotami jmenované hyperboly. Osa jednoho z nich je $\overline{oo'}$, kde $\overline{of} \perp \overline{a'{}^1a'}$ a $\overline{fo} = b$. Opíšeme-li kol středu o plochu kulovou **K** o poloměru $= b$ dotýkající se půdorysny tudíž v ohnisku f, tu dotýká se této onen válec rotační proložený ellipsou K' podél kružnice K v rovině $\varrho \perp \overline{oo'}$ a jejíž nárys je úsečka $\overline{a{}^1a}$. I lze nyní uvažovati ellipsu K' jako vržený stín na půdorysnu plochy kulové **K**, neb vržený stín meze vlastního stínu kružnice to K pro paprsek $S \equiv \overline{oo'}$. Mysleme si nyní na této ploše kulové libovolnou horizontální kružnici L o středu s. Pak patrně vržený stín této na půdorysnu L' kružnice to o středu s' a stejně velkého poloměru, dotýká se meze stínu vrženého plochy kulové t. j. ellipsy K' dvojnásob v bodech p' a ${}^1p'$ symetrických dle hlavní osy této, vržených to stínů bodů p a ${}^1p$ kružnice K a ležící na průsečnici A rovin kružnic K a L kolmé patrně k nárysně. I je patrno, že $N' \equiv \overline{s'p'}$ je normálou elllipsy K' v bodě p' a jeví se nám tato jako vržený stín přímky $N \equiv \overline{sp}$ rovnoběžné s půdorysnou, takže v prostoru je $N \parallel N'$ jakož i $\overline{sp} = \overline{s'p'}$, délce to normály bodu p'. Jeví se nám tedy též ellipsa K' jako obálka kružnic L' dvojnásobně se jí dotýkajících o středech na hlavní ose $\overline{a'{}^1a'}$, vržených to stínů kružnic horizontálních L plochy kulové **K**. Z nich ovšem některé dotýkají se ellipsy K' ve dvou imaginárných sdružených bodech. Rozhraními mezi těmito jsou kružnice křivosti V' a U' ve vrcholech a' a ${}^1a'$ dotýkající se ellipsy K' čtyřbodově a jež jsou vrženými stíny horizontálních kružnic V a U jdoucích vrcholy a a ${}^1a$. Označíme-li střed prvé v, tu vržený stín tohoto v' je středem křivosti ve vrcholu a' a příslušný poloměr křivosti $\overline{a'v'} = \overline{av}$ a ježto

$$\Delta\, avo \sim \Delta\, ofo' \text{ platí}$$
$$\overline{av} : \overline{ao} = \overline{of} : \overline{oo'} \text{ čili}$$
$$\overline{a'v'} : b = b : a,$$

z čehož vychází známý výraz pro poloměr křivosti $\overline{a'v'} = \dfrac{b^2}{a}$. Však přihlédněme k normálám ellipsy K', jež nás v dalším hlavně budou zajímati. Snadno dle předchozího nahlédneme, že normály ellipsy K' jsou vrženými stíny přímek rovnoběžných s půdorysnou, protínající kružnici K a průměr O plochy kulové kolmý k půdorysně ($O_1 \equiv f$). Přicházíme tudíž k zajímavému výsledku prostorové interpretace normál ellipsy K':

„Sestrojíme-li vržené stíny všech povrchových přímek přímého konoidu kruhového o útvarech řídících K, O a půdorysně směrem paprsku S, dostáváme souhrn všech normál ellipsy K'."

Již z tohoto lze učiniti některé důsledky pro normály ellipsy. Konoid tento je patrně stupně 4-tého a obsahuje nekonečně mnoho kuželoseček, jichž nárysy promítají se do úseček jdoucích nárysem B_2 dvojnásobné površky B konoidu kolmé k nárysně. Mezi těmito je obzvlášť též kružnice ${}^1K$ symetrická s kružnicí řídící K dle řídící přímky O. Sestrojíce vržený stín na půdorysnu této, ellipsu to ${}^1K'$, snadno nahlédneme správnost následující věty:

„Přeneseme-li délky normál ellipsy od průsečíků s hlavní osou směrem opačným, tu vyplňují body koncové takto obdržené ellipsu, jejíž jedna osa splývá s vedlejší osou dané ellipsy, druhá pak osa $= 2a - 4\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{2a^2 - 4b^2}{a} = \dfrac{2(e^2 - b^2)}{a}$."

Tak sestrojen bod q' ($\overline{s'q'} = \overline{s'p'}$) ležící na ${}^1K'$.

Sestrojme půdorys K_1 kružnice řídící konoidu K, tu patrně body p_1, půdorysy to bodů kružnice K_1 odpovídající patám p' normál ellipsy K', vyplňují ellipsu K_1. I dostáváme větu, ježto $\overline{o_1p_1} = \overline{s'p'}$:

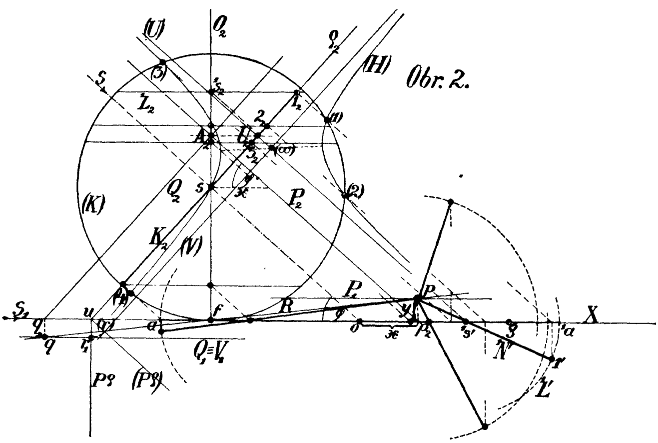
„Vedeme-li libovolným bodem v rovině ellipsy rovnoběžky se všemi normálami této co do velikosti i směru, vyplňují jich koncové body ellipsu, jejíž hlavní osa je rovnoběžna s vedlejší osou dané ellipsy a rovná se jí i co do délky, vedlejší osa pak je rovnoběžna s hlavní osou a $= \dfrac{2b^2}{a}$, *dvojnásobnému to poloměru křivosti ve vrcholu hlavní osy."*

Evoluta dané ellipsy K' dle našeho uvažování je mez, vrženého stínu konoidu zmíněného na půdorysnu. Toho možno též užíti k tomu: „sestrojiti střed křivosti ellipsy K' v některém jejím bodě p'." Tento je dotyčným bodem normály N' bodu p'

s evolutou a tudíž vrženým stínem bodu meze stínu vlastního na odpovědné površce N konoidu pro paprsek S. Rovina světelná touto površkou má půdorysnou stopu v N'. Konoid podél površky N nahradíme tečným hyperbolickým paraboloidem o útvarech řídících O, T (tečny to v bodě p ke kružnici K) a půdorysny co roviny řídící. Půdorysná stopa P^{ϱ} roviny ϱ je, jak známo, přímkou řídící ellipsy K' pro ohnisko f. Tečna T kružnice K má svůj vržený stín v tečně T' ellipsy K' v bodě p'. Kde nám tudíž tato protíná přímku řídící $P\varrho$, obdržíme půdorysný stopník t tečny T. Spojíme-li tento s ohniskem f, půdorysem to přímky řídící O, dostáváme půdorysnou stopu R uvažovaného tečného hyp. paraboloidu. Druhá rovina řídící tohoto je kolmá k půdorysně a rovnoběžna s půdorysem T_1 tečny T. Stopa roviny světelné N' protíná stopu R hyp. paraboloidu v půdorysném stopníku druhé površky Q ($Q_1 \parallel T_1$) tohoto, jež leží v rovině světelné přímky N. Půdorys Q_1 protíná půdorys $N_1 \parallel N'$ v půdorysu n_1 bodu meze stínu vlastního na površce N a jeho vržený stín n' je středem křivosti ellipsy K' v bodě p' ($\overline{n_1 n'} \parallel \overline{a'^1 a'}$). Konstrukce ta není sice nejjednodušší, ale neztrácí tím zajímavosti, ježto odvozena čistě prostorově. Obzvlášť dle tohoto dostáváme též střed křivosti w ve vrcholu vedlejší osy b', jako průsečík vedlejší osy se spojnicí ohniska f s průsečíkem vrcholové tečny v b' s řídící přímkou ellipsy P^{ϱ}.

Ještě jiné vlastnosti daly by se z tohoto prostorového nazírání na normály a evolutu ellipsy vyvoditi, ale přikročme k problému, jejž vytkli jsme si k řešení.

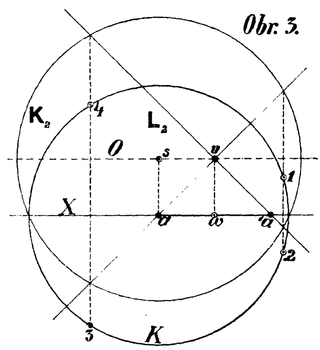
Nechť dána nenarýsovaná ellipsa E (obr. 2.) osou hlavní $\overline{a^1 a}$ a ohnisky f a g. Délky os a lineárná výstřednost označeny jako v předchozím. V rovině této dán bod p, z něhož máme vésti k dané ellipse normály. Uvažujme opět ellipsu E jako vržený stín na půdorysnu kružnice K na ploše kulové o středu s v nárysně ($\overline{sf} \perp \overline{a^1 a}$, $\overline{so} = a$, kde o značí střed ellipsy E, takže $\overline{sf} = b$) a poloměru $= b$ pro paprsek $S \equiv \overline{so}$. Je-li O svislý průměr této plochy kulové, tu normály ellipsy E jsou vrženými stíny površek přímého konoidu kruhového (O, K, π), kde π značí půdorysnu. Hledané normály jdoucí bodem p jsou tudíž vrženými stíny oněch površek konoidu toho, jež protínají paprsek $P \parallel S$ bodu p ($P_1 \parallel \overline{a^1 a}$). Bikvadratická úloha normál ellipsy přenesena tím do prostoru na sestrojení průsečíku přímky P s konoidem (O, K, π). Konoid ten je patrně stupně čtvrtého, ježto řídící přímka O neprotíná kružnici řídící K. Přímka P protíná tedy konoid ten obecně ve 4 bodech, takže dostáváme známý výsledek, že s bodu p lze vésti obecně 4 normály k ellipse. Bychom sestrojili průsečíky přímky P s konoidem tím, myslíme si touto přímkou a řídící přímkou O jakož i řídící rovinou π určen hyperb. paraboloid, určíme řez hyperbolický jeho s rovinou ϱ kružnice řídící K a společnými průsečíky kružnice K a hyperboly té procházejí ony površky konoidu



Obr. 2.

našeho, jichž vržené stíny dají hledané normály s bodu p. Určme řez H hyperb. paraboloidu (O, P, π) s rovinou ϱ. Řezem tímto je vždy rovnoosá hyperbola, nechť bod p je kdekoliv, ježto rovinami řídícími hyperb. paraboloidu toho jsou půdorysna π a nárysna, ježto jak O tak P jsou rovnoběžny s nárysnou a rovina ϱ protíná obě v přímkách k sobě kolmých jsouc kolma k nárysně, jež udávají nám směry asymptot rovnoosé hyperboly H. Asymptoty této určíme, stanovíce přímky obou osnov rovnoběžné s ϱ a vedeme-li jimi roviny rovnoběžné s příslušnými rovinami řídícími. Tyto pak protínají ϱ v asymptotách hyperboly H. Jednou takovou površkou je přímka A kolmá k nárysně $(A_2 \equiv O_2, P_2)$, jí proložená rovina rovnoběžná s π protíná ϱ v asymptotě U kolmé rovněž k nárysně. Druhá površka hyp. paraboloidu rovnoběžná s ϱ je Q (Q_2 prochází bodem A_2 rovnoběžně s ϱ_2, půdorysný její stopník q je na půdorysné stopě $B \equiv \overline{pf}$ hyp par. a a $Q_1 \parallel \overline{a^1a}$) a jí proložená rovina rovnoběžně s nárysnou, druhou ťo rovinou řídící. protíná ϱ v druhé asymptotě V, jež je rovnoběžna s nárysnou. Sklopme nyní ϱ do nárysny. Kružnice K přejde v (K), obrys to nárysný plochy kulové, asymptota (U) sklopené hyperboly (H) je kolma k ϱ_2 a druhá asymptota (V) je rovnoběžna s ϱ_2 ve vzdálenosti $\overline{u(r)} = \overline{ur} = \overline{q_2q}$. Z asymptot (U), (V) rovnoosé hyperboly (H) a bodu jejího s určíme osy této a vyrýsujeme ji. Průsečíky této s (K) nechť jsou (1), (2), (3) a (4). Patrno, že buď všechny čtyři jsou reálné, neb aspoň dva, a to vždy, ježto střed kružnice (K) leží na hyperbole (H). Zpětně odvodíme jich nárysy (v obr. provedeno to s příslušným popisem pro průsečík (1)), jimi procházejí rovnoběžně s půdorysnou povrchové kružnice plochy kulové, jejichž středů vržené stíny dají body na hlavní ose hledaných normál, paty jich odvodíme na vržených stínech příslušných kružnic jako v obr. 1. Zároveň máme tu kontrolu správného sestrojení, že musí vždy tři body, ku př. p, ${}^1s'$ a $1'$, býti na jedné přímce, normále to hledané. V obr. řešen případ, kdy všechny čtyři normály jsou reálné, t. j. když bod p leží uvnitř evoluty ellipsy E. Vidíme tu též prostorovým postupem stvrzeno, že k řešení úlohy bikvadratické třeba jednu kuželosečku rýsovati.

Dv. r. Pelz a pozdější auktoři zabývali se tím, kdy úloha tato bikvadratická degeneruje ve dvě úlohy kvadratické. Výsledek dv. r. Pelze obdržíme též velice jednoduše z našeho postupu. Jedná se jen o to, vyšetřiti ony případy, kdy průsečíky kružnice (K) s hyperb. rovnoosou (H) dají se určiti bez vyrýsování poslední. A to je tehdy, když střed kružnice (K) padne na osu, ovšem patrně v našem případě reálnou, hyperboly (H), ježto střed její s je bodem jejím. Mějmež (obr. 3.) rovnoosou hyperbolu o hlavní ose $\overline{a^1a}$ a kružnice K nechť má střed ve vrcholu a. Volen tu případ tak, jak se při našem řešení problému normál vyskytuje, ovšem že stejně vyšetřily by se průsečíky libovolné kružnice, jejíž střed by padl na osu obecné hyperboly. A sice nejsnáze určí se tyto též prostorovou interpretací, jak činí též dv. r. Pelz [1]). Hyperbolou rovnoosou proložíme rotační kužel rovnostranný **L** o vrcholu v ($\overline{wv} = \overline{aw}$, $\overline{vw} \perp \overline{a^1a}$) a ose $O \parallel a^1a$. Průmětny zvoleny tu jako dříve. Kružnicí K pak proložíme plochu kulovou **K**, jejíž střed s je na ose kužele. Obě tyto plochy protínají se ve dvou kružnicích, jichž roviny jsou kolmy k oběma průmětnám a které nám již na K vytyčují hledané průsečíky 1, 2, 3, 4. Úloha tedy vyžadující jen kružítka a pravítka.



Obr. 3.

Uvažujme nyní v obr. 2., že bod p v rovině ellipsy E se mění. Onen hyp. paraboloid, jehož jsme užili k vyšetření průsečíků přímky P s konoidem, protíná, jak výše podotknuto, rovinu ϱ v hyperbole rovnoosé, jejíž jedna asymptota je kolma k ϱ_2 a druhá je s ϱ_2 rovnoběžna. Odpovídá tudíž ∞^2 bodům p roviny ellipsy E takto síť rovnoosých hyperbol jdoucích pevným bodem s a těmitéž nekonečně vzdálenými body. Bod s je pro ∞^1 z těchto vrcholem, a ty odpovídají bodům roviny ellipsy, jichž problém normál rozpadá se v problémy kvadratické. By s byl vrcholem, třeba, by asymptoty (U) a (V) měly od něho stejné vzdálenosti. Označme souřadnice bodu p vzhledem k osám ellipsy $\overline{op_2} = x$, $\overline{pp_2} = y$, tu označíme-li $\sphericalangle fos = \varphi$,

[1]) »Zum Normalenproblem der Ellipse«, Sitzb. d. A. in Wien, sv. 95, str. 486.

vyplývá z obrazce

$$x = \overline{sA_2} \,.\, cotg\ \varphi$$

a z $\Delta\ sU_2A_2$ je

$$\overline{sA_2} = \overline{sU_2}\ cos\ \varphi, \text{ takže}$$

$$x = \overline{sU_2} \,.\, \frac{cos^2\ \varphi}{sin\ \varphi}. \tag{1}$$

Dále, ježto

$$\Delta\ pp_2f \sim \Delta\ qq_2f$$

dostáváme

$$y : \overline{p_2f} = \overline{qq_2} : \overline{q_2f}.$$

Z $\Delta\ p_2fA_2$ je $\overline{p_2f} = \overline{fA_2} \,.\, cotg\ \varphi$ a z $\Delta\ q_2fA_2$ je

$$\overline{q_2f} = \overline{fA_2}\ tg\ \varphi$$

dosazením do poslední úměry

$$y = \overline{qq_2} \,.\, \frac{cotg\ \varphi}{tg\ \varphi} = \overline{qq_2} \,.\, cotg^2\ \varphi. \tag{2}$$

Patrně $\overline{sU_2}$ a $\overline{qq_2}$ udávají nám vzdálenosti asymptot (U) a (V) od středu s a tyto se mají sobě rovnati, proto dělením rovnic (1) a (2) za předpokladu $\overline{sU_2} = \overline{qq_2}$ vychází

$$\frac{x}{y} = sin\ \varphi$$

avšak z $\Delta\ sof$ je $sin\ \varphi = \frac{b}{a}$, takže

$$y = x \,.\, \frac{a}{b}$$

což je rovnice průměru dané ellipsy E kolmého ku průměru, jenž svírá s osou týž úhel jako jeho přidružený. Totéž platí ovšem též pro přímku souměrnou dle osy X. Zvolíme-li tudíž bod p na těchto přímkách, pak průsek onoho pomocného hyperb. paraboloidu s rovinou ϱ je rovnoosá hyperbola, jejíž jeden hlavní vrchol je ve středu s kružnice (K) a proto dle obr. 3. dají se jich průsečíky sestrojiti použitím jen pravítka a kružítka, čili pro body ty problém normál rozpadá se v problémy kvadratické.

Ovšem že též pro body hlavní osy ellipsy jakož i k vedení normál z úběžného bodu dalo by se našeho prostorového postupu užíti, což netřeba prováděti. (Dokončení.)