Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Řešení úloh

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 7, R125--R140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122103

jen tak kratičké trvání, že proto byla jejich existence dlouho vůbec neznáma.

Vysokého tlaku a vysoké teploty snaží se dosáhnouti *C. Ramsauer* mechanicky výstřelem projektilu do hlavně, v níž by se uzavřený plyn zabrzděním projektilu jednak značně stlačil, jednak silně zahřál. Při rychlosti střely 100 m/sec. stlačil by se dokonalý plyn stálého specif. tepla při zabrzdění v hlavni o délce 1 m při hmotě střely 20 g a průřezu hlavně 1 cm² na 15 atmosfér při argonu, 25 atmosfér u dusíku a 36 atmosfér při kysličníku uhličitém. Zvýšení teploty by bylo při prvním plynu 2200°, 1500° u druhého plynu a 1200° u třetího plynu. Když by platil zákon o adiabatickém stlačování i pro veliké rychlosti, dosáhlo by se při rychlosti střely 1000 m/sec. pro argon tlaku 11 milionů atmosfér a teploty 190.000° C! Praktické pokusy musily se zatím spokojiti s rychlostmi značně menšími, neboť rychlosti 500 m/sec. a výše nevydržel žádný materiál a již při rychlosti 150—200 m/sec. se i kalená ocel značně deformovala. Aby bylo možno sledovati optické vlastnosti náhle stlačeného a zahřátého plynu, byl spodek hlavně, do níž projektil vnikl, z křemene, který však se při rychlosti 175 m/sec. drtil v neprůhlednou hmotu. Ačkoliv pokusná stránka Ramsauerovy metody vykazuje značné obtíže, zdá se, že přece bude možno užíti tohoto způsobu k stanovení hustoty stlačených a silně zahřátých plynů, k stanovení elektrické vodivosti a pod.

ŘEŠENÍ ÚLOH.

(Texty úloh zde řešených jsou otištěny v 1. čísle Rozhledů matem.-přírodovědeckých letošního ročníku.)

Z matematiky.

1. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

A) V trojúhelníku platí:

$$v_b - v_a = a \sin \gamma - b \sin \gamma;$$

odtud

$$b - a = \frac{v_a - v_b}{\sin \gamma} \text{ (čtvrtá měř. úměrná),}$$

Známe-li $(a + b)$, $(a - b)$, jest v podstatě trojúhelník určen stranami a, b a úhlem γ.

B) Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník EFB, jehož odvěsna $\overline{FB} = v_b - v_a$ a protější úhel $F\widehat{E}B = \gamma$. Prodlužme přeponu a nanesme $BE + ED = a + b$! Rameno DA úhlu $B\widehat{D}A = \frac{1}{2}\gamma$ s osou úhlu FED protíná se ve vrcholu A trojúhelníka hledaného. Vrchol C obdržíme jako průsečík symetrály úsečky AE se spojnicí BD.

2. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

Elipsa o středu S a vrcholech A, B, C, D a kružnice nad hlavní osou opsaná jsou v afinitě. Je-li bod M' bod sdružený s bodem M a protínají-li se sdružené přímky $\overline{MC}$ a $\overline{M'C'}$, nebo $\overline{MD}$ a $\overline{M'D'}$ v bodech Q resp. P na ose elipsy, jakožto ose afinity, jest $\triangle C'D'M' \sim \triangle PQM'$, protože souhlasné strany jsou navzájem kolmé. Je-li dále bod O středem úsečky $\overline{PQ}$, jsou souhlasné těžnice $\overline{M'S}$ a $\overline{M'O}$ rovněž na sebe kolmé, čili spojnice $\overline{M'O}$ jest tečna kružnice. Afinně sdružená přímka $\overline{MO}$ jest tedy tečna elipsy mající skutečně vlastnost v úloze vytčenou.

3. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Elipsa nechť vznikla třeba kolmým průmětem kružnice do roviny σ, jež s ní svírá úhel φ. Bod na průměru rovnoběžném se σ ve vzdálenosti e od středu má mocnost $F'A' \,.\, F'B' = e^2 - r^2 = - b^2 = - r^2 \cos^2 \varphi$. Poloměr rovnoběžný s $A'B'$ svírá se σ úhel φ_1.

$$\varrho = r \cos \varphi_1, \quad \overline{FA} = \overline{F'A'} \cos \varphi_1, \quad \overline{FB} = \overline{F'B'} \cos \varphi_1,$$

$$\left| \frac{\overline{FA} \,.\, \overline{FB}}{\varrho^2} \right| = \frac{+ b^2}{r^2} = \cos^2 \varphi = \frac{b^2}{a^2} = \text{konst.}$$

4. Riešil p. *Arnošt Knöpflmacher*, studujúci VIII. a tř. rg. v Trenčíne.

Inverzným útvarom dvoch sdružených, t. j. ortogonálne sa pretínajúcich svázkov kružníc sú zase dva svázky sdružených kružníc. Dané dve kružnice k_1, k_2 určujú svázok kružníc S_1, ktorému odpovedá sdružený svázok kružníc S_2 pretínajúcich sa v bodoch A, B. Jestliže inverzným útvarom kružníc k_1 a k_2 sú sústredné kružnice k'_1 a k'_2, je inverzným útvarom svázku S_1 svázok sústredných kružníc S'_1. Jestliže ten prípad nastane, pozostáva sdružený svázok S'_2 zo systému priamok. Keď zvolíme za stred inverzie bod A nebo B, prejdú kružnice svázku S_2 v priamky a kružnice k_1 a k_2 v kružnice sústredné. Pretože sústredné kružnice nemajú spoločných reálných bodov, je nutnou podmienkou reálné riešiteľnosti úlohy, aby ani kružnice k_1 a k_2 nemaly spoločných reálných bodov.

5. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Výška komolce $= h_1$, výška odříznutého kužele $= h_2$. Těžiště přímého kužele je v $\frac{1}{4}$ výšky od základny. Těžiště komolce určíme z rovnosti statických momentů vzhledem k základně.

$$h_1 : h_2 = 1 : \sqrt{6}, \quad h_1 = \frac{h}{\sqrt{6} + 1}, \quad h_2 = \frac{h\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$$

$$V_2 = V \frac{h_2^3}{h^3} = \frac{6V\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)^3}, \quad V_1 = V - V_2 = \frac{V(19 + 3\sqrt{6})}{(\sqrt{6} + 1)^3}$$

$$V_1 x + V_2 (\tfrac{1}{4} h_2 + h_1) = \tfrac{1}{4} V h$$

$$\frac{V(19 + 3\sqrt{6})}{(\sqrt{6} + 1)^3} x + \frac{6V\sqrt{6}}{(\sqrt{6} + 1)^3} \cdot \frac{h_1 (4 + \sqrt{6})}{4} = V \frac{h_1 (\sqrt{6} + 1)}{4}$$

$$x = \frac{37 + 4\sqrt{6}}{4 (19 + 3\sqrt{6})} h_1$$

$$x : (h_1 - x) = (37 + 4\sqrt{6}) : (39 + 8\sqrt{6})$$

6. Riešil p. *Arnošt Knöpflmacher*, studujúcí VIII. a tř. rg. v Trenčíne.

Pre výšku slnka v platí: $\sin v = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t$, kde t je hod. uhol. Pre východ alebo západ slnka je $v = 0$, teda tiež $\sin v = 0$ a t_0 nech je hod. uhol slnka pri východe alebo západe. Po dosadení dostávame: $\cos t_0 = -\operatorname{tg} \delta \,.\, \operatorname{tg} \varphi$.

Aby sme našli uhol α, ktorý sviera dráha slnka s rovinou horizontu, budeme riešit pravouhlý sférický trojuholník so stranou $a = 90^0 - \varphi + \delta$, $c = t_0$. Dosadením do vzorca $\sin \alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$ a dosadením za $\sin c = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta \,.\, \operatorname{tg}^2 \varphi}$, dostávame

$$\sin \alpha = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta \,.\, \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

7. Riešil p. *Arnošt Knöpflmacher*, studujúcí VIII. a tř. rg. v Trenčíne.

Platí $\dfrac{p}{q} = \dfrac{z_1}{a} + r_1$, $r_1 = \dfrac{z_2}{a^2} + r_2$, $r_2 = \dfrac{z_3}{a^3} + r_3, \ldots, r_{n-1} = \dfrac{z_n}{a^n}$,

takže bude: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{z_1}{a} + \dfrac{z_2}{a^2} + \dfrac{z_3}{a^3} + \ldots + \dfrac{z_n}{a^n}$.

Po prípade môže $n \to \infty$. Pre $\dfrac{p}{q} = \dfrac{7}{36}$ dostávame:

$$\frac{7}{36} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \ldots \text{ in inf.}$$

P. *Ferd. Vitáček*, studující V. b tř. rg. v Praze XVI, poznamenává: Převedeme-li p, q z desítkové soustavy do soustavy o základu a a provedeme-li naznačené dělení, bude míti a-tinný zlomek, který tak obdržíme, žádanou formu. V uvedeném příkladě je: $7_X = 10_{VII}$, $36_X = 51_{VII}$.

Proveďme dělení v sedmičkové soustavě! Je:

$$10 : 51 = 0,\dot{1}2346\dot{0}_{VII} =$$
$$= \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \frac{6}{7^5} + \frac{0}{7^6} + \frac{1}{7^7} + \ldots$$

8. Řešil p. *Boh. Ondráček*, studující IV. roč. uč. úst. v Praze II.

Znásobíme-li druhou rovnici dvěma a od první odečteme, resp. přičteme, obdržíme rovnice: $(x - y)^2 + 6(x - y) + 8 = 0$ resp. $(x + y)^2 + 2(x + y) - 8 = 0$. Z nich $(x - y)_{1,2} = -2, \ -4$ resp. $(x + y)_{1,2} = 4, \ -2$. Z čehož dostáváme páry řešení: $(0; 2)$, $(-3; -1)$, $(-4; 0)$, $(-1; 3)$.

9. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Hrany trojhranu: x, y, z,

$$x^2 + y^2 = a^2, \; x^2 + z^2 = b^2, \; y^2 + z^2 = c^2,$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2), \; y^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2), \; z^2 = \tfrac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2).$$

Objem trojhranu $V_1 = \dfrac{1}{6} xyz$, výška $v_1 = \dfrac{xyz}{2\Delta}$, $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$ = plocha trojúh.; $\Delta' = \Delta \dfrac{(v_1 - v)^2}{v_1^2}$ = druhá zákl. komolce, V = objem komol. jehl.

$$V = \frac{v}{3}(\Delta + \sqrt{\Delta_1 \Delta_2} + \Delta') = \frac{v\Delta}{3}\left(1 + \frac{v_1 - v}{v_1} + \frac{(v_1 - v)^2}{v_1^2}\right),$$
$$V = \frac{v\Delta}{3} \, \frac{3v_1^2 - 3v_1 v + v^2}{v_1^2}.$$

10. **Řešil** p. *Frant. Matějka,* studující VII. tř. I. r. v Brně.

Pravidelný s-stěn omezený n-úhelníky má $\frac{sn}{2}$ hran a $\frac{sn}{2} - s + 2$ rohů (podle věty Eulerovy). Spojíme-li každý vrchol se všemi ostatními, obdržíme $\frac{1}{2}\left(\frac{sn}{2} - s + 1\right) \cdot \left(\frac{sn}{2} - s + 2\right)$ spojnic.

Od toho odečteme $\frac{sn}{2}$ hran a $\frac{s \cdot n\,(n-3)}{2}$ stěnových úhlopříček. Dostaneme po krátké úpravě

$$U = \tfrac{1}{2}s\,(\tfrac{1}{2}n - 1) \,.\, [(s-4)(\tfrac{1}{2}n - 1) - 1] + 1.$$

11. **Řešil** p. *M. Baumann,* studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Dané rovnice pišme:

$$\begin{aligned} ax + by &= 2xyz^2 \\ ax + cz &= 2xy^2z \\ by + cz &= 2x^2yz \end{aligned}$$

a položme $u = -2xyz$! Můžeme tedy psáti:

$$\begin{aligned} ax + by + uz &= 0 \\ ax + uy + cz &= 0 \\ ux + by + cz &= 0 \end{aligned}$$

Systém těchto homogenních rovnic má nenulové řešení, jen když:

$$\begin{vmatrix} a & b & u \\ a & u & c \\ u & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. $u^3 - u\,(ab + ac + bc) + 2abc = 0.$

Potom

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b & u \\ u & c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & a \\ c & a \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a & u \end{vmatrix}$$

čili

$$y = \frac{\begin{vmatrix} u & a \\ c & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & u \\ u & c \end{vmatrix}}\, x = \frac{1}{m}\, x, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & u \\ u & c \end{vmatrix}} = \frac{1}{n}\, x.$$

Poněvadž $\qquad xyz = -\tfrac{1}{2}u,$

je konečně

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}mnu}$$

a podobně další.

12. **Řešení autorovo:** Budiž číslo psáno ve tvaru $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots n^\nu$. Počet všech jeho dělitelů jest

$$p = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots (\nu + 1),$$

počítajíc v to 1 a dané číslo.

Mohou nastati tyto tři případy:

I. $2^\alpha \cdot 3^\beta < 100$, z čehož $\alpha \log 2 + \beta \log 3 < 2$ neboli $\beta < \frac{2 - 0{,}301\,\alpha}{0{,}477}$ nebo $\beta < 4{,}193 - 0{,}631\,\alpha$, a počet dělitelů je $p = (\alpha + 1)(\beta + 1)$.

$\alpha =$	$\beta <$	$\beta =$	Číslo	Počet dělitelů
0	4,193	4	3^4	$p = 5$
1	3,562	3	$2 \cdot 3^3$	$p = 8$
2	2,931	2	$2^2 \cdot 3^2$	$p = 9$
3	2,300	2	$2^3 \cdot 3^2$	$p = 12$*
4	1,669	1	$2^4 \cdot 3$	$p = 10$
5	1,038	1	$2^5 \cdot 3$	$p = 12$*

II. $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma < 100$, $p = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

$\gamma =$	$\alpha =$	$\beta =$	Číslo	Počet dělitelů
1	0	2	$3^2 \cdot 5$	$p = 6$
1	1	2	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	$p = 12$*
1	2	1	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$p = 12$*
1	3	0	$2^3 \cdot 5$	$p = 8$
1	4	0	$2^4 \cdot 5$	$p = 10$

III. $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma < 100$, $p = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

$\gamma =$	$a =$	$\beta =$	Číslo	Počet dělitelů
1	2	1	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	$p = 12$*

Hvězdičky značí největší počet dělitelů příslušných čísel; jsou to čísla $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2^3 \cdot 3^2 = 72$, $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$, $2^5 \cdot 3 = 96$, která mají všechna 12 dělitelů, počítajíc v to 1 i dané číslo.

13. Řešil p. *Josef Kubín*, studující VIII. tř. rg. v Hlučíně.

Zvolme si na křivce $f(x, y) = 0$ bod $A\ (x_1, y_1)$ a proložme jím kolmici k dané přímce. Směrnice kolmice $k_1 = p/q$. Rovnice kolmice pak je $px - qy + qy_1 - px_1 = 0$. Jejich průsečík má souřadnice

$$P\left(\frac{pq^2 - pqy_1 + p^2x_1}{p^2 + q^2}, \frac{q^2y_1 - pq \cdot x_1 + p^2q}{p^2 + q^2}\right).$$

Hledáme bod, který je souměrně sdružen podle dané přímky k bodu A. Jeho souřadnice jsou

$$x_2 = \frac{2pq\,(q - y_1) + x_1\,(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}, \quad y_2 = \frac{y_1\,(q^2 - p^2) + 2pq\,(p - x_1)}{p^2 + q^2}.$$

Hledaná křivka má rovnici:

$$f\left(\frac{2pq\,(q - y) + x\,(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}, \frac{2pq\,(p - x) + y\,(q^2 - p^2)}{p^2 + q^2}\right) = 0.$$

14. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

U paraboly $y'^2 = 2px'$ proveďme transformaci (I) a (II) a obdržíme paraboly, jejichž osy jsou kolmé a vrcholy pevné, ať φ nabývá libovolných hodnot.

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi, \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x - 1)\cos(R + \varphi) + (y - 1)\sin(R + \varphi), \\ y' &= -(x - 1)\sin(R + \varphi) + (y - 1)\cos(R + \varphi). \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Dostaneme rovnice:

$$P_1 \equiv (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 = 2p\,(x\cos\varphi + y\sin\varphi),$$

$$P_2 \equiv [-(x-1)\cos\varphi - (y-1)\sin\varphi]^2 = 2p\,[-(x-1)\sin\varphi + (y-1)\cos\varphi)].$$

Z nich sečtením dostáváme kružnici, která náleží do svazku, který je jimi určen.

$$P_1 + P_2 \equiv K \equiv x^2 + y^2 - 2x(\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + p\cos\varphi - p\sin\varphi) - 2y(\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + p\cos\varphi + p\sin\varphi) + 1 + 2\sin\varphi\cos\varphi + 2p\cos\varphi - 2p\sin\varphi = 0.$$

Pro její poloměr $r^2 = 2p^2 + 4p\sin\varphi$. Tato rovnice vyjadřuje hledanou závislost.

15. **Řešil** p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Mnohočlen $f(x_i)$, jehož koeficienty jsou celá čísla reálná, musí se rovnat celému reálnému číslu, aby měl celistvá reálná řešení.

Tedy $f(x_i) = m$, kde m je celé reálné číslo. Potom $x^k/n = n \,.\, m \pm 1$; pravá strana je číslo celé. Odtud $x^k = u \,.\, n$, kde $u = m \,.\, n \pm 1$; n a u jsou tedy čísla nesoudělná $\lesseqgtr 0$. Je tedy: $|u| = v^k$ a $|n| = w^k$, c. b. d.

16. **Riešil** p. *Arnošt Knöpflmacher*, studující VIII. a tř. rg. v Trenčíne.

Počet absolutných permutácií z n prvkov označme P'_n. Permutáciou z n prvkov dostávame n skupín, z ktorých má každá $(n-1)!$ členov. Prvá skupina, v ktorej sa všetky členy počínajú prvkom 1, nedáva žiadnej absolutnej permutácie. V ostatných skupinách môžeme najsť 2 druhy vyhovujúcich členov. Po prve tie, v ktorých sa členy skupiny začínajú k-tým prvkom a prvok 1 je na k-tom mieste. Potom môžeme $(n-2)$ prvky absolutne permutovať. Takých členov je potom v skupine P'_{n-2}. Po druhé tie členy, kde prvok 1 nie je na k-tom mieste; potom môžeme $(n-1)$ prvkov absolutne permutovať. Počet týchto je P'_{n-1}. Z toho plynie redukčný vzorec

$$P'_n = (n-1)\,[P'_{n-1} + P'_{n-2}].$$

Sčítajme výrazy:

$$P'_n = (n-1)\,[P'_{n-1} + P'_{n-2}],\quad -P'_{n-1} = -(n-2)\,[P'_{n-2} + P'_{n-3}],$$
$$+P'_{n-2} = +(n-3)\,[P'_{n-3} + P'_{n-4}],\quad -P'_{n-3} = -(n-4)\,[P'_{n-4} + P'_{n-5}] \text{ atď. až}$$
$$(-1)^n \,.\, P'_3 = (-1)^n\,[P'_2 + P'_1].$$

(Platí: $P'_1 = 0$, $P'_2 = 1$.) Po upravení dostávame:

$$P'_n = nP'_{n-1} + (-1)^n.$$

Dosaďme za $P'_{n-1} = (n-1)\,P'_{n-2} + (-1)^{n-1}$, do vzniklého výrazu dosaďme za P'_{n-2} a tým istým spôsobom pokračujme až dovtedy, keď dostaneme P'_1. Po snadnej úprave potom dostávame

$$P'_n = n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right].$$

17. **Řešil** p. *Jos. Kubín*, studující VIII. tř. rg. v Hlučíně.

Uvažujme nejprve, že bod je vržen v rovině (xz) pod úhlem α rychlostí c, pak

$$x = c \,.\, t \,.\, \cos\alpha,$$
$$z = c \,.\, t \,.\, \sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Vyloučením t dostaneme

$$z = x \,.\, \operatorname{tg}\alpha - \tfrac{1}{2}g\,\frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

Tato rovnice představuje systém parabol o parametru α. Obálku dostaneme, derivujeme-li rovnici parciálně podle α a z obou rovnic vyloučíme α.

Dostaneme

$$x^2 = \frac{-2c^2}{g}\left(z - \frac{c^2}{2g}\right).$$

Z toho plyne, že obálku tvoří parabola o vrcholu $V\,(x = 0,\ z = c^2/2g)$. Rovnice *rotačního paraboloidu* o ose z, vně kteréhož se musíme nacházeti, abychom nebyli zasaženi, zní

$$x^2 + y^2 = -\frac{2c^2}{g}\left(z - \frac{c^2}{2g}\right).$$

Pro vrcholy parabol systému (1) je

$$x_V = \frac{c^2 \,.\, \sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{g},\quad z_V = \frac{c^2 \,.\, \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Pro ohniska

$$x_F = \frac{c^2 \sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{g},\quad z_F = \frac{-c^2\,(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2g}.$$

Vyloučíme-li α ze souřadnic vrcholu, dostaneme

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left(z - \frac{c^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{c^2}{4g}\right)^2} = 1.$$

Tedy hledaným geom. místem vrcholů parabol, je-li bod vržen v rovině (xz), je *elipsa*, pro kterou $a = \frac{c^2}{2g}$, $b = \frac{c^2}{4g}$ a střed $S\left(0;\ \frac{c^2}{4g}\right)$.

Podobně vyloučíme-li α ze souřadnic x_F, y_F, dostaneme

$$x^2 + y^2 = \frac{c^4}{4g^2}.$$

Tedy geometrické místo ohnisek parabol, jsou-li body vrženy v rovině (xz), je *kružnice* se středem v daném bodě a poloměrem $r = \frac{c^2}{2g}$.

18. Řešil p. *Josef Kubín*, studující VIII. tř. rg. v Hlučíně.

Zvolme libovolnou přímku procházející těžištěm za souřadnou osu x. Pak vzdálenosti vrcholů od dané přímky budou jejich souřadnicemi y. Pro těžiště platí $y_T = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$. V našem případě tedy $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Tedy: Algebraický součet vzdáleností vrcholů trojúhelníka od každé přímky procházející těžištěm je roven nule. Tedy také od přímky Eulerovy.

19. Riešil p. *Juraj Haščík*, studující VII. tr. r. v Žiline.

Pata kolmice spuštěné z bodu rovnoosé hyperboly na imag. osu má od vrcholu na hlavní ose vzdálenost $\sqrt{a^2 + y_M^2} = x_M$. Tedy: Kružnice, která má patu za střed a prochází uvažovaným bodem, prochází vrcholy hyperboly. Sestrojíme-li tyto kružnice pro dané body, dostaneme v jejich průsečících vrcholy hyperboly.

20. Riešil p. *Arnošt Knöpflmacher*, studující VIII. tř. rg. v Trenčíne.

Dve strany a nimi uzavrený uhol dávajú nepremenný trojuholník. Teraz treba určiť maximálny štvoruholník, ktorého strany známe. Obsah štvoruholníka môžeme vyjadriť súčtom obsahov obidvoch trojuholníkov oddelených uhlopriečkou f:

$$O = \tfrac{1}{2}\,(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma).$$

Vypočítajme Carnotovou vetou f^2 z obidvoch trojuholníkov, obidva výrazy porovnajme a upravme:

$$2ad \cos \alpha - 2bc \cos \gamma = a^2 + d^2 - b^2 - c^2.$$

Štvornásobok rovnice vyjadrujúcej obsah a predchádzajúcu rovnicu umocnime dvoma a sčítajme ich. Po upravení dostávame

$$O^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

kde $2s = a + b + c + d$. Obsah štvoruholníka bude maximálny, keď výraz $abcd \, . \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 0$. To nastane, keď $\alpha + \gamma = 180^0$, čiže keď štvoruholník bude tetivový.

21. Řešil p. *Boh. Ondráček*, studující IV. roč. uč. úst. v Praze II.

Znásobíme-li řadu x a odečteme od původní řady, obdržíme $S(1 - x) = 3(1 \, . \, 2 + 2 \, . \, 3x + 3 \, . \, 4x^2 + 4 \, . \, 5x^3 + \ldots)$.

Označme

$$s = 1 \, . \, 2 + 2 \, . \, 3x + 3 \, . \, 4x^2 + 4 \, . \, 5x^3 + \ldots$$

a opakujme týž postup jako s danou řadou; dostaneme

$$s(1 - x) = 2(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)$$

Znovu položme

$$\sigma = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots,$$

z níž jako nahoře obdržíme

$$\sigma(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Z toho pak

$$\sigma = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$

Zpětným dosazováním dostaneme

$$S = \frac{6}{(1 - x)^4}.$$

22. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

Ortocentrum V a těžiště T a střed O kružnice opsané leží na jedné přímce, při čemž $\overline{VT} : \overline{TO} = 2 : 1$. Je-li bod Q střed těžnice t, jest $\overline{TQ} = \frac{1}{6}t$. Najdeme tedy těžiště a na těžnici vrchol a střed protější strany trojúhelníka. Dále užijeme výšky a kružnice opsané.

23. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Dané rovnice pišme:

$$1296\,(3^{4x} - 2^{4y}) = 65 \, . \, 3^{4x} \, . \, 2^{4y}$$

$$216\,(3^{2x} - 2^{2y}) = 5 \, . \, 3^{3x} \, . \, 2^{3y}$$

Z nich dělením

$$6\,(3^{2x} + 2^{2y}) = 13 \, . \, 3^{x} \, . \, 2^{y}$$

$$(3 \, . \, 3^x - 2 \, . \, 2^y) \, . \, (2 \, . \, 3^x - 3 \, . \, 2^y) = 0.$$

Odtud

$$\text{I.} \quad 3^x = \tfrac{3}{2}\, 2^y$$

a po dosazení

$$2^4 = 2^{4y}$$

$$y = 1, \quad x = 1;$$

II. $3^x = \frac{2}{3} \, . \, 2^y$ má imag. řešení.

24. Řešil p. *Josef Kubín*, studující VIII. tř. rg. v Hlučíně.

Z dané rovnice plyne $\frac{y}{x} = \frac{\log y}{\log x}$. Protože řešení má býti racionální, musí býti $\frac{y}{x} = n$ a $\log y = n \log x$, kde n je racionální číslo. Čili $x^{n-1} = n$. Tato rovnice pro racionální řešení v x dává: I. $n = 1$; $x =$ lib. racionální číslo, $y = x$; II. $n = 2$, $x = 2$, $y = 4$; III. $n = 1 + \frac{1}{p}$ kde $|p| > 1$; je-li $p > 0$, je

$$x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p \qquad y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}.$$

Pro $p < 0$ x a y v posledním řešení se vymění.

25. Riešil p. *Arnošt Knöpflmacher*, studující VIII. a tř. rg. v Trenčíne.

Sud vznikne otáčaním úseče paraboly s vrcholom $V(R, 0)$, osou v ose x a prechádzajúcej bodom $M(r, \frac{1}{2}v)$, okolo osi y; úseč je omezena pořadnicemi $y = -\frac{1}{2}v$, $y = +\frac{1}{2}v$. Rovnica paraboly je potom $y^2 = 2p(x - R)$, kde $p = \frac{v^2}{8(r-R)}$. Potom bude platiť:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}v} x^2 \, dy = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}v} \left(\frac{y^4}{4p^2} + \frac{Ry^2}{p} + R^2\right) dy.$$

Vypočítaním tohoto integrálu a po dosadení za p, dostávame po upravení:

$$V = \tfrac{1}{15} \pi v (8R^2 + 4Rr + 3r^2).$$

Z fysiky.

1. úl. *Řešení autorovo.*

Při centrálním kruhovém zatmění slunečním jest zdrojem světla mezikruží, jehož svítivost označme L', kdežto svítivost celého kotouče slunečního jest L.

a) Při stejnoměrné plošné svítivosti povrchu slunečního svítivosti mají se k sobě jako plochy:

$$\frac{L}{L'} = \frac{978^2}{1861 \,.\, 95} = 5{,}413 = \frac{100}{18{,}5}.$$

Je tedy světelná ztráta 81,5%.

b) Ubývá-li plošné jasnosti od středu slunečního kotouče k okraji, nutno veličiny L a L' stanoviti integrací. Položíme-li poloměr Slunce $= 1$, jest vzdálenost libovolného bodu od středu kotouče $= \sin\gamma$ a tudíž plocha elementárního mezikruží:

$$\Delta M = \pi\,[\sin\gamma + \sin(\gamma + \Delta\gamma)] \,.\, [\sin\gamma - \sin(\gamma + \Delta\gamma)].$$

Ježto $\lim \Delta\gamma = 0$, jest

$$dM = 2\pi \sin\gamma \, d(\sin\gamma) = 2\pi \sin\gamma \cos\gamma \, d\gamma$$

a tudíž intensita elementárního mezikruží

$$dL = \tfrac{2}{5} I_0 (1 + \tfrac{3}{2}\cos\gamma) \,.\, 2\pi \sin\gamma \cos\gamma \, d\gamma.$$

Integrací v mezích 0 až 90 obdržíme odtud

$$L = \tfrac{4}{5}\pi I_0 \int_0^{\pi/2} [1 + \tfrac{3}{2} \cos \gamma] \sin \gamma \cos \gamma \, d\gamma = \tfrac{4}{5}\pi I_0.$$

Pro obvod Měsíce jest $\sin \gamma_m = 1766/1955 = 0{,}903$ a z toho $\gamma_m = 64^0\,34'$. Jest tedy

$$L' = \tfrac{4}{5}\pi I_0 \int_0^{\pi/2} [1 + \tfrac{3}{2} \cos \gamma] \sin \gamma \cos \gamma \, d\gamma = \tfrac{4}{5}\pi I_0 \,.\, 0{,}2636$$

a tudíž

$$L/L' = 2/0{,}2636 = 100/13{,}2,$$

t. j. světelná ztráta 86,8%.

2. úl. Řešil p. *Jan Navrátil*, VIII. rg., Litovel.

Označme dolní základnu lichoběžníka a, horní základnu b, výšku lichoběžníka v a vzdálenost těžiště od dolní základny x. Lichoběžník můžeme rozděliti známým způsobem na rovnoběžník a trojúhelník. Těžiště rovnoběžníka leží v průsečíku jeho úhlopříček a je vzdáleno od dolní základny o $\frac{1}{2}v$. Těžiště trojúhelníka je ve třetině výšky. Podle věty Varignonovy platí, že $(P_1 + P_2)\,x = P_1 \,.\, \frac{1}{3}v + P_2 \,.\, \frac{1}{2}v$, při čemž $P_1 = \frac{1}{2}(a - b)\,.\,v$, $P_2 = b\,.\,v$. Po dosazení a úpravě plyne, že $x = \frac{1}{3}v \,.\, \dfrac{a + 2b}{a + b}$ a úměra $x : (v - x) = (\frac{1}{2}a + b) : (a + \frac{1}{2}b)$.

3. úl. Riešil p. *Anton Hufa*, VIII. rg., Bratislava.

Na povrchu zemskom, totiž vo vzdialenosti R od stredu, je urýchlenie g, vo výške x (totiž vo vzdialenosti $R + x$ od stredu) je urýchlenie g'. Doba kyvu kyvadla je daná vzorcom $T = \pi\sqrt{l/g}$, vo výške x je $T' = \pi\sqrt{l/g'}$. Urýchlenia ubýva so štvercom vzdialenosti; z toho vyplývá, že $(R + x)^2 : R^2 = g : g' = \pi^2 l/T^2 : \pi^2 l/T'^2 = T'^2 : T^2$, čiže $(R + x) : R = T' : T$. Upravením úmery dostaneme $x = R\,(T'/T - 1)$.

4. úl. Řešil p. *Boh. Ondráček*, IV. uč. úst., Praha II.

Do vzorce pro dobu kyvu

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{Mag}}$$

dosadíme za moment setrvačnosti

$$K = \tfrac{2}{5}m_1r_1^2 + m_1\varrho_1^2 + \tfrac{2}{5}m_2r_2^2 + m_2\varrho_2^2,$$

za hmotu

$$M = m_1 + m_2$$

a za vzdálenost těžiště od závěsu

$$a = \frac{m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2}{m_1 + m_2}.$$

Je tudíž

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{\frac{2}{5}m_1r_1^2 + m_1\varrho_1^2 + \frac{2}{5}m_2r_2^2 + m_2\varrho_2^2}{m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2}},$$

$$\frac{dT}{d\varrho_2} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\dfrac{2m_2\varrho_2\,(m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2) - (\frac{2}{5}m_1r_1^2 + m_1\varrho_1^2 + \frac{2}{5}m_2r_2^2 + m_2\varrho_2^2)\,m_2}{(m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2)^2}}{2\sqrt{\dfrac{\frac{2}{5}m_1r_1^2 + m_1\varrho_1^2 + \frac{2}{5}m_2r_2^2 + m_2\varrho_2^2}{m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2}}}.$$

Z podmínky pro extrém $\dfrac{dT}{d\varrho_2} = 0$ plyne

$$m_2\varrho_2^2 + 2m_1\varrho_1\varrho_2 - \tfrac{2}{5}m_1r_1^2 - m_1\varrho_1^2 - \tfrac{2}{5}m_2r_2^2 = 0,$$

$$(\varrho_2)_{1,2} = -\frac{m_1}{m_2}\varrho_1 \pm \sqrt{\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)\varrho_1 + \tfrac{2}{5}\left(\frac{m_1}{m_2}r_1^2 + r_2^2\right)}.$$

Positivní kořen odpovídá poloze mezi bodem závěsu a koulí prvou, negativní kořen poloze na opačné straně (nad závěsem). Hmota drátu nebyla vzata v úvahu.

5. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice.

Kinetická energie bodu dopadlého z nekonečna by byla rovna práci vykonané na dráze z nekonečna až na povrch země, t. j. do vzdál. R od středu země. Hmota země M.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = -\int_{\infty}^{R} k\frac{Mm}{x^2}\,dx,$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = k\frac{Mm}{R}.$$

Ježto:

$$k\frac{Mm}{R^2} = mg, \qquad v = \sqrt{2gR}, \qquad v = 11{,}18\ \text{km/sec}.$$

6. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice.

Tyč má délku $2y$ a hmotu M. x je vzdálenost těžiště od osy kývání, K moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose kyvu.

$$K = \tfrac{1}{3}M(y^2 + 3x^2), \qquad T = \sqrt{\frac{K}{Mgx}} = 1$$

$$\frac{K\pi^2}{Mgx} = T^2 = 1$$

$$\frac{\pi^2}{g}\,\frac{y^2+3x^2}{3x} = 1$$

$$y^2 + 3x^2 - 3x\frac{g}{\pi^2} = 0$$

$$\frac{y^2}{\left(\frac{g\sqrt{3}}{2\pi^2}\right)^2} + \frac{(x - g/2\pi^2)^2}{\left(\frac{g}{2\pi^2}\right)^2} = 1$$

Poněvadž druhý zlomek je kladný, jest

$$y < \frac{g}{2\pi^2}\sqrt{3}.$$

Délka tyče musí být menší než

$$g\sqrt{3}/\pi^2 = 170\ \text{cm}.$$

Dodatek podle řešení *autorova*:

Z rovnice $y^2 + 3x^2 - 3x\dfrac{g}{\pi^2} = 0$ plyne, že

$$2x_{1,2} = \frac{g}{\pi^2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{\pi^4} - \frac{4y^2}{3}}.$$

Poněvadž však $y > x$, je

$$2y > \frac{g}{\pi^2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{\pi^4} - \frac{4y^2}{3}}.$$

Po úpravě vychází $y > \frac{3}{4}\frac{g}{\pi^2}$. Je tedy délka tyče větší než $\frac{3}{2}\frac{g}{\pi^2} \doteq 150$ cm.

7. úl. Řešení *autorovo.*

Zrychlení padající nádoby jest dáno výrazem: $\gamma = g\,(\sin\alpha - k\cos\alpha)$. Poněvadž na částice vodní na hladině působí tíže mg svisle a z této síly přichází k platnosti jen složka $m\gamma$ rovnoběžná s délkou nakloněné roviny, přichází tím nazmar síla, jež se rovná vektorovému rozdílu sil mg a $m\gamma$. Tento rozdíl jest roven výslednici sil mg a síly $-m\gamma$ působící rovnoběžně s délkou nakloněné roviny směrem vzhůru. Hladina vodní jest pak na tuto výslednici kolmá.

Označíme-li úhel, jejž tvoří hladina vodní v nádobě s rovinou vodorovnou, β, tu platí:

$$g : \gamma = \cos(\beta - \alpha) : \sin\beta,$$

čili

$$g/\gamma : 1 = (\operatorname{cotg}\beta\cos\alpha + \sin\alpha) : 1,$$

z čehož

$$g/\gamma = \operatorname{cotg}\beta\cos\alpha + \sin\alpha.$$

Dosadíme-li za

$$\frac{g}{\gamma} = \frac{1}{\sin\alpha - k\cos\alpha},$$

obdržíme z předchozí rovnice

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{\cos\alpha + k\sin\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha}.$$

Položíme-li $k = \operatorname{tg}\varrho$, tu obdržíme:

$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}(\alpha - \varrho)$$

t. j.

$$\beta = \alpha - \varrho.$$

8. úl. Řešení *autorovo.*

Dopadne-li krychle na příčku rychlostí v, pak nastane ráz, následkem jehož počne se krychle otáčeti úhlovou rychlostí ω; abychom tuto určili, užijeme věty, že otáčecí moment hybnosti kol hrany při rázu musí rovnati se otáčejícímu momentu hybnosti po rázu. Moment hybnosti při rázu jest $Mv \cdot \frac{1}{2}a$, značí-li M hmotu krychle a a její hranu. Moment hybnosti po rázu jest ωK, značí-li K moment setrvačnosti krychle kol hrany. Platí tedy

$$\tfrac{1}{2}Mv\,a = \omega K = \tfrac{2}{3}Ma^2\omega,$$

z čehož

$$\omega = \tfrac{3}{4}v/a.$$

Nemá-li se krychle po rázu překlopiti, musí její živá síla po rázu, která jest

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 K = \tfrac{9}{32}v^2/a^2 \cdot \tfrac{2}{3}Ma^2 = \tfrac{3}{16}Mv^2,$$

býti menší než práce, jež jest nutna, aby těžiště krychle stouplo o výši

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos 15^0 = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\,(1 - \cos 15^0) = a\sqrt{2}\sin^2 7{,}5^0.$$

Práce k tomuto stoupnutí těžiště vynaložená jest $a\sqrt{2}\,Mg\sin^2 7{,}5^0$.

Musí proto platiti

$$\tfrac{3}{16}Mv^2 \leqq a\sqrt{2}\,Mg\sin^2 7{,}5^0,$$

t. j.

$$v^2 \leqq \tfrac{16}{3}a\sqrt{2}\,g\sin^2 7{,}5^0.$$

Poněvadž vztah mezi rychlostí a výší h jest $v^2 = 2gh$, jest proto nutno, aby

$$h \leqq \tfrac{8}{3}a\sqrt{2}\sin^2 7{,}5^0.$$

9. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice.

$a)$ $\alpha)$ $$x = \sin\varphi = \sin\frac{2\pi}{T}t, \qquad y = \sin 2\varphi = \sin\frac{4\pi}{T}t.$$

Aby rychlost byla 0, je nutno, aby současně

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ a } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Takový bod není.

$a)$ $\beta)$ Zrychlení jsou obě současně rovna nule jen pro počátek.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4^2\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t = 0 \text{ pro } t = 0, \tfrac{1}{2}T, T, \tfrac{3}{2}T, \ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{16\pi^2}{T^2}\sin\frac{4\pi}{T}t = 0 \text{ pro } t = 0, T, \tfrac{1}{4}T, \tfrac{1}{2}T, \tfrac{3}{4}T, T, \ldots$$

$b)$ $\alpha)$ $$x = \sin\varphi = \sin\frac{2\pi}{T}t, \qquad y = \sin 3\varphi = \sin\frac{6\pi}{T}t.$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t = 0 \text{ pro } t = \tfrac{1}{4}T, \tfrac{3}{4}T, \tfrac{5}{4}T, \ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{6\pi}{T}\cos\frac{6\pi}{T}t = 0 \text{ pro } t = \tfrac{1}{12}T, \tfrac{3}{12}T, \tfrac{5}{12}T, \ldots$$

Současně jsou obě derivace rovny nule pro $t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, \ldots$ Souřadnice příslušných bodů jsou $x = \pm 1$, $y = \mp 1$.

$b)$ $\beta)$ $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t = 0 \text{ pro } t = 0, \tfrac{1}{2}T, T, \tfrac{3}{2}T, 2T, \ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{36\pi^2}{T^2}\sin\frac{6\pi}{T}t = 0 \text{ pro } t = 0, \tfrac{1}{6}T, \tfrac{1}{3}T, \tfrac{1}{2}T, \tfrac{2}{3}T, \tfrac{5}{6}T, T, \ldots$$

Současně jest

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0 \text{ pro } t = 0, \tfrac{1}{2}T, T, \tfrac{3}{2}T, 2T, \ldots$$

Všem hodnotám T odpovídá počátek.

10. úl. Řešil p. *Boh. Ondráček*, IV. uč. úst., Praha II.

Označme výšku kapaliny h (v okamžiku t). Za dobu $\mathrm{d}t$ činí úbytek kapaliny $q\,\mathrm{d}h$, takže

$$-q\,\mathrm{d}h = q'\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t,$$

při čemž $\sqrt{2gh}$ je výtoková rychlost určená Torricelliovým zákonem. Separujíce proměnné obdržíme diferenciální rovnici

$$-\frac{\mathrm{d}h}{2\sqrt{h}} = \frac{q'}{q}\sqrt{\frac{g}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Po integraci jest $-\sqrt{h} = \dfrac{q'}{q}\sqrt{\dfrac{g}{2}}\,t + c.$

Konstantu c určíme z podmínky, že v čase $t = 0$ je výška $h = h_0$, takže $c = -\sqrt{h_0}$, tedy

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{q'}{q}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t.$$

Umocníme a upravíme na

$$h_0 - h = \frac{q'}{q}\sqrt{2gh_0}\,.\,t - \frac{q'^2}{q^2}\cdot\frac{g}{2}\,t^2,$$

kde $h_0 - h = s$ značí, oč bod klesne za dobu t. Z rovnice je patrno, že bod koná pohyb rovnoměrně zpožděný. Počáteční rychlost jest $q' \sqrt{2gh_0}/q$, zpoždění $q'^2 g/q^2$.

Z deskriptivní geometrie.

1. úl. Řešil p. *Ferd. Vitáček*, studující V. *b* tř. rg. v Praze XVI.

Proložme každou ze tří mimoběžek rovinu rovnoběžnou s osou; její poloha je udána čtvrtou mimoběžkou. Tyto tři roviny se protnou ve třech rovnoběžkách. Protněme je rovinou čtvrtou kolmou na směr osy. Tato protíná ostatní tři roviny v trojúhelníku. Středem kružnice dotýkající se stran tohoto trojúhelníka prochází osa. Úloha je čtyřznačná.

2. úl. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Vrchol kužele je na kružnici ležící v rovině σ, proložené osou elipsy kolmo na její rovinu. Poloměr kružnice je roven větší poloose a. Rovina σ protíná paraboloid v hlavní parabole o parametru $2p = 2b^2/a$; spojnice vrcholu kužele se středem elipsy je sdružený průměr ke směru hlavní osy elipsy. Spojnici určíme úhlem φ, který svírá s rovinou elipsy. Pro něj platí vztah: $\sin \varphi = b/a$.

Tím je parabola určena dvěma tečnami s body dotyku. Jejím otočením kolem osy vznikne hledaný paraboloid. Úloha je obecně čtyřznačná.

3. úl. Řešila sl. *Libuše Doležalová*, stud. VII. tř. r. v Bratislavě.

Hledaná koule a její stín budou souměrné podle roviny ϱ, kolmé k π a procházející o. Proto svítící bod bude ležeti na průsečíku přímky s s ϱ. Průměr koule bude vzdálenost bodu S od π. Má-li se parametr paraboly rovnat $2r$, bude se koule dotýkati kolmice s bodu S na π spuštěné; ohniskem stínu bude bod, v kterém se koule dotýká π.

4. úl. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

Budiž površka a, rovina řezu ϱ, vrchol rovnoosé hyperboly M. Hledaný kužel K, jehož vrcholový úhel bude pravý, mysleme si posunutý směrem površky a tak, aby jeho vrchol připadl do průsečíku V' přímky a s rovinou ϱ, která jest nyní rovinou osového řezu posunutého kužele K'. Osa o' kužele K' jest přímka, ve které rovinu ϱ protíná rot. kužel o ose a, o vrcholu V' a o vrcholovém úhlu pravém. Přímka m vedená bodem M rovnoběžně s o' jest hlavní osou rovnoosé hyperboly a rovina ϱ kolmá k φ proložená přímkou m protíná površku a ve vrcholu V hledaného kužele K. Úloha jest obecně dvojznačná.

5. úl. Řešil p. *Fr. Wergner*, studující VII. r. v Praze X.

A. Označíme-li střed světla Σ, jsou tečny vedené ze šikmého průmětu $'\Sigma$ k šikmému obrysu $'o$ plochy kulové dvě tečny šikmého průmětu meze vlastního stínu. Jejich body dotyku s $'o$ (které lze jednoduše přesně stanoviti), jsou dotyčné body těchto tečen s mezí vl. stínu, neboť jsou to dotyčné body tečných rovin světelných, současně promítacích.

Další body meze vlastního stínu určíme pomocí dotyčných ploch válcových, opsaných kulové ploše směrem souřadných os. Do rovin rovnoběžných s rovinami souřadnými a procházejícími středem koule promítneme bod Σ. Z průmětů vedeme tečny k příslušným průsečným křivkám. Dotyčné body jsou body meze vlastního stínu příslušné plochy válcové a tedy také meze vlast. stínu plochy kulové.

Jest výhodné sestrojiti tyto body pro válec rovnoběžný s y, neboť příslušná dotyčná křivka se promítá jako kružnice.

Ze dvou tečen s body dotyku a jednoho dalšího bodu sestrojíme kuželosečku, v našem případě elipsu, velmi jednoduše kolineací. Libovolná kružnice dotýkající se dvou tečen je kolineární s hledanou kuželosečkou. $'\Sigma$ je střed kolineace. Osu kolineace určíme, vyhledáme-li dvě dvojice přiřazených přímek. Jedna je spojnicí dotyčných bodů a přiřazená přímka, druhá je spojnicí dalšího bodu s jedním bodem dotyku a přiřazená přímka. Kolineace je potom úplně určena středem, osou a párem sdružených bodů.

Vržený stín na libovolnou souřadnou rovinu dotýká se rovněž (v průmětu) tečen vedených z bodu $'\Sigma$ k obrysu $'o$. Můžeme pro něj získati ihned průměr a tedy střed, užijeme-li věty Quetelet-Dandelinovy. Kuželosečku určenou dvěma tečnami a průměrem lze jednoduše sestrojiti kolineací, jde-li o elipsu, pak afinitou. (Daný průměr je osou, směr je spojnice průsečíku tečen s bodem, který mu odpovídá.)

B. Konstrukce uvedené v *A*. platí i pro osvětlení rovnoběžné. Poněvadž při konstrukci meze vlastního stínu dostaneme přímo průměr a směr sdruženého a další bod, užijeme ke konstrukci elipsy afinity.

Seznam řešitelů úloh.

Bachleba Jos., VI. rg., Kežmarok, m.: 8, f.: 3, 8; *Baumann Martin*, VIII. rg., Domažlice, m.: 1—5, 7—15, 17—25, f.: 2, 3, 5, 6, 8, 9, dg.: 1—4; *Doležalová Libuše*, VII. r., Bratislava, dg.: 1—5; *Dřízga Cyril*, VII. rg., Místek, m.: 1, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 18, 23, 24, 25, f.: 1, 2, 5, 6, 8; *Haščík Juraj*, VII. r., Žilina, m.: 18, 19, 21, 22; *Huťa Ant.*, VIII. rg., Bratislava, m.: 8, 10, 12, 16, 21, 23, f.: 3, 5—8, 10; *Kličková Jarm.*, VI. rg., Bratislava, m.: 1, 2, 7, 8; *Knöpflmacher Arnošt*, VIII. rg., Trenčín, m.: 1—14, 16—25; *Kubín Josef*, VIII. rg., Hlučín, m.: 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, dg.: 1, 4; *Matějka Frant.*, VII. r., Brno, m.: 1, 2, 8, 10, 19, 22, dg.: 1—4; *Mikolášik Ľudevít*, VII. r., Žilina, m.: 2, 5, 8, 12, 21, 25, f.: 1—10, dg.: 2; *Minarič Janec*, VII. rg., Bratislava, m.: 8, 10, 12, 16, 21, 23, f.: 3, 5—8, 10; *Navrátil Jan*, VIII. rg., Litovel, m.: 8, 23, 25; *Ondrášek Bohuslav*, IV. roč. učit. ústav, Praha II, m.: 1, 5, 8, 21, 22, 23, f.: 1—4, 6—10; *Pecíková Mar.*, VII. rg., Trenčín, m.: 8; *Vitáček Ferd.*, V. rg., Praha XVI, m.: 1, 2, 5, 7—10, f.: 3, dg.: 1; *Wergner Frant.*, VII. r., Praha X, dg.: 1—5.

Udělení cen.

Redakce přihlížejíc k jakosti a počtu řešených úloh, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem Jednoty československých matematiků a fysiků:

Z matematiky:

První cenu obdrží: *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice a *Arnošt Knöpflmacher*, VIII. rg., Trenčín; druhou cenu obdrží *Jos. Kubín*, VIII. rg., Hlučín.

Z fysiky:

Obdrží ceny: ***Boh. Ondráček***, roč. IV. učit. ústav, Praha a *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice.

Z deskriptivní geometrie:

Obdrží ceny: *Libuše Doležalová*, VII. tř. r., Bratislava a *Frant. Wergner*, VII. tř. r., Praha X.

Z fondu Jaromíra Mareše:

Ceny obdrží: *Ferd. Vitáček*, V. tř. rg., Praha XVI a *Josef Kubal*, žák V. *b* třídy I. obecné chlapecké školy v Čes. Budějovicích, označený správou školy za nejlepšího počtáře.

Poznámka. Vypsané ceny za provedení úloh z deskr. geometrie ve vzorných rysech nebyly uděleny.

Upozornění. Posledním výnosem MŠO obsahujícím předpisy pro výroční zprávy středních škol bylo znemožněno, aby ve výročních zprávách byly otištěny maturitní úlohy z deskriptivní geometrie. Redakce chce v příštím ročníku Rozhledů otisknouti vybrané takové úlohy. Obrací se proto na pány profesory deskriptiváře s prosbou, aby jí zasílali lístkem přesné texty úloh z deskr. geometrie, které byly letošního roku na jejich ústavě dány při zkouškách dospělosti a vzdává za to předem svůj dík. (Adresa redakce: Praha II, Vodičkova 20.)
