Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Jeřábek

O Lehmusově větě

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 1, 20--25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122100

Sjednotí-li se konečně křivka A' s křivkou O, nastoupí na místo úseku tvořeného normálou křivky A' v bodě a' na normále křivky O v bodě o, poloměr křivosti křivky O v bodě o.

V odst. *f)* a *g)* jsou obsaženy také případy $\alpha = 0$ a $\alpha = 180^0$.

O Lehmusově větě.

Napsal

Ant. Jeřábek, professor v Klatovech.

V trojúhelníku ABC, *jehož úhly* A *a* B *rozpolují se příčkami* (AD = BE) *rovnými*, *jsou protější těmto úhlům strany* AC *a* BC *sobě rovny.*

Předpokládajíce vztahy dokázané v XIII. ročníku časopisu math. str. 133:

$$\text{(I)} \qquad CE : CD = OA : OB,$$

kdež O značí průsek obou příček,

$$\text{(II)} \qquad CE\,(BC + AB) = CD\,(AC + AB),$$

$$\text{(III)} \qquad \overline{AD}^2 = AC \,.\, AB - CD \,.\, CB,$$

hodláme doplniti řadu důkazů již uveřejněných.

Vyloučeny-li vzorce trigonometrické, v nichž skryto celé množství obratů algebraických, vyžaduje poučka tato důkazu dosti složitého, což tím se vysvětluje, že články řetězu rozborného, kterým důkaz se hledá, bez přibraných odjinud vět v postup obrácený vpraviti nelze. Aby totiž řetěz úsudků obrácen býti mohl, třeba jest návěstí takových, které se mohou obrátiti prostě; aby pak správnosť obratu jejich zřejma byla, jest ji zvláštním důkazem odůvodniti a tím hlavně látka důkazu se rozhojňuje. Protože pak pomůcky algebraické nejspíše se hodí k obracování návěstí a nejpohodlněji vedou k cíli, tož patrno, proč vzorce trigonometrické zde úlohu valně usnadňují; spolu zřejmo, že důkazu vyhledati tím snáze, čím větší algebře do něho dovoluje se přístup. — Vhodným dokladem toho, co pověděno, jest stať důkazu 4. (roč. XIII.).

Rozborný úsudek, jímž důkaz ten byl nalezen, skládá se vlastně z návěstí:

*a)**) *V rovnoramenném trojúhelníku jsou konce příček, které rozpolují úhly při podstavě, na přímce s podstavou rovnoběžné.*

b) Jsou-li konce příček, které rozpolují úhly při podstavě trojúhelníka, na přímce s podstavou rovnoběžné, jsou příčky ty sobě rovné.

Ačkoliv závěr těchto návěstí bezprostředně v mysl se vtírá, bylo přec látku rozvésti oklikou naznačenou, aby mohl býti odůvodněn obrat:

b') *Jsou-li příčky* AD *a* BE, *které rozpolují úhly trojúhelníka* ABC, *sobě rovny, jest* $ED \parallel AB$;

a') *je-li* $ED \parallel AB$, *jest* $BC = AC$:

tedy jest $BC = AC$, *je-li* $AD = BE$.

(Na témž základě spočívá také důkaz III. v poznámce níže uvedený.) Věta *b')* vyžadovala dosti složitého důkazu nepřímého, což nejlépe z toho vysvítá, že i celek (důk. 4.) nabyl rázu důkazu nepřímého, ač dokazována toliko nemožnosť popřeného důvodu, nikoliv však popřené položky.

Důkaz, jenž dovozuje nemožnosť protikladu položky, bylo by as vésti spůsobem tímto:

I. Opišme kruh kolem $\triangle$ ABC a prodlužme příčky AD a BE do L a J (obr. 13.).

Kdyby nebylo $AC = BC$, bylo by $AC < BC$ nebo $AC > BC$. Dejme tomu, že $AC < BC$, pak jest i $\sphericalangle A > \sphericalangle B$ a odtud $BD > AE$, protože potom v $\triangle$ ADB a $\triangle$ AEB dvě strany jsou stejné a úhly jimi sevřené nerovné; i jest též

$$DB : DA > EA : EB.$$

Protože však $\quad DB : DA = DL : DC$

a $\quad EA : EB = EJ : EC,$

jest také $\quad DL : DC > EJ : EC. \qquad (1)$

Opíšeme-li kolem $\triangle$ ACD a BCE kruhy, jsou stejné, protože nad stejnými tetivami $AD = BE$ ční stejný úhel obvodový

---

*) Důkaz *a)*: $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}$, $\frac{BC}{AB} = \frac{CE}{AE}$, proto $\frac{CD}{DB} = \frac{CE}{AE}$ a tedy $ED \parallel AB$.

Důkaz *b)*: $\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{CD}$, čili $AC \,.\, CD = BC \,.\, CE$. Protože pak

$$\overline{CO}^2 = AC \,.\, CD - OA \,.\, OD = BC \,.\, CE - OB \,.\, OE,$$

jest též $OA \,.\, OD = OB \,.\, OE$. Zároveň pak $OA \,.\, OE = OB \,.\, OD$ ($\triangle ABO \sim \triangle DEO$) a tedy $OA = OB$, $OD = OE$; odkud sečtením $AD = BE$.

C; i jest tedy v stejných kruzích tetiva $CD > CE$, protože k větším úhlům obvodovým, jsou-li ostré, přísluší větší tetivy.

Potom ale z nerovných poměrů (1) plyne, že $DL > EJ$ a odtud, že $AL > BJ$. Protože spolu $AC < BC$, jest poměr

$AC : AL$ menší než $BC : BJ$ a tedy $AD : AB < BE : AB$ ($\triangle ADB \sim \triangle ALC$; $\triangle AEB \sim \triangle BJC$), z čehož by $AD < BE$ vyplývalo, což se příčí podmínce. Podobně by vycházelo, že by $AD > BE$ bylo, kdyby zase $AC > BC$ bylo.

Jest tudíž $AC = BC$, což se mělo dokázati. —

Nebude snad od místa, budeme-li poučce Lehmusově i po té stránce věnovati pozornosť, abychom vyzkoumali, dá-li se při ní užíti logické věty Hauberovy, která při tak zvaných obrácených větách dobré konává služby. Věty Hauberovy lze upotřebiti vždy tenkrát, když byla poučka obrácená dovozena s celým pásmem vět sdružených, jejichž podmínky a výroky s podmínkou a výrokem jejím tvoří úplnou řadu protiv. Poohledneme-li se po vhodných větách sdružených s větou obrácenou, shledáváme podmínky jejich nejpřiměřenější: I. $AC < BC$, II. $AC > BC$, III. $AC = BC$.

V obecném případě není závislosť příček AD a BE na stranách AC a BC tak jednoduchá, aby v rámec tří vět s těmi podmínkami sňati se dala; bylo by tedy zpytovati, kterak jest rozčleniti případy zvláštní, aby cíle se došlo.

Bedlivější příhled k věci učí, že předem ve případě

a), když $\sphericalangle A$ *a* $\sphericalangle B$ *jsou oba ostré a příčky* AD *a* BE *větší jsou než strana* AB, jest látka důkazu schopna úpravy, jak ji žádá věta Hauberova. Pak totiž platí:

1. *Je-li* $AC < BC$, *jest* $AD < BE$.

Důkaz. (Obr. 14.). Protíná-li kruh opsaný nad průměrem AB ramena AC a BC v bodech F a G, příčky AD a BE v M a N a učiníme-li arc $NF =$ arc AF', arc $MG =$ arc BG', jest

$$\triangle ADG \sim \triangle ABG' \text{ a } \triangle BEF \sim BAF',$$

odkud vysvítá, že $$AD : AB = AG : AG' \qquad (1)$$
a $$BE : AB = BF : BF'. \qquad (2)$$

Protože $AD > AB$, jest $\sphericalangle B > \sphericalangle ADB$ a protože $\sphericalangle A > \sphericalangle B$ i $\sphericalangle ADB > \sphericalangle AEB$; neboť $\sphericalangle ADB = C + \frac{A}{2}$ a $\sphericalangle AEB = C + \frac{B}{2}$; jest tedy $\sphericalangle AEB < \sphericalangle ADB < \sphericalangle B < R$. Poněvadž k větším úhlům obvodovým, jsou-li ostré, přísluší v témž kruhu větší tetivy, jest $AG < BF$. Z téhož důvodu $AG' > BF'$, neboť $\sphericalangle ABG' > \sphericalangle BAF'$, protože $\sphericalangle ABG' = \sphericalangle ADB$ a $\sphericalangle BAF' = \sphericalangle AEB$. Podle toho $AG : AG' < BF : BF'$ a vzhledem k (1) a (2) $AD < BE$, což bylo dokázati. Podobně vyplývá:

2. *Je-li* $AC > BC$, *jest* $AD > BE$.

Přidružíme-li k 1. a 2. větu, kterou čtenář snadno dokáže:

3. *Je-li* $AC = BC$, *jest* $AD = BE$,

máme celé pásmo vět, jichž podmínky a výroky tvoří řadu protiv úplnou i můžeme pokládati za dokázanou větu:

V $\triangle ABC$, *jehož dva ostré úhly* $\sphericalangle A$ *a* $\sphericalangle B$ *rozpolují se příčkami rovnými* ($AD = BE$) *však většími než strana* AB, *jsou ramena* AC *a* BC *sobě rovná.*

Aby byla poučka Lehmusova dokázána v celém svém rozsahu, bylo by především doplniti důkaz i v tom případě,

b) když $AD = AB = BE$, kde příhledem k úhlu AOB snadně se dokáže, i v onom,

c) když AD a BE *jsou menší než* AB, při čemž by předpokládány byly $\sphericalangle A$ *a* $\sphericalangle B$ *ostré;* konečně pak zbývalo by, aby dokázáno bylo,

d) že rovné příčky AD *a* BE *vylučují trojúhelník, v němž jeden z rozpůlených úhlů jest pravý nebo tupý.*)*

Protože již ve případě *c)* nelze užíti poučky Hauberovy, vysvítá, že by nebyl důkaz obecné poučky ve všem stejného rázu; ostatně by důkaz *c)* vyžadoval týchž důvodů jako poučka obecná. Patrně nehodí se pro látku tuto forma logická Hauberova.

II. *Důkaz.* Označme $\sphericalangle A = 2\alpha$, $\sphericalangle B = 2\beta$, $\sphericalangle C = 2\gamma$.

Sřízneme-li $CB' = CA$ (obr. 15.) na rameni CB, jest

$DB' = AC - CD$ a $\sphericalangle AB'D = \alpha + \beta = \sphericalangle BOD$;

---

*) Je-li $\sphericalangle A = R$, dlužno rozeznávati dva případy buď α): $\sphericalangle ADB \geqq R$, pak $BE > AB > AD$; nebo β): $\sphericalangle ADB < R$; v případě β) nutno souditi takto: Kdyby $AD = BE$ bylo, bylo by $AB < AG$, ($AG \perp BC$), protože $\sphericalangle AEB < \sphericalangle ADB$ (v trojúhelnících s rovnou podponou AEB a DAG), což býti nemůže.

Tytéž případy platí i když $\sphericalangle A > R$; důkaz vede se zrovna tak, jen v případě β) dlužno spustiti BK kolmo na prodlouženou stranu CA i vyplývá pak, kdyby $AD = DE$, že $BK < AG$ (v $\triangle BEK$ a $\triangle AGD$), což býti nemůže; neboť $BK > AG$, protože $\sphericalangle BAK > \sphericalangle ABG$ (v pravoúhlých trojúhelnících ABK a ABG).

tedy $\triangle ADB' \sim \triangle BDO$, odkud $(AC - CD) : AD = OD : DB$.

Podobně též $BE : (BC - CE) = AE : OE$.

Protože $\sphericalangle OBD = \sphericalangle OBA$, $OD : DB = OA : AB$

a $\sphericalangle OAE = \sphericalangle OAB$, $AE : OE = AB : OB$.

Kromě toho dle (I) $CD : CE = OB : OA$.

Znásobíme-li stejnolehlé členy těchto úměr, vyplyne

$$AC \cdot CD - \overline{CD}^2 = BC \cdot CE - \overline{CE}^2.$$

Odečteme-li rovnici tuto od (II) a přičteme-li stejninu $CD \cdot CE = CD \cdot CE$, obdržíme

$$CE(AB + CE + CD) = CD(AB + CE + CD)$$

a tedy $CE = CD$; konečně podle (II) $AC = BC$.

III. *Důkaz.* Spojíme-li C s průsekem obou příček O, bude

$$BC : CE = OB : OE;$$
$$CD : AC = OD : OA.$$

Znásobíme-li obě tyto úměry se zčtvercovanou (I), obdržíme $BC \cdot CE : AC \cdot CD = OA \cdot OD : OB \cdot OE$ *), z níž sečtením předních a zadních členů plyne:

$$(OA \cdot OD + BC \cdot CE) : (OB \cdot OE + AC \cdot CD) = OA \cdot OD : OB \cdot OE. \quad (1)$$

Vyjádříme-li $\overline{CO}^2$ podle (III), jest

$$AC \cdot CD - OA \cdot OD = BC \cdot CE - OB \cdot OE$$

a také $OA \cdot OD + BC \cdot CE = OB \cdot OE + AC \cdot CD$.

Vložíme-li výsledek tento do (1), vyplyne, že $OA \cdot OD = OB \cdot OE$**) čili, že body A, B, D, E na témž kruhu se nalezají; potom ale příslušné obvodové úhly nad rovnými tětivami $(AD = BE)$ se rovnají t. j. $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABD$ a $AC = BC$. — Proč nemohou doplňovati se $\sphericalangle BAE$ a $\sphericalangle ABD$ na úhel přímý?

IV. *Důkaz.* Přetneme-li prodloužené příčky AD a BE vztažmo délkami $CF = CD$, $CG = CE$, bude

$$AD : AB = AF : AC \quad (\triangle ADB \sim \triangle AFC)$$

a $BE : AB = BG : BC \quad (\triangle ABE \sim \triangle BGC)$,

odkud $AF : BG = AC : BC$. (1)

*) Úměry této nabudeme také násobením:

$CE' : AC = OD : OB$ ($\triangle CE'A \sim \triangle OBD$ obr. 11. roč. XIII.) a

$BC : CD' = OA : OE$ ($\triangle CD'B \sim \triangle OAE$).

**) Z úměry (1) vyplývá též $AC \cdot CD = BC \cdot CE$ čili $AC : BC = CE : CD$, odkud zase $DE \parallel AB$, pak ale rovnoramenný $\triangle ADE \cong \triangle BED$ a $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$, z čehož $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ a $AC = BC$.

Protože body D a F leží na kruhu opsaném kolem C, jest

$$AD \,.\, AF = (AC + CD)\,(AC - CD).$$

Podobně

$$BE \,.\, BG = (BC + CE)\,(BC - CE).$$

Z obou těchto úměr se zřetelem ku (1):

$$AC : BC = (AC + CD)\,(AC - CD) : (BC + CE)\,(BC - CE). \quad (2)$$

Spustíme-li z průsecku obou příček O délku $OK \perp BC$ a $OL \perp AC$, jest $OL = OK$ ($\triangle OLC \cong \triangle OKC$) a proto

$$\triangle ACO + \triangle COD = \triangle ADC = \tfrac{1}{2}\, OL\,(AC + CD);$$
$$\triangle BOC + \triangle COE = \triangle BEC = \tfrac{1}{2}\, OL\,(BC + CE).$$

Uvedeme-li do poměru, jest

$$\triangle ADC : \triangle BEC = (AC + CD) : (BC + CE).$$

Protože ale $\triangle ADC$ a $\triangle BEC$ mají společný úhel vrcholový C, platí o nich též:

$$\triangle ADC : \triangle BEC = AC \,.\, CD : BC \,.\, CE,$$

tudíž $\quad AC \,.\, CD : BC \,.\, CE = (AC + CD) : (BC + CE). \quad (3)$

Dělíme-li stejnolehlé členy úměr (2) a (3), jest opět jako v důkaze II.

$$CD : CE = (BC - CE) : (AC - CD).$$

V. *Důkaz.* Z úměry (3) důkazu IV. vyplývá:

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{CE} + \frac{1}{BC}.$$

Násobíme-li výrazem $(CE + CD)$, nabudeme

$$\frac{CE}{CD} + \frac{CE + CD}{AC} = \frac{CD}{CE} + \frac{CE + CD}{BC}. \quad (a)$$

Z úměry (2) téhož snadně obdržíme

$$BC \,.\, \overline{AC}^2 + AC \,.\, \overline{CE}^2 = AC \,.\, \overline{BC}^2 + BC \,.\, \overline{CD}^2. \quad (b)$$

Dělíme-li (*b*) na CE, CD a přičteme-li $CE + CD$ bude

$$AC\left(\frac{AC \,.\, BC}{CE \,.\, CD} + \frac{CE}{CD} + \frac{CE + CD}{AC}\right)$$
$$= BC\left(\frac{AC \,.\, BC}{CE \,.\, CD} + \frac{CD}{CE} + \frac{CE + CD}{BC}\right),$$

odkud podle (*a*) $\quad AC = BC.$

Přehlédneme-li důkazy uvedené, shledáme, že důvody jen geometrickými vystačilo se toliko v důkaze nepřímém a že v přímých důkazech algebra nezbytnou byla pomůckou. — Patrně tedy povahou svou odkazuje poučka k důkazu nepřímému!