Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Machovec

# O jistém druhu křivek

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 14 (1885), No. 1, 15--20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122098

jenžto za příčinou $O_1A_1 \parallel O_0A$ roven je střídavému úhlu

$$O_0AM \equiv \sphericalangle O_0AO_1 \equiv \sphericalangle O_0AM_1 .$$

Avšak úhel $O_0AO_1$ je středový úhel kruhového výkrojku $O_0AO_1 = \frac{O_0AO_n}{n}$ rovnajícího se rozvinutému kuželovému plášťku $M_0AM_1 = \frac{M_0AM_n}{n}$.

Označíme-li tedy literou U středový úhel rozvinutého pláště $M_0AM_n \equiv M_0AM_0$ přímého kužele $AM_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_0$, tož bude na místě $M \equiv O_1 \equiv M_1$ *Foucaultova odchylka*

$$A_1MA = \frac{U}{n}.$$

# O jistém druhu křivek.

Napsal

**F. Machovec**, professor v Karlíně.

*a)* „Buďtež dány v rovině dvě křivky A a B a bod $o$. V každém bodě $b$ křivky B sestrojena jest přímka svírající s paprskem $ob$ úhel stálé velikosti i směru $\alpha$ a na ní nanesena jest od bodu $b$ délka $bc = oa$, při čemž značí $a$ jeden z průsečníků přímky $ob$ s křivkou A. Krajní body $c$ délek $bc$ jsou na jisté křivce C, o jejíž normálu v libovolném její bodě nám jde.“ (Obr. 12.)

Jmenujeme-li $\varphi$ úhel polárný příslušný ku paprsku $ob$ a myslíme-li si, že se zvětší o $\Delta\varphi$, tu přejde bod $a$ v $a'$, $b$ v $b'$ a $c$ v $c'$, při čemž platí equipollence

$$oc \triangleq ob + bc$$

$$oc' \triangleq ob' + b'c'$$

tedy i $$oc' - oc \triangleq ob' - ob + b'c' - bc; \qquad (1)$$

avšak $$oc' - oc \triangleq cc'$$

$$ob' - ob \triangleq bb'$$

a $$b'c' \triangleq e^{i\alpha}\, oa'$$

$$bc \triangleq e^{i\alpha}\, oa,$$

t. j. $$b'c' - bc \triangleq e^{i\alpha}\,(oa' - oa) \triangleq e^{i\alpha} aa',$$

což vloženo do (1) poskytne

$$cc' \simeq bb' + e^{i\alpha} aa',$$

z níž jde dělením $\varDelta\varphi$

$$\frac{cc'}{\varDelta\varphi} \simeq \frac{bb'}{\varDelta\varphi} + e^{i\alpha}\frac{aa'}{\varDelta\varphi}. \qquad (2)$$

Jest patrno, že přímky $bc$ a $b'c'$, odchylujíce se každá o úhel $\alpha$ od přímek $ob$ a $ob'$, svírají jako tyto úhel $\varDelta\varphi$ a protínají se tudíž v bodě $o'$, který jest na kružnici procházející body $b$, $b'$ a $o$. Pro $\lim \varDelta\varphi = 0$ přejde tato kružnice v kružnici procházející bodem $o$ a dotýkající se křivky B v bodě $b$. Následkem toho prochází tato kružnice i bodem $d$, který jest společný normále křivky B v bodě $b$ a kolmici v pole $o$ na průvodič $ob$ vztyčené. Bod $o'$ jest průsečníkem přímky $bc$ s onou kružnicí.

Dále jest patrno, že

$$\lim \frac{bb'}{\varDelta\varphi} \simeq i\,.\,\overline{bd}, \qquad \lim \frac{aa'}{\varDelta\varphi} \simeq i\,.\,\overline{ar},$$

kdež význam délek $\overline{bd}$ a $\overline{ar}$ jest zřejmý z obrazce, a konečně

$$\lim \frac{cc'}{\varDelta\varphi} \simeq i\,.\,\overline{cp},$$

při čemž $\overline{cp}$ značí úsek normály křivky C obsažený mezi bodem $c$ a průsečníkem této normály s kolmicí v $o'$ na $o'c$ vztyčenou, čili s přímkou $o'd$.

Vložíce tyto hodnoty do (2), obdržíme

$$\overline{cp} \simeq \overline{bd} + e^{i\alpha}\,\overline{ar}.$$

Učiníme-li $\quad \overline{dt} \simeq e^{i\alpha}\,\overline{ar},$

jest $\quad \overline{bt} \simeq \overline{bd} + e^{i\alpha}\,\overline{ar},$

tudíž $\quad \overline{cp} \simeq \overline{bt}. \qquad (3)$

Již na základě této equipollence lze snadno zobraziti normálu křivky C v libovolném jejím bodě $c$, ale ještě snadněji lze dospěti k cíli takto: Z equipollence (3) vyplývá

$$\overline{tp} \simeq \overline{bc},$$

tedy i $\quad \overline{tp} \simeq e^{i\alpha}\,\overline{oa},$

a poněvadž dále $\quad \overline{dt} \simeq e^{i\alpha}\,\overline{ar},$

jest i $\quad \overline{dp} \simeq e^{i\alpha}\,\overline{or},$

ze kteréž equipollence plyne tato konstrukce normály v libovolném bodě $c$ křivky C:

*Zobrazí se normály křivek A a B v bodech* a *a* b; *učiní se* $od \perp ob$, $\sphericalangle xdp = \alpha$ *a* $dp = or$, *načež bodem p prochází normála křivky C v bodě c.*

Jak patrno, jsou $od$ a $or$ polární subnormály křivek A a B pro body $a$ a $b$.

*b)* Pro $\alpha = \begin{Bmatrix} 0 \\ 180^0 \end{Bmatrix}$ obdržíme křivky C tohoto zákona výtvarného:

„Každý průvodič $\varrho_c$ křivky C roven jest $\begin{Bmatrix} \text{součtu} \\ \text{rozdílu} \end{Bmatrix}$ průvodičů $\varrho_a$ a $\varrho_b$ daných křivek A a B, kteréž průvodiče jsou na témž paprsku jako $\varrho_c$ a náležejí k témuž polu $o$."

Z konstrukce normály v *a)* odvozené, vychází na jevo:

*Polární subnormála křivky C pro bod c rovna jest* $\begin{Bmatrix} \textit{součtu} \\ \textit{rozdílu} \end{Bmatrix}$ *polárních subnormál křivek A a B v bodech a* a *b.* *)

Budiž k odstavci *a*) a *b*) podotčeno, že k výsledkům v nich odvozeným lze dospěti v deskriptivní geometrii, přiložíme-li konstruktivným čarám, při zobrazování křivek C se vyskytujícím, určitý význam.

*c)* Je-li křivka A kružnice, jejíž střed jest v bodě $o$, jest křivka C odstavce *a) konchoidou de la Hirovou* a křivka C odst. *b) konchoidou obecnou.* Sestrojení normál křivek těchto vyplývá ihned z výsledků v odst. *a*) a *b*) nabytých, uvážíme-li, že v tomto případě polární subnormála kružnice A pro každý její bod $= 0$.

*d)* Na základě výsledků v *a*) a *b)* odvozených lze sestrojovati normály křivek C, jichž průvodiče $\varrho_c$ určeny jsou equipollencí

$$\varrho_c \doteq \lambda\varrho_a + \mu e^{i\alpha}\varrho_b,$$

při čemž $\varrho_a$ a $\varrho_b$ mají význam prvé vytčený a $\lambda$ a $\mu$ jsou stálá čísla.

---

*) Vlastnosť tato vyplývá snadno z polárních rovnic A a B.

| | | |
|---|---|---|
| Je-li rovnice křivky | A . . . | $\varrho_a = f(\varphi)$ |
| rovnice křivky | B . . . | $\varrho_b = F(\varphi)$, |
| jest rovnice křivky C | | $\varrho_c = f(\varphi) \pm F(\varphi)$, |

z níž jde differencováním podle $\varphi$

$$\frac{d\varrho_c}{d\varphi} = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \pm \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}$$

t. j. $s_c = s_a \pm s_b$, značí-li $s_a$, $s_b$ a $s_c$ polární subnormály křivek A, B a C.

Lze totiž $\lambda\varrho_a = \varrho'_a$ a $\mu\varrho_b = \varrho'_b$ pokládati za průvodiče křivek A′ a B′ podobných a podobně položených s křivkami A a B, při čemž $o$ jest středem podobnosti a $\lambda$ a $\mu$ jsou poměry podobnosti, načež jest

$$\varrho_c \triangleq \varrho'_a + e^{i\alpha}\varrho'_b,$$

t. j. vytvoření křivky C z křivek A′ a B′ jest totožné s vytvořením křivky C odstavec *a)* z křivek A a B. Uvážíme-li, že jsou-li $s_a$ a $s_b$ polární subnormály křivek A a B pro body $a$ a $b$, že polární subnormály křivek A′ a B′ v bodech $a'$ a $b'$ jsou $\lambda . s_a$ a $\mu . s_b$, obdržíme druhý určovací bod normály křivky C v bodě $c$, naneseme-li na kolmici vztyčenou v pole $o$ na průvodič bodu $a$ od bodu $o$ délku $\lambda s_a$ a připojíme-li k ní v příslušném směru pod úhlem $\alpha$ délku $\mu . s_b$. Koncem této délky prochází žádaná normála.

Pro $\alpha = \begin{Bmatrix} 0 \\ 180^0 \end{Bmatrix}$ jest $\varrho_c \triangleq \lambda\varrho_a \pm \mu\varrho_b$ a $s_c = \lambda s_a \pm \mu s_b$.

*e)* „Buďtež dány opět dvě křivky A a B a bod $o$. Úsečka $ab$ každého paprsku svazku $o$, obsažená mezi body $a$ a $b$ křivek A a B budiž rozdělena bodem $c$ dle určitého poměru. Geometrickým místem bodů $c$ jest *křivka diametrálná* C.“

Zobrazení normál křivky této vyplývá z odstavce *d)* těmito úvahami:

Body $c$ vyhovují podmínce,

$$\frac{ac}{bc} = \nu,$$

čili

$$\frac{\varrho_c - \varrho_a}{\varrho_c - \varrho_b} = \nu,$$

ze kteréž rovnice vyplývá

$$\varrho_c = \frac{1}{1-\nu}\varrho_a + \frac{\nu}{\nu - 1}\varrho_b.$$

Podle věty poslední v odstavci *d)* jest tudíž

$$s_c = \frac{1}{1-\nu}s_a + \frac{\nu}{\nu-1}s_b,$$

čili

$$\frac{s_c - s_a}{s_c - s_b} = \nu,$$

t. j. „*Normála křivky diametrálné C v bodě* c *dělí úsečku kolmice vztyčené v bodě* o *na* oa, *kteráž úsečka jest obsažena mezi nor-*

*málami křivek A a B v bodech* a *a* b, *dle téhož poměru, dle něhož dělí bod* c *úsečku* ab.“

V Bourgetově „Journal de mathématiques spéciales“ r. 1882 sv. 6. odvozuje Longchamps na str. 25—28. konstrukci tečen křivek diametrálných pro ten případ, že $\frac{ab}{ac} = -1$. Užívá k tomu vlastností tak zvaných recipročních transversál. *)

Na základě konstrustivných čar užitých při zobrazování křivek diametrálných, odvodil jsem zobrazení jich normál na jiném místě.

Jak se konstrukce normál promění v tom případě, že bod $o$ jest v nekonečné vzdálenosti, snadno lze odvoditi.

Jestliže místo bodu $o$, jímž paprsek $oa$ v pozorovaném případě stále procházel, nastoupí křivka O, na jichž tečnách jsou body $a$ a $b$ křivek A a B, změní se konstrukce normály křivky C jen potud, že místo kolmice vztyčené v $o$ na $oa$ vzíti jest normálu křivky O v bodě, v němž se jí $ab$ dotýká.

*f)* „Buďtež dány tři křivky A′, A a B a bod $o$. Libovolný paprsek svazku $o$ nechť protíná křivky ty v bodech $a'$, $a$ a $b$. Naneseme-li od každého bodu $b$ pod stálým úhlem $\alpha$ k paprsku $ob$ délku $bc = a'a$, jsou body $c$ na jisté křivce C.“

Můžeme si mysliti, že křivka C povstala také takto:

Učiníme při každém paprsku $ad = a'o$ a $bc = od$.

Body $d$ jsou na jisté křivce D, jejíž polární subnormála $s_d$ dle odstavce *b)* rovna jest $s_a - s'_a$. Z křivky D a z křivky B odvozena jest křivka C tak jako v *b)* křivka C z A a B, z čehož jde, že *připojíme-li k polární subnormále křivky B pod úhlem* $\alpha$ *délku* $s_a - s'_a$, *obdržíme bod, jímž normála křivky C v bodě* c *prochází.*

*g)* Z odstavce *f)* vyplývá zobrazování normál křivek, které jsou takto vytvořeny:

„Jsou dány čtyři křivky O, A′, A a B. Libovolná tečna křivky O, která se jí dotýká ku př. v bodě $o$, protíná ostatní tři křivky v bodech $a'$, $a$ a $b$. Od každého bodu $b$ nanesena jest pod stálým úhlem $\alpha$ ku oné tečně délka $bc = a'a$.“

Jest patrno, že normály křivky C, na níž jsou body $c$, zobrazují se tak jako v *f)*, jen že bod $o$ mění své místo na křivce O.

*) Viz také ve příčině těchto křivek Vaněčkův spis „Pošinování geom. útvarův.“

Sjednotí-li se konečně křivka A′ s křivkou O, nastoupí na místo úseku tvořeného normálou křivky A′ v bodě $a'$ na normále křivky O v bodě $o$, poloměr křivosti křivky O v bodě $o$. V odst. *f)* a *g)* jsou obsaženy také případy $\alpha = 0$ a $\alpha = 180^\circ$.

---

# O Lehmusově větě.

Napsal

**Ant. Jeřábek**, professor v Klatovech.

*V trojúhelníku* ABC, *jehož úhly* A *a* B *rozpolují se příčkami* (AD = BE) *rovnými, jsou protější těmto úhlům strany* AC *a* BC *sobě rovny.*

Předpokládajíce vztahy dokázané v XIII. ročníku časopisu math. str. 133:

$$\text{(I)} \qquad CE : CD = OA : OB,$$

kdež O značí průsek obou příček,

$$\text{(II)} \qquad CE\,(BC + AB) = CD\,(AC + AB),$$

$$\text{(III)} \qquad \overline{AD}^2 = AC \,.\, AB - CD \,.\, CB,$$

hodláme doplniti řadu důkazů již uveřejněných.

Vyloučeny-li vzorce trigonometrické, v nichž skryto celé množství obratů algebraických, vyžaduje poučka tato důkazu dosti složitého, což tím se vysvětluje, že články řetězu rozborného, kterým důkaz se hledá, bez přibraných odjinud vět v postup obrácený vpraviti nelze. Aby totiž řetěz úsudků obrácen býti mohl, třeba jest návěstí takových, které se mohou obrátiti prostě; aby pak správnosť obratu jejich zřejma byla, jest ji zvláštním důkazem odůvodniti a tím hlavně látka důkazu se rozhojňuje. Protože pak pomůcky algebraické nejspíše se hodí k obracování návěstí a nejpohodlněji vedou k cíli, tož patrno, proč vzorce trigonometrické zde úlohu valně usnadňují; spolu zřejmo, že důkazu vyhledati tím snáze, čím větší algebře do něho dovoluje se přístup. — Vhodným dokladem toho, co pověděno, jest stať důkazu 4. (roč. XIII.).

Rozborný úsudek, jímž důkaz ten byl nalezen, skládá se vlastně z návěstí: