Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Lošťák

Příspěvek ku trisekci úhlu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 1, 38--42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122092

kývadlo proběhne tudíž naznačenou (přímou) dráhu v jednom směru za dobu

$$t = \tfrac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Příspěvek ku trisekci úhlu.

Podává

Josef Lošťák,

professor v Olomouci.

Jest-li v polokruhu ADE (obr. 17.)

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \alpha,$$

a vede-li se přímka CE, jest $\sphericalangle AEC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC = \alpha$, pročež $EC \parallel OB$; ježto dále $\sphericalangle OEC = OCE = \alpha = \sphericalangle COD$, jest $OF = CF$. Jde-li tudíž o to, aby byl rozdělen daný úhel AOD na tři stejné díly, jest určiti na rameni jeho bod F tak, aby byl vrcholem rovnoramenného trojúhelníku OCF, jehož strana CF směřuje do bodu E. Jest-li $OG = GC$ a $GZ \perp OC$, jest GZ geometrickým místem vrcholů všech rovnoramenných trojúhelníků nad základnou OC. Otáčí-li se tedy rameno OC kolem bodu O, a přiléhá-li ku jeho konci C rameno EC, otáčející se kolem bodu E, protnou se přímky GZ a EC v bodě F, nalézajícím se na rameni OD daného úhlu $\sphericalangle AOD$, čímž jest dle hořejšího rozboru trisekce provedena.

K účelu tomuto shotovil jsem si sám a dal pak dle vzoru toho u mechanika z kovu urobiti trojramenné kružítko, jak na obr. 18. naznačeno jest. — Ramena I a II jsou stejně dlouhá, (při mém kružítku 10 cm), rameno III jest dvakráte tak dlouhé; I a II kolem N, I a III kolem M se otáčejí; osy tyto sbíhají dolů ve hroty. Lišty I a II jsou u N kruhem do poloviční tloušťky lišty, jedna svrchu, jedna zdola, tak vykrojeny, že otáčejí se v jedné rovině, nad níž pak rovnoběžně otáčí se lišta III. Na konci P ramena II upevněn jest tupý kolík, jehož dolejší část rovná se délce hrotů při M a N. Od středu R ramene II ($NR = RP$) jest na příčce S skulina, ku rameni NP kolmá, 5 mm široká a asi 7 cm dlouhá. Skulinou touto probíhají zvláštní saňky, ku stranám jejím těsně přiléhající a nesoucí ve svém středu rýsovátko U, jehož hrot přesně do prostředku skulinky padá a tudíž od konců N a P ramene II vždy ve stejné vzdálenosti zůstává. — Skulinka zmíněná jest u R pod přímku NP o polovičnou délku saněk pod R prodloužena, aby, když rameno II do prodloužení ramene I se otočí, rameno III nad oběma leželo, a tudíž rýsovátko U přesně do středu přímky NP dopadalo. Rameno III má taktéž ve svém podélném prostředku skulinku stejně širokou, jejíž délka od konce T asi 13 cm obnáší. Udané délky obou skulin dostačují ku roztřetění úhlů až do 135^0. Skulinka ramene III objímá kolík rýsovátka U a hořejší část kolíku P, kterýžto kolíky jsou právě tak tlusté, jako skulinka jest široká.— Držím-li rameno I za knoflík K a otáčím-li rameno II kolem N, pošinuje se i rameno III, posouvajíc rýsovátko U ve skulině RS.

Mám-li daný úhel XOY (obr. 17.) rozděliti na tři rovné části, zasadím hrot N do vrcholu O, hrot M v opačném prodloužení ramene OX do E, a otáčím pak II kolíkem P okolo N, až rýsovátko protne druhé rameno OY daného úhlu v bodě F; popíši pak z·O poloměrem OE kružnici EDA, vedu přímku EF až do C, pak OB || EC a konečně OC. Znamenám-li $\sphericalangle$ AEC $= \alpha$, jest dle sestrojení $\sphericalangle$ BOA $= \alpha$, $\sphericalangle$ OCE $= \alpha = \sphericalangle$ COB, $\sphericalangle$ COF $= \sphericalangle$ OCF $= \alpha = \frac{1}{3} \sphericalangle$ AOD.

Křivku, již rýsovátko tohoto trojramenného kružítka popisuje, snadně sestrojíme, naneseme-li na kružnici OAB (obr. 19.) stejné oblouky A1 $=$ 12 $=$ 23 $= \ldots$ a protínáme-li poloměry O3, O6, O9,... přímkami B2, B4, B6,..., čímž vzniká křivka CMDBE... $+ \infty - \infty$... FBGC.

Budiž O polem, OX osou polárné soustavy souřadnicové (obr. 19.). Z obr. patrno, že OM $= r$, $\sphericalangle$ XOM $= \varphi$, OC $= a = \frac{1}{2}$OA, MN $\perp$ ON, jakož i ON $= a$, $\sphericalangle$ NOM $= \frac{\varphi}{3}$. Z $\triangle$ ONM pak plyne

$$r = a \sec \frac{\varphi}{3}, \qquad (1)$$

jakožto polárná rovnice trisektorie.

Přeložíme-li pol do bodu B, jest

$$\sphericalangle \text{CBM} = v = \frac{\varphi}{3}, \quad \text{BM} = \varrho, \quad \sphericalangle \text{O4M} = v.$$

Z obrazce vysvítá:

$$\varrho = B4 + 4M = BA\cos v - \frac{N4}{\cos v},$$

t. j. $$\varrho = 4a\cos v - \frac{a}{\cos v} = a\,(4\cos v - \sec v),$$

čili $$\varrho\cos v = a\,(4\cos^2 v - 1)\,. \tag{2}$$

Zvolme bod B za počátek, přímku BA za osu X-ovou pravoúhlé soustavy souřadnicové. Dosadíme-li do (2)

$$\varrho\cos v = x,\quad \cos^2 v = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

obdržíme ihned rovnici trisektorie vzhledem k této soustavě ve formě:

$$x = a\,(4\,\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 1),$$

aneb $$x(x^2 + y^2) = a\,(3x^2 - y^2)\,. \tag{3}$$

Tato trisektorie má asymptotu VV′ vyjádřenou rovnicí $x = -a$, a tedy kolmou k ose X-ové.

Ke kružítku svrchu popsanému podotýkám, že vzorek můj, jejž mi mechanik beze vší přílišné dovednosti shotovil, docela dobře pracuje. Záležíť hlavně na tom, aby saňky s rýsovadlem do skulinky RS (obr. 18.) přiměřeně upraveny byly, a aby pošinujíce se rýsovátko vždy kolmo ku rovině kružitka držely. Za rýsovátko hodí se zde velmi dobře oblíbená nyní tužka v držení otáčivém, pro jejíž držení upraveny jsou saňky, oběma skulinkama procházející.

Není pochybnosti, že dovedný mechanik shotoví kružítko to tak dokonale, že vyhoví pak požadavkům i nejpřísnějším. Nebude tudíž vážné závady, aby kružítko to i ve školách se zavedlo. Již na prvním stupni učby elementární geometrii žák snadně porozumí, jak kružítko sestaveno jest, a jak se jím pracuje. Důkaz pak o správnosti konstrukce není nijak nesnadnější, než onen při dělení úhlu na 2 rovné části. Z těchže důvodů očekávati lze, že konstrukce zde podaná též do učebních knih elementární geometrie přijata bude.

Ku praktickému dělení úhlu na tři rovné části postačí však s dostatek pouze čtverníková výseč OCMDO (obr. 19.) křivky této, kteráž by arciť od mechanika kružítkem dokonale vyrobeným na kovovém listě sestrojena a správně vyseknuta býti musila. Položí se pak O do vrcholu daného úhlu a C na jedno rameno, naznačí se body, v nichž obě ramena úhlu obvodem křivky se protínají, popíše se poloměrem $= 2 \, . \, OC$ polokruh a t. d., jak nahoře udáno. Že způsob tento v praksi úplně vyhovuje, shledáno s dostatek na výseči křivky z tuhého papíru.

Ku článku tomuto vidí se redakci poznamenati toto:

Učiníme-li v obr. 17. $DH \parallel CE$, jest $\operatorname{arc} EJ = \operatorname{arc} CD$, z čehož vychází na jevo, že $\sphericalangle JOE = AOB = \alpha$, ale poněvadž i $\sphericalangle EHJ = \alpha$, jest $JH = OJ = OA$ a z toho vyplývá známá, jednoduchá trisekce úhlu starých. Jest totiž jen na proužek papíru rovně šříznutý nanésti délku $OA = 2a$ a uvésti proužek ten do takové polohy, aby jeden konec délky $2a$ padl na EX', druhý konec na kružnici a aby rovná hrana proužku procházela bodem D. Čára OB, rovnoběžná jsouc s touto polohou hrany proužku, utne z úhlu AOB třetinu. (Viz ku př. Fialkowski: „Die zeichnende Geom.“ str. 21.). Co se týče křivky, jež jest popisována hrotem U přístroje, lze z rovnice její snadno poznati, že má v bodě B bod dvojný a že tečny její v tomto bodě svírají s OX úhly 60^0 a 120^0. Zvolíme-li druhou tečnu za novou osu úseček a první za osu pořadnic a označíme-li souřadnice v této nové soustavě kosoúhlé ξ a η, platí transformační vzorce

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad y = \frac{\eta - \xi}{2} \sqrt{3},$$

a rovnice

$$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2) \tag{3}$$

přejde v rovnici

$$\xi^3 + \eta^3 = 6a\xi\eta,$$

která se shoduje s rovnicí Descartova listu v soustavě pravoúhlé. Jest to tudíž list Descartův ve smyslu širším. Kdežto totiž ve vlastním listu Descartově svírají tečny v bodě dvojném úhel 90^0, svírají při této křivce úhel 120^0. Z toho také vychází na jevo, že křivka, o níž v tomto pojednání jde, může býti pokládána za orthog. průmět Descartova listu (ve smyslu užším), jehož rovnicí v soustavě pravoúhlé obou tečen v bodě dvojném jest

$$x^3 + y^3 = 6\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, a\, xy = 6Axy,$$

na rovinu, která jsouc s asymptotou Descartesova listu rovnoběžná, svírá s jeho rovinou úhel, jehož cosinus jest roven $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Jest tedy trisektorie tuto odvozená křivkou *affinnou* čili *příbuznou* s listem *Descartesovým*, při čemž osa affinity jest rovnoběžná s jeho asymptotou, směr affinity pak k této normálný, a poměr affinitu karakterisující, rovná se $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dále dlužno připomenouti, že již v roč. X. pag. 153. tohoto časopisu dr. J. R. Vaňaus o trisektoriích pojednal a ku konci poznamenal, že sestavil přístroj zcela jednoduchý, kde pomocí dvojitého nuceného pohybu docílí se obraz příslušné trisektorie.

Rozšíření známé jedné úlohy geometrické.

Žákům středních škol podává

Fr. Hromádko, prof. v Táboře.

Známou úlohu o vzniku ellipsy pošinováním koncových bodů určité délky $l = a_1 + b_1$ (kde $a_1 \gtreqless b_1$) po dvou pevných osách, dejme tomu pravoúhlých, lze rozšířiti takto:

Bod M, dělící délku l v poměru $a_1 : b_1$ a opisující ellipsu, můžeme pokládati za vrchol C trojúhelníka ACB, jenž tu splynul v jedinou stranu $l = a_1 + b_1$, a tyto její části a_1 a b_1 za pravoúhlé průměty stran $BC = a$, $AC = b$ na jeho podstavu AB. (Obr. 20.)

Z obrazce patrno, že $BM = a_1 = a \cos \beta$,
$AM = b_1 = b \cos \alpha$;

jakož i
$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1. \qquad (1)$$

Budiž bod M úpatím výšky CM trojúhelníka ACB.

Vyšetřeme, jakou křivku vytvoří vrchol C tohoto trojúhelníka, pošinují-li se koncové body A a B jeho podstavy po dvou k sobě kolmých přímkách OX a OY, jež zvolíme za osy pravoúhlé soustavy souřadnicové.