

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Vorovka

Poznámka k problému ruinování hráčů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 562--567

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122081>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1912

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Poznámka k problému ruinování hráčů.

Napsal dr. K. Vorovka.

Huygens ve svém díle *De ratiociniis in ludo aleae* uvádí ke konci pět úloh, jichž rozřešení podal Jakub Bernoulli v památné knize *Ars conjectandi*. Poslední z úloh těch jest zároveň jednoduchým případem problému známého pod jménem „trvání hry“ aneb „ruinování hráčů“.

Hrají-li spolu dva hráči A a B s pravděpodobností výhry v jednotlivé hře p a q , a jsou-li známy jejich sázky a a b , jakož i kapitály x a y , pak zajímavý jsou hlavně dvě otázky: Předně možno počítati pravděpodobnost, že A bude ruinován při hře, která se může v neomezeném počtu opakovati, dokud jeden z obou hráčů nepřijde o všecken majetek. Za druhé možno se ptáti, jaká je pravděpodobnost, že hráč A bude ruinován průběhem určitého konečného počtu her.

Zabýváti se budeme případem prvním.

Jelikož oba během hry proměnlivé kapitály hráčů doplňují se na stálou summu s , můžeme na základě rovnice $x + y = s$ považovati pravděpodobnost zruinování kteréhokoliv hráče za funkci jediné proměnné x neb y dle libosti.

Budiž tedy pravděpodobnost ruiny pro hráče A vyjádřena neznámou funkcí $u(x)$, pro hráče B funkcí $v(x)$.

J. Bernoulli vypočítal tyto funkce ve zvláštním případě úlohy Huygensovy, která předpokládá sázku jedna proti jedné, a verifikoval pak dodatečně výpočtem, že identicky splňuje se rovnice

$$u(x) + v(x) = 1,$$

vyjadřující patrně *jistotu*, že při neomezeném trvání hry jeden neb druhý hráč bude ruinován.

Jak Todhunter*) uvádí, dal se tento výsledek očekávati, neboť prostý rozum tomu nasvědčuje.

Tuto zásadu *bez důkazu* přijal také De Moivre do svého pojednání *De Mensura Sortis* (probl. IX.) a do své knihy *The*

*) Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, str. 63

Doctrine of Chances (probl. VII.). Todhunter*) vytyká, že řešení, které podal De Moivre, nebylo úplné. De Moivre našel totiž napřed duchaplným způsobem poměr pravděpodobností obou hráčů a pak bez důkazu přijal za jisto, že během neomezeně dlouhé řady her jeden z obou hráčů musí býti ruinován. Mohl pak ovšem ihned odvoditi také absolutní hodnoty obou pravděpodobností.

Laplace ve svém klassickém díle podává podrobný rozbor problému trvání hry zabývaje se hlavně jeho těžší druhou částí, když počet hraných partií jest konečný. Ale tu okolnost, že jeden nebo druhý hráč při neomezeném trvání hry jistě bude ruinován, pomíjí mlčením.

Poincaré**) ve svém díle o pravděpodobnosti uvádí jen jednoduchý výpočet Bernoulliův, akcentuje však, že *a priori* nebyla vyloučena možnost, aby se hra prodloužila do nekonečna při stálém vyrovnávání zisků a ztrát.

Skutečný obecný důkaz, že jeden nebo druhý hráč jistě bude ruinován, našel jsem jen v. knize Bertrandově***). Důkaz ten jest veden pouze slovy bez výpočtů, ačkoliv tím ničeho neztrácí na svojí exaktnosti.

Obsahuje asi následující úvahu: Je-li počet her značný, pak i ta pravděpodobnější kombinace má pravděpodobnost *velmi malou*, která dle Stirlingovy formule jest nepřímo úměrna druhé odmocnině z celkového počtu her. Totéž bude tím spíše platiti o každé jiné kombinaci aneb i o každé konečné skupině kombinací, pokud ovšem počet kombinací ve skupině obsažených nebude zároveň s počtem her do nekonečna vzrůstatí. Při určitém počtu všech partií smí však počet partií jedním hráčem vyhraných jen v takových mezích kolísati, aby ani jeden ani druhý hráč neztráceli více, než co jejich původní majetek obnáší. Difference mezi oběma těmito mezemi jest stálá a od celkového počtu her zcela nezávislá. Roste-li tedy celkový počet her do nekonečna, klesá pravděpodobnost omezeného počtu kombinací pod každou mez. Jinými slovy: Jeden z obou hráčů jistě bude při neomezeném trvání hry ruinován.

*) Tamtéž str. 147.

**) Poincaré, Calcul des probabilités, str. 48.

***) Bertrand, Calcul des probabilités, str. 105.

Při tomto důkazu lze pouze namítnouti, že dokazuje více, nežli je třeba; neboť týká se takového způsobu hry, kdy by teprve konečná bilance o ruinování hráče rozhodovala, kdežto ve skutečnosti hráč může býti několika prvými po sobě prohranými partiiemi ruinován.

Domnívám se, že k povaze úlohy lépe přiléhá důkaz následující, založený na lineárné rovnici s konečnými diferenciemi

$$u(x) = pu(x+b) + qu(x-a), \quad (1)$$

která snadno se odvodí ze zásad pravděpodobnosti složitě. Rovnice tato jest řádu m -tého, kdež jest $m = a + b$, a integruje se analogicky jako lineárné rovnice diferenciální s konstantními koeficienty. Položíme zde $u(x) = \alpha^x$ a obdržíme obecný integrál

$$u(x) = C_1\alpha_1^x + C_2\alpha_2^x + \dots + C_m\alpha_m^x,$$

v němž $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ značí kořeny rovnice

$$p\alpha^{a+b} - \alpha^a + q = 0. \quad (2)$$

Rovnice tato vždy má jednotkový kořen $\alpha_1 = 1$, protože jest $p + q = 1$. Kořen tento může však také býti dvojnásobným. Stane se to tenkrát, je-li hra spravedlivá, t. j. jsou-li sázky v poměru pravděpodobností

$$a : b = p : q.$$

Jiných násobných kořenů není.

Obecný integrál může tedy míti podobu buď při hře nespravedlivé

$$u(x) = C_1 + C_2\alpha_2^x + C_3\alpha_3^x + \dots + C_m\alpha_m^x$$

aneb při hře spravedlivé

$$u(x) = C_1 + C_2x + C_3\alpha_3^x + \dots + C_m\alpha_m^x.$$

Bertrand z těchto integrálů podržuje pouze první dva členy a stačí mu tedy k stanovení libovolných konstant dvě podmínky

$$u(0) = 1 \quad \text{a} \quad u(s) = 0,$$

značící jistotu resp. nemožnost ruiny.

Postup Bertrandův není ovšem zcela přesný, jak vytkl A. Markov *). Dlužno však podotknouti, že Bertrand upozorňuje čtenáře na odchylky, které by od jeho vzorců nastaly, kdyby hráč nepřišel sice o všechno jmění, ale neměl ani obnos ku sázce postačující.

Pracujeme-li s úplným integrálem, musíme přibrati ku stanovení všech m konstant ještě další $m - 2$ podmínky. Tyto mohou dle konvencí hry býti dvojí. Buď ve smyslu poznámky Bertrandovy považuje se hráč za ruinovaného, jakmile zbytek jeho jmění jest menší než sázka, aneb připouští se i pak ještě ku hře a za ruinovaného platí teprve, když se další prohrou zadlužil.

V prvním případě jsou celkové podmínky

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, u(1) = 1, \dots u(a-1) = 1, \\ u(s) &= 0, u(s-1) = 0, \dots u(s-b+1) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

v druhém případě pak

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, u(-1) = 1, \dots u(-a+1) = 1, \\ u(s) &= 0, u(s+1) = 0, \dots u(s+b-1) = 0. \end{aligned}$$

Pro další vývody jest lhostejno, kterých podmínek se přidržíme. Zvolme tedy právě jako Markov podmínky první. Ovšem výpočet kořenů rovnice (2) byl by obtížný a proto jest žádoucí, aby se raději jinou cestou našla přibližná hodnota místo přesného výrazu pro funkci $u(x)$, a to jest právě předmětem článku, jež uveřejnil Markov.

Za to však lze výrazu přesného použití ku provedení důkazu o jistotě ruiny.

Vypočítejme jako pro hráče A též pravděpodobnost ruiny pro hráče B . Analogicky budeme míti ku stanovení funkce $v(x)$ rovnici

$$v(x) = pv(x+b) + qv(x-a), \quad (4)$$

která je s rovnicí pro $u(x)$ zcela totožná. I její integrál bude míti stejnou podobu, buď

$$v(x) = D_1 + D_2\alpha_2^x + D_3\alpha_3^x + \dots + D_m\alpha_m^x$$

*) Bulletin de la Société phys.-math. de Kasan, 1903.

Protože determinant této soustavy obsahuje v prvním sloupci samé jednotky, vyjde patrně $E_1 = 1$, kdežto

$$E_2 = E_3 = \dots = E_m = 0$$

a tudíž identicky

$$f(x) = 1.$$

Odsud však vyplývá, že také rovnice

$$u(x) + v(x) = 1$$

jest splněna identicky a že tedy průběhem neomezeně dlouhé hry jeden z obou hráčů *jistě bude ruinován*.

Podstatu tohoto důkazu tvoří ta okolnost, že rovnice pro α má vždy jeden kořen jednotkový. Důkaz vedl by se obdobně, když by hra nebyla spravedlivá aneb když by hráč teprve při zadlužení považován byl za ruinovaného.

Příspěvek k diferenciální geometrii jednodílného hyperboloidu.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

Zvolme na jednodílném hyperboloidu libovolnou povrchovou přímku p , na ní bod α , a sestrojme křivku t , která prochází bodem α a protíná orthogonálně všechny povrchové přímky soustavy Σ , do níž náleží p . Trajektorie t jest transcendentní křivka, která protíná p v nekonečně mnoha bodech; označme je, jak na p jeden po druhém následují, když se v určitém směru pohybujeme po t vycházejíce z bodu α , písmenami

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$$

Budiž α' libovolný bod na p mezi α a β . Bodem α' prochází jistá orthogonální trajektorie t' soustavy Σ ; nejbližší její průsek s p označme písmenou β' .

Dle známé věty o orthogonálních trajektoriích povrchových přímk*) jest

$$\overline{\alpha\alpha'} = \overline{\beta\beta'}, \quad \overline{\alpha'\beta} = \overline{\beta'\gamma}$$

a proto též

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\beta\gamma} = \overline{\gamma\delta} = \dots = l.$$

*) Viz na př. *Scheffers*: Einführung in die Theorie der Flächen (1902) p. 217.