Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Küpper

Převedení polynomu $z^n - a_1 z^{n-1} + cdotspm a_n$ na produkt geometrických délek

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 1, 28--30

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122089`

$$
\begin{aligned}
D_1 = & [(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i)] \\
& [(a+b+c)+\varepsilon(d+e+f)+\varepsilon^2(g+h+i)] \\
& [(a+b+c)+\varepsilon^2(d+e+f)+\varepsilon(g+h+i)] \\
& [(a+d+g)+\varepsilon(b+e+h)+\varepsilon^2(c+f+i)] \\
& [(a+d+g)+\varepsilon^2(b+e+h)+\varepsilon(c+f+i)] \\
& [(a+e+i)+\varepsilon(d+h+c)+\varepsilon^2(g+b+f)] \\
& [(a+e+i)+\varepsilon^2(d+h+c)+\varepsilon(g+b+f)] \\
& [(a+f+h)+\varepsilon(b+d+i)+\varepsilon^2(g+c+e)] \\
& [(a+f+h)+\varepsilon^2(b+d+i)+\varepsilon(g+c+e)],
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon^3 = 1.$

Ces déterminants possèdent des propriétés curieuses: peut-être n'ont ils pas encore été étudiés.

Liége, le 17 Juin 1884.

Převedení polynomu $z^n - a_1 z^{n-1} + \ldots \pm a_n$ na produkt geometrických délek.

Napsal

Karel Küpper,

professor při c. k. německé vysoké škole technické v Praze.

Hodnoty $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nechť repraesentují libovolné pevné body v rovině, hodnota z pak proměnný bod její.

I. Produkt geometrických délek $(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$ nabývá všech hodnot, je-li z neobmezeně proměnnou t. j. proběhne-li bod z celou rovinu.

Důkaz. *a)* Argument onoho součinu se mění spojitě zároveň s hodnotou z; a sice mu přibude o $\nu \,.\, 2\pi$, proběhne-li bod z kladným směrem (t. j. v kladném směru úhlovém) uzavřenou čáru L, uvnitř které se nalézá ν oněch pevných bodů, aniž však některý se nalézá na ní.

b) Modul onoho součinu může patrně nabýti každé hodnoty Q. Zbývá ještě ukázati, že existuje vždy uzavřená čára svírající alespoň jeden z oněch pevných bodů a na níž se modul součinu na žádném místě neodchyluje o konečnou hodnotu od veličiny Q. Volíme-li pak tuto čáru za čáru L, o níž jednáno v *a)*, tu plyne ihned žádaná věta.

Bodem z_1 veďme libovolnou přímku G a dejme tomu, že z se pohybuje na této přímce z bodu z_1 určitým směrem do nekonečna; tu se mění modul součinu spojitě z o do ∞, musí tudíž v jistém místě a poskytovati *poprvé* nekonečně malý rozdíl od Q. Vedeme-li nyní bodem z_1 přímku G′ sousední s G a stanovíme-li na ní onen bod a', v němž vycházejíce ze z_1 *poprvé* nalézáme hodnotu modulovou Q (aneb hodnotu od Q o nekonečně málo různou), tu se musí nalézati a' nekonečně blízko u a. Neboť kdyby byl bod a' o konečnou délku blíže u z_1 na př. v bodu b, tu by též na G v sousedství bodu b musila hodnota modulu o nekonečně málo se různiti od Q, pročež by a nebylo místem ku z_1 nejbližším v němž ona hodnota se vyskytuje. — Otáčí-li se nyní přímka G kolem z_1 a stanovíme-li v každé její poloze body a', a'', ..., v nichž se modul Q *nejprvé* vyskytuje, tvoří tyto body spojitou čáru L vedoucí po jednom otočení nazpět do bodu a. Že L svírá bod z_1, vychází tím na jevo, že jdouce z bodu z_1 na přímce G ale směrem opáčným ku $z_1 a$ nalezneme též jistý bod α té vlastnosti, že mu přísluší modul součinu různící se nekonečně málo od Q, a že mezi z_1 a α žádný takový bod se nenalézá. Při otáčení přímky G musí však některý z bodů a', a'', ... dospěti do α, a poněvadž lze místo G voliti kteroukoli z přímek G′, G″, ... za počátečnou, je zjevno, že každá bodem z_1 vedená přímka obsahuje dva body čáry L položené po různých stranách bodu z_1.

II. Rozvineme-li onen součin geometrických délek, máme tvar

$$z^n - a_1 z^{n-1} + \ldots \pm a_n = \mathrm{P}_n.$$

Naopak: Pylonom P_n lze vyjádřiti jakožto součin n geometrických délek o pevných bodech počátečných a o témž bodu koncovém.

Důkaz. Nechť se věc takto má až po stupeň $n-1$ včetně, pak vychází totéž i pro stupeň n. Neboť

$$\begin{aligned} z^n - a_1 z^{n-1} + \ldots \pm a_n &= z(z^{n-1} - a_1 z^{n-2} + \ldots) \pm a_n \\ &= z(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1}) \pm a_n. \end{aligned}$$

Volme nyní $z = z_0$ tak, aby

$$z_0(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)\ldots(z_0 - z_{n-1}) = \mp a_n,$$

věc to dle I. vždy možná, i máme pak P_n ve tvaru

$$z^n - a_1 z^{n-1} + \ldots \mp z_0(z_0{}^{n-1} - a_1 z_0^{n-2} + \ldots)$$
$$= (z^n - z_0^n) - a_1(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \ldots = (z - z_0)\,\mathrm{P}_{n-1},$$

značí-li P_{n-1} polynom stupně $n-1$-ho. Poněvadž však

$$\mathrm{P}_{n-1} = (z - z'_1)\ldots(z - z'_{n-1}),$$

máme

$$\mathrm{P}_n = (z - z_0)(z - z'_1)\ldots(z - z'_{n-1}). \qquad \text{Q. E. D.}$$

Příspěvek k nauce o číslech.

Píše

Vilém Jung,
assistent na české vysoké škole technické v Praze.

1. Soustavu n jednoduchých shod formy $x_k \equiv \alpha_k \pmod{a_k}$ řešil Euler jednoduše vzorcem

$$x \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{A}_k u_k \ (\mathrm{mod.}\ \prod_{k=1}^{n} a_k),$$

kde $\mathrm{A}_k = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}{a_k}$, a veličiny u_k se určí ze soustavy shod formy $\mathrm{A}_k u_k \equiv 1 \pmod{a_k}$.*)

Má-li se však řešiti soustava shod jednoduchých:

$$\begin{array}{l} \beta_1 x \equiv \alpha_1 \ (\mathrm{mod.}\ a_1) \\ \beta_2 x \equiv \alpha_2 \ (\mathrm{mod.}\ a_2) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \beta_k x \equiv \alpha_k \ (\mathrm{mod.}\ a_k) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \beta_n x \equiv \alpha_n \ (\mathrm{mod.}\ a_n), \end{array} \qquad (1)$$

kde jsou k sobě příslušné veličiny β_k, a_k nesoudělnými, nutno uvésti soustavu (1) na jednodušší, kde obecně $\beta_k = 1$, což se provede, řeší-li se jednotlivé shody dle x. Na základě soustavy jednodušších shod dospěje se pak způsobem Eulerovým nebo Gaussovým **) ku shodě výsledné.

Řešení shod soustavy (1) obejdeme na základě následující jednoduché úvahy.

---

*) Viz dr. Studničky: „Nauka o číslech" pg. 137. §. 23.

**) ibid. pag. 139.