Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Rádl

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 1, 20--28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122120

Na konec budiž uvedena všeobecnější věta.

Předpokládejme, že dovedeme ke křivce (uv) sestrojiti tečny, že tudíž známe úseky t_a, t_b.

Budiž dále $(u_1 v_1)$ nová křivka, jež s předešlou souvisí rovnicemi

$$u u_1 = a^2, \qquad v v_1 = b^2,$$

a jejíž tečna má úseky t'_a, t'_b, potom platí všeobecně

$$t'_a = \left(\frac{u_1}{a}\right)^2 t_a, \quad t'_b = \left(\frac{v_1}{b}\right)^2 t_b.$$

Tečnu tu lze tudíž snadno sestrojiti.

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních.

Napsal Dr. **Frant. Rádl.**

(Pokračování.)

6. Lineární parciální rovnici 2ho řádu o 2 neodvisle proměnných, kterou možná psát ve formě

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c jsou funkce x, y), nelze složit z úkonů $\frac{\partial z}{\partial x} + bz$, $\frac{\partial z}{\partial y} + az$, leč platí-li o koefficientu c jistá podmínka.

Laplace*) dal rovnici pro případ všeobecný, kdy tedy podmínka tato není splněna, tvar

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 - hz = 0, \; z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az, \text{ kde } h = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

Eliminací z obdržel transformovanou rovnici téhož tvaru

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1\frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1\frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0.$$

Tuto rovnici možná podobně přetvořiti na rovnici o koefficientech a_2, b_2, c_2, vzniklou opět atd., při čemž může konečně

---

*) Darboux, Surfaces t. II, p. 23 sq.

nastati případ, že v jisté rovnici transformované o koefficientech a_s, b_s, c_s činitel c_s hoví oné podmínce. Pak lze integrovati quadraturou tuto rovnici, čímž řešeny všechny předcházející, tedy i rovnice daná

Poněvadž danou rovnici lze též psáti ve tvaru

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} + az_1 - kz = 0,\ z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + bz, \text{ je-li } k = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c,$$

lze obdržeti novou řadu rovnic, z nichž konečně jednu, tedy i všechny předcházející lze po případě integrovati.

Tuto t. zv. „*kaskádní*" methodu Laplaceovu lze upraviti též pro lineární differenciální rovnice obyčejné a sice řádu libovolného, což jest v následujícím vyloženo.

7. Především lineární rovnice obyčejná 2ho řádu

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{14}$$

vzniká z úkonů $y' + ay$, y', je-li $q = p'$;. úkony ty za sebou užity dávají totiž, položíme-li výsledek rovným nulle, $y' + ay' + a'y = 0$. Pak lze rovnici (14) integrovati, a řešení zní

$$y = c_1 e^{-\int a dx} \cdot \int e^{\int a dx} + c_2 e^{-\int a dx}.$$

Neplatí-li však o q podmínka tato, možná rovnici (14) psáti ve tvaru

$$y' + ay' + (a' - h)\, y = 0 \tag{15}$$

čili $y'_1 - hy = 0$, $y_1 = y' + ay$, kde $a = p$, $h = a' - q$. Eliminací y z prvních dvou relací obdržíme rovnici tvaru (14)

$$y''_1 + p_1 y'_1 + q_1 y_1 = 0 \text{ čili o tvaru (15)}$$

$$y''_1 + a_1 y'_1 + (a'_1 - h_1)\, y_1 = 0, \tag{16}$$

kde jednak $a_1 = p_1$, $h_1 = a'_1 - q_1$, jednak

$$a_1 = a - \frac{h'}{h},\quad h_1 = a' + h - \frac{d^2(lh)}{dx^2}.$$

Jest patrné, že může se státi, že $h_1 = 0$. Pak lze obdržeti řešení y_1 rovnice (16) pouhou quadraturou, a integrál y rovnice (14) udává relace $y = \frac{y'_1}{h}$.

Jako poznámka budiž připomenuto, že nahradíme-li v rovnici (14) zy za y, kde z jest jistá funkce x, obdržíme

$$y'' + \left(p + 2\frac{z'}{z}\right) y' + \left(q + p\frac{z'}{z} + \frac{z''}{z}\right) y = 0;$$

porovnáním s (16) plyne

$$a_1 = p + 2\frac{z'}{z},\ h_1 = p' - q + \frac{z''}{z} - 2\left(\frac{z'}{z}\right)^2 - p\frac{z'}{z};$$

existuje tedy funkce z, která činí $h_1 = 0$, avšak její nalezení činí větší obtíže než řešení dané rovnice. U diff. rovnice parc. jest při této substituci, jak známo, $h_1 = h$. Rovněž substituce e^{zy} za y nevede k cíli.

Je-li $h_1 \neq 0$, lze rovnici (16) psát ve tvaru

$$y'_2 - h_1 y_1 = 0,\ y_2 = y'_1 + a_1 y_1;$$

eliminací y_1 obdržíme opět rovnici tvaru (14) a tak pokračujeme až na př. $h_s = 0$; a_s, h_s lze stanoviti posloupně z a_1, h_1. Pak lze poslední transformovanou rovnici, tedy i rovnici (14) řešiti quadraturou.

Transformace této lze užíti i u rovnice řádu n-ho; důkaz je v předešlém zahrnut. Neboť (14) můžeme považovati za rovnici řádu n-ho, když do úkonu $y' + ay$, pomocí něhož jsme ji utvořili, dosadíme za y differenciální úkon řádu n-2ho

$$y^{n-2} + r_{n-3}\, y^{n-3} + \ldots + r_0 y.$$

Dána-li rovnice řádu n-ho

$$y^n + p_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + p_0 y = 0,$$

nutno ovšem naznačený postup provésti. Vzhledem k operaci vzniklé z úkonů posloupně užitých

$$y^{n-1} + q_{n-2}\, y^{n-2} + \ldots + q_0 y,\ y'$$

možná danou rovnici psáti ve tvaru

$$y^n + q_{n-2}\, y^{n-1} + (q'_{n-2} + q_{n-3})\, y^{n-2} + \ldots + (q'_1 + q_0)\, y' + (q'_0 - h)\, y = 0$$

čili

$$y'_1 - hy = 0,\ y_1 = y^{n-1} + q_{n-2}\, y^{n-2} + \ldots + q_0 y.$$

Eliminací y obdržíme rovnici transformovanou a příslušné h_1, které se může rovnati nulle atd.

Aby byl uveden příklad praktický, v rovnici

$$y'' + (3x + 5)\, y' + 9y = 0$$

jest

$$a = 3x + 5 = a_1 = a_2,\ h = -6\,;\ h_1 = -3,\ h_2 = 0;$$

dvojnásobná transformace dá tedy rovnici

$$y''_2 + (3x + 5)\, y'_2 + 3y_2 = 0$$

o integrálu

$$y_2 = c_2 e^{-M} . \int e^M dx + c_1 e^{-M}, \quad \text{kde } M = \frac{3}{2} x^2 + 5x\,;$$

poněvadž

$$y = \frac{y''_2}{hh_1}$$

jest řešení původní rovnice

$$y = c_2 \left\{ [(3x + 5)^2 - 3]\, e^{-M}. \int e^M dx - (3x + 5) \right\} +$$
$$c_1 \, [(3x + 5)^2 - 3]\, e^{-M}.$$

Všeobecněji v rovnici

$$y^n + (p_{n-1} x + q_{n-1})\, y^{n-1} + \ldots + (p_1 x + q_1)\, y + q_0 y = 0$$

buďtež p_{n-1}, $q_{n-1}, \ldots, q_1$ libovolné stálé; o stálé q_0 však předpokládejme, že jest možná jí dáti tvar $p_1\,(1 + s)$, kde s jest číslo celistvé, nechtějíce vyšetřovati správnost transformace o lomeném indexu s. Pak lze provedením s transformací převésti integraci této rovnice na řešení rovnice o stupeň nižší.

$$y^{n-1} + (p_{n-1} x + q_{n-1}) y^{n-2} + (p_{n-2} x + q_{n-2} - \overline{s-1}\, p_{n-1})$$
$$y^{n-3} + \ldots + (p_1\, x + q_1 - \overline{s-1}\, p_2)\, y = c,$$

kde c jest integrační konstanta.

8. Transformaci tuto lze provésti ještě jiným způsobem.

Poněvadž úkony ay, y'' dávají výraz $ay'' + 2a'y' + a''y$, lze rovnici $ay'' + by' + cy = 0$ psáti ve tvaru

$$ay'' + (2a' - h)\, y' + (a'' - k)\, y = 0,$$

kde

$$h = 2a' - b,\ k = a'' - c,$$

čili ve tvaru

$$y''_1 - hy' - ky = 0,\ y_1 = ay\,;$$

poněvadž

$$y = e^{-\int \frac{k}{h} dx} \cdot \int e^{\int \frac{k}{h} dx} \frac{y'_1}{h} dx + c e^{-\int \frac{k}{h} dx},$$

obdržíme eliminací y rovnici

$$a_1 y''_1 + (2a'_1 - h_1) y'_1 + (a''_1 - k_1) y_1 = 0,$$

kde $\quad a_1 = a, \ h_1 = 2a' + h, \ k_1 = a'' - h\frac{a'}{a} - k.$

Opakujeme-li tuto transformaci s-krát, může se státi, že současně $h_s = k_s = 0$; pak lze poslední transformovanou rovnici, tedy i původní integrovati quadraturou.

Pro rovnice řádu vyššího než 2ho koefficient prvního členu pokládejme rovným 1. Poněvadž úkony $y' + ay$, y'' dávají operaci $y''' + ay'' + 2a'y' + a''y$, možná rovnici 3ho řádu

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0 \tag{17}$$

psáti ve tvaru

$$y''' + ay'' + (2a' - h) y' + (a'' - k) y = 0 \tag{18}$$

kde $\quad a = p, \ h = 2a' - q, \ k = a'' - r.$

Je-li $h = k = 0$, lze rovnici integrovati pouhou quadraturou a integrál zní

$$y = e^{-\int a dx} \cdot \int (c_3 x + c_2) e^{\int a dx} + c_1 e^{-\int a dx}.$$

Není-li současně h, k rovno nulle, pišme (18) ve tvaru

$$y''_1 - hy' - ky = 0, \ y_1 = y' + ay;$$

první relace dává pro y hodnotu

$$y = e^{-\int \frac{k}{h} dx} \cdot \int e^{\int \frac{k}{h} dx} \cdot \frac{y_1''}{h} dx + c e^{-\int \frac{k}{h} dx}.$$

Dosazením do relace druhé obdržíme po upravení rovnici tvaru (17).

$$y'''_1 + p_1 y''_1 + q_1 y'_1 + r_1 y_1 = 0 \text{ čili tvaru (18)}$$

$$y'''_1 + a_1 y''_1 + (2a'_1 - h_1) y'_1 + (a''_1 - k_1) y_1 = 0;$$

označíme-li k vůli stručnosti

$$\frac{h}{ah + k} e^{-\int \frac{k}{h} dx} = M,$$

$$a_1 = a + \frac{k}{h} + \frac{dl\left(\frac{M}{h}\right)}{dx}, \ h_1 = 2a'_1 + h, \ k_1 = a'' + h\frac{M'}{M}:$$

jest patrně možno, aby h_1, k_1 současně se rovnalo nulle. Pak lze integrovati pouhou quadraturou rovnici transformovanou a tedy i rovnici původní (17).

Platí-li alespoň jedna z podmínek $h \neq 0$, $k \neq 0$, transformujeme znovu; je-li konečně na př. $h_s = k_s = 0$, lze stanoviti integrál rovnice (17) pouhou quadraturou.

Poněvadž v úkonech $y' + ay$ lze za y položiti

$$y^{n-2} + r_{n-3} y^{n-3} + \ldots + r_0 y,$$

lze této transformace užíti pro rovnice řádu libovolného, třetím ovšem počínajíc.

Na základě differenciálního výrazu vzniklého z úkonů $y' + ay$, y''' mohli bychom libovolnou rovnici řádu 4tého psáti ve tvaru $y'''_1 - hy'' - ky' - ly = 0$, $y_1 = y' + ay$, avšak eliminací y nelze tu obdržeti rovnici lineární 4tého řádu. Nelze tedy transformaci lineárných rovnic tímto způsobem dále zevšeobecniti.

9. Jest možná však všeobecněji přetvořovati takto:
Z úkonů $y' + ay$, $y' + by$ vzniká differenciální výraz

$$y'' + (a + b)\, y' + (a' + ab)\, y = 0. \tag{18}$$

Pokládejme funkci b za předem danou. Rovnici (14) možná pak psáti ve tvaru

$$y'' + (a + b)\, y' + (a' + ab - h)\, y = 0; \tag{19}$$

je-li $h = 0$, provedeme řešení quadraturou; jinak pišme (19) ve formě

$$y'_1 + by_1 - hy = 0,\ y_1 = y' + ay;$$

eliminací obdržíme

$$y''_1 + \left(a + b - \frac{h'}{h}\right) y'_1 + \left(ab + b' - b\frac{h'}{h} - h\right) y_1 = 0$$

čili dle (19)

$$y''_1 + (a_1 + b)\, y'_1 + (a'_1 + a_1 b - h_1)\, y_1 = 0,$$

kde $a_1 = a - \frac{h'}{h}$, $h_1 = a' - b' + h - \frac{d^2 (lh)}{dx^2}$. Transformujeme-li tímto způsobem dále, může konečně jisté $h_s = 0$, načež integrace převedena na quadraturu.

Je-li na př. $a = mx + n$, $b = px + q$, $h =$ stálé, jest $a_s = a$, $h_s = s(m - p) + h$, tudíž bude $h_s = 0$ při $s = -\frac{h}{m - d}$. Nechceme-li tedy vyšetřovati s lomené, předpokládejme, že $h = - s(m - p)$.

Rovnice původní má tedy tvar

$$y'' + (\overline{m + p}\, x + \overline{n + q})\, y' + [npx^2 + \overline{np + mq}\, x + \overline{m + nq + s(m - p)}]\, y = 0$$

čili

$$y'' + (p_1 x + q_1)\, y' + (m_0 x^2 + p_0 x + q_0)\, y = 0.$$

Porovnáním obou rovnic obdržíme z daných koefficientů p_1, q_1, m_0, p_0, q_0 čísla m, n, p, q, s; mohou tedy býti p_1, q_1, m_0, p_0 čísla libovolná, vylučujíce však s lomené, předpokládejme že q_0, které se rovná $m + nq + s(m - p)$, může sic nabývati různých hodnot, avšak že dává pro s číslo celistvé.

Provedením s transformací lze tedy tuto rovnici převésti na tvar (18) a integrovati.

Podobně všeobecněji differenciální výrazy $y' + ay$, $y'' + by' + cy$ za sebou užity dávají výraz $y''' + ay'' + (2a' + b + c)\, y' + (a'' + ab + ac)\, y$. Pokládáme-li funkce b, c za předem dané, avšak tak zvolené, že můžeme nalézti integrál J rovnice $y'' + by' + cy = 0$, můžeme danou rovnici (17) psát ve tvaru

$$y''' + ay'' + (2a' + b + c - h)\, y' + (a'' + ab + ac - k)\, y = 0.$$

Platí-li současně $h = 0$, $k = 0$, zní řešení rovnice (17)

$$y = e^{-\int a dx} . \int J e^{-\int a dx}\, dx + c e^{-\int a dx}.$$

Je-li $h \neq 0$, $k \neq 0$, pišme (17) ve formě

$$y''_1 + by'_1 + cy_1 - hy' - ky = 0. \quad y_1 = y' + ay;$$

eliminací y obdržíme rovnici transformovanou

$$y'''_1 + a_1 y''_1 + (2a'_1 + b + c - h_1)\, y'_1 + (a''_1 + a_1 b + a_1 c - k_1)\, y_1 = 0,$$

při čemž další postup jest jako dříve.

Zevšeobecnění pro rovnici řádu n-ho (event. $n \gtreqless 3$) jest samozřejmé.

Pro $b = 0$ resp. $b = 0$, $c = 0$ obdržíme patrně úvahy v odstavci 7. a 8.

10. Kaskádní transformace jest pro rovnice lineární charakteristická. Pro rovnice jiného druhu nevede k cíli.

Zůstaneme-li pouze u rovnic řádu 2ho, úkony $y' + a_r y^r + a_{r-1} y^{r-1} + \ldots + a_1 y$, $y' + \alpha_s y^s + \ldots + \alpha_1 y$ (kde mocnitelé na rozdíl od předešlého mají obvyklý svůj význam) dávají differenciální výraz $y'' + \ldots + (a'_1 + a_1 \alpha_1) y$, jehož některé koefficienty však hoví jistým podmínkám. Předpokládejme, že podmínky tyto jsou splněny až na poslední koefficient, kterému pak můžeme dáti tvar $a'_1 + a_1\alpha_1 - h$.

Ukazuje se pak, že provedeme-li transformaci dle předešlého, obdržíme rovnici, která má tvar rovnice původní, avšak $h_1 = h$; je-li tedy $h \neq 0$, pro každé s jest $h_s \neq 0$. Provedeme-li pak transformaci dvakrát za sebou, rovnice vzniklá obdrží se z původní též substitucí $y = \frac{y_2}{h}$.

K vůli krátkosti uvažujme pouze úkony $y' + ay^2 + by$, $y' + ay$, které dávají výraz $y'' + (2ay + b + \alpha) y' + (a' + a\alpha) y^2 + (b' + b\alpha) y$.

Případ všeobecný nevyžaduje než delšího psaní.

Dané rovnici

$$y'' + (Ay + B) y' + Cy^2 + Dy = 0 \tag{20}$$

možná tedy dáti tvar

$$y'_1 + \alpha y_1 - hy = 0, \; y_1 = y' + ay^2 + by\,;$$

eliminací y obdržíme první rovnici transformovanou

$$y''_1 + E_1 y'^2_1 + (A_1 y + B_1) y'_1 + C_1 y^2 + D_1 y = 0, \tag{21}$$

jejíž levou stranu možná si mysliti až na poslední koefficient sestavenu z úkonů

$$y' + \alpha_1 y, \; y' + a_1 y^2 + b_1 y,$$

kde $\qquad \alpha_1 = \alpha, \; a_1 = \frac{a}{h}, \quad b_1 = b - \frac{h'}{h}.$

Tyto úkony dávají totiž differenciální výraz

$y'' + a_1 y'^2 + (2a_1\alpha_1 y + b_1 + \alpha_1) y' + a_1\alpha_1^2 y^2 + (\alpha'_1 + \alpha_1 b_1) y.$

Koefficient D_1 liší se od $\alpha'_1 + \alpha_1 b_1$ o $h_1 = h$.

Transformujme znovu, pišme tedy (21) ve tvaru

$$y'_2 + a_1 y_2^2 + b_1 y_2 - h y_1 = 0,\ y_2 = y'_1 + \alpha_1 y_1;$$

vyloučením y vznikne druhá transformovaná rovnice

$$y''_2 + (A_2 y_2 + B_2)\, y'_2 + C_2 y_2^2 + D_2 y_2 = 0; \qquad (22)$$

až na poslední koefficient lišící se též o h možná její levou stranu sestaviti z úkonů $y' + a_2 y^2 + b_2 y$. $y' + \alpha_2 y$, kde

$$a_2 = \frac{a}{h},\ b_2 = b - \frac{h'}{h},\ \alpha_2 = \alpha - \frac{h'}{h}.$$

Dosaďme nyní do (20) za y hodnotu zy. Vznikne transformovaná rovnice téhož tvaru; propočteme-li příslušné hodnoty pro a, b, α, obdržíme pro ně resp. az, $b + \frac{z'}{z}$, $\alpha + \frac{z'}{z}$, tedy pro $z = \frac{1}{h}$ tytéž obnosy jako v rovnici (22), rovnice ty jsou tedy totožné.

Tyto dvě transformace, kaskádní a substituce zy pro y, u nelineárných rovnic se ztotožňují, h se jimi nemění.

O kampyle Eudoxově.

Napsal **V. Jeřábek.**

Jest známo, že kampyla Eudoxova jest zvláštním případem křivky, kterou *Tortolini* definoval takto[1]:

Buď dána kuželosečka K (obr.) (ellipsa nebo hyperbola). V kterémkoli bodě p kuželosečky K sestrojená tečna protíná osu hlavní $o_1 a$ v bodě n_1, jímž vedená rovnoběžka s vedlejší poloosou $o_1 b$ seče spojnici $o_1 p$ v bodě m_1, jehož geom. místem je křivka M_1 mající rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^4}{a^4},$$

jsou-li osy kuželosečky osami souřadnic. Pro ellipsu v této rovnici platí znaménko hořejší $+$ a pro hyperbolu dolní $-$. Pře-

---

[1]) Dr. G. *Loria-Schütte*, Spezielle allgebraische und transcendente ebene Kurven, Leipzig, B. G. Teubner 1902, str. 320.