Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hromádko

# Rozšíření známé jedné úlohy geometrické

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 14 (1885), No. 1, 42--43

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122099`

$$x^3 + y^3 = 6\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, a\, xy = 6Axy,$$

na rovinu, která jsouc s asymptotou Descartesova listu rovnoběžná, svírá s jeho rovinou úhel, jehož cosinus jest roven $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Jest tedy trisektorie tuto odvozená křivkou *affinnou* čili *příbuznou* s listem *Descartesovým*, při čemž osa affinity jest rovnoběžná s jeho asymptotou, směr affinity pak k této normálný, a poměr affinitu karakterisující, rovná se $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dále dlužno připomenouti, že již v roč. X. pag. 153. tohoto časopisu dr. J. R. Vaňaus o trisektoriích pojednal a ku konci poznamenal, že sestavil přístroj zcela jednoduchý, kde pomocí dvojitého nuceného pohybu docílí se obraz příslušné trisektorie.

---

# Rozšíření známé jedné úlohy geometrické.

Žákům středních škol podává

**Fr. Hromádko**, prof. v Táboře.

Známou úlohu o vzniku ellipsy pošinováním koncových bodů určité délky $l = a_1 + b_1$ (kde $a_1 \gtreqless b_1$) po dvou pevných osách, dejme tomu pravoúhlých, lze rozšířiti takto:

Bod M, dělící délku $l$ v poměru $a_1 : b_1$ a opisující ellipsu, můžeme pokládati za vrchol C trojúhelníka ACB, jenž tu splynul v jedinou stranu $l = a_1 + b_1$, a tyto její části $a_1$ a $b_1$ za pravoúhlé průměty stran $BC = a$, $AC = b$ na jeho podstavu AB. (Obr. 20.)

Z obrazce patrno, že $BM = a_1 = a \cos \beta$,

$$AM = b_1 = b \cos \alpha;$$

jakož i

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1. \tag{1}$$

Budiž bod M úpatím výšky CM trojúhelníka ACB.

Vyšetřeme, jakou křivku vytvoří vrchol C tohoto trojúhelníka, pošinují-li se koncové body A a B jeho podstavy po dvou k sobě kolmých přímkách OX a OY, jež zvolíme za osy pravoúhlé soustavy souřadnicové.

Buďtež $\xi$ a $\eta$ souřadnicemi bodu C; dále budiž $\sphericalangle$ BAO $= \varphi$, CM $= k$. Z obr. 20. obdržíme snadno tyto vztahy:

$$\frac{x}{a_1} = \cos\varphi, \qquad \frac{y}{b_1} = \sin\varphi;$$

$$\xi = k\sin\varphi + x, \qquad \eta = k\cos\varphi + y,$$

aneb

$$\xi = x + \frac{k}{b_1}y, \qquad \eta = y + \frac{k}{a_1}x,$$

z čehož snadno se obdrží

$$\frac{x}{a_1} = \frac{b_1\xi - k\eta}{a_1 b_1 - k^2}, \qquad \frac{y}{b_1} = \frac{a_1\eta - k\xi}{a_1 b_1 - k^2}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty za poměry $\frac{x}{a_1}$ a $\frac{y}{b_1}$ do rovnice (1), obdržíme:

$$\left(\frac{b_1\xi - k\eta}{a_1 b_1 - k^2}\right)^2 + \left(\frac{a_1\eta - k\xi}{a_1 b_1 - k^2}\right)^2 = 1,$$

aneb

$$(b_1^2 + k^2)\,\xi^2 + (a_1^2 + k^2)\,\eta^2 - 2k\,(a_1 + b_1)\,\xi\eta = (a_1 b_1 - k^2)^2, \quad (2)$$

jakožto rovnici křivky, vytvořené bodem C.

Srovnáme-li rovnici (2) se všeobecnou rovnicí kuželoseček

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

shledáme, že v našem případě:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 2a_1 b_1 k^2 - (a_1^2 b_1^2 + k^4). \quad (3)$$

V rovnici (3) jest pro $a_1 \gtreqless b_1$ obecně*) $a_1^2 b_1^2 + k^4 > 2a_1 b_1 k^2$, pročež $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, t. j. rovnice (2) znamená ellipsu, jejíž střed jest v počátku souřadnic.

Je-li $\sphericalangle$ C v $\triangle$ ACB pravým, jest $a_1 b_1 = k^2$, a rovnice (2) nabývá tvaru:

$$b_1\xi^2 + a_1\eta^2 - 2\sqrt{a_1 b_1}\,\xi\eta = 0$$

čili

$$(\sqrt{a_1}\,\eta - \sqrt{b_1}\,\xi)^2 = 0,$$

což znamená přímku, procházející počátkem souřadnic. Bod C v tomto případě proběhne dvakráte jistou přímou úsečku, obsahující počátek souřadnic, t. j. ellipsu, jejíž menší osa jest nekonečně malou.

---

*) Důkaz, že ve čtverci dvojčlenu $(a + b)^2$ pro $a \gtreqless b$ jest $a^2 + b^2 > 2ab$, provedeme takto: Je-li $a > b$, jest též $a\,(a - b) > b\,(a - b)$, to jest $a^2 - ab > ab - b^2$; pročež $a^2 + b^2 > 2ab$.