Antonín Pleskot

Důkaz věty Pascalovy pro kruh

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 636--637

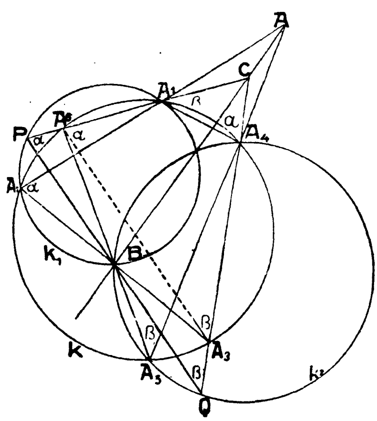
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122077

Důkaz věty Pascalovy pro kruh.

Dr. Ant. Pleskot, professor v Plzni.

Věta Pascalova pro kruh odůvodňuje se elementárním způsobem užitím věty Menelaovy.

Uvádím zde jiný elementární důkaz bez použití věty Menelaovy, který předpokládá jen znalost vlastnosti chordály dvou kružnic. Důkaz tento odjinud znám mi není.



Obr. 1.

Budiž dán kruh K a na jeho obvodu šest libovolných bodů: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Průsečík stran A_1A_2 a A_4A_5 budiž A, průsečík stran A_2A_3 a A_5A_6, B a konečně průsečík stran A_3A_4 a A_6A_1 budiž C.

Body A_1, A_2 a bodem B proložme kružnici K_1 a vrcholy protější strany, t. j. A_4 a A_5 a opět bodem B kružnici K_2. Spojnice AB jest pak chordálou dvou kružnic K_1 a K_2; neboť bod A má vzhledem ke kružnicím K_1 a K_2 tutéž mocnost jako ke kružnici K a bod B jest průsečíkem kružnic K_1 a K_2.

Má-li bod C ležeti na přímce AB, pak zbývá ukázati, že má tutéž mocnost ke kružnicím K_1 a K_2; to lze takto dokázati.

Strana A_4A_3 nechť protíná kruh K_2 mimo bod A_4 v bodě Q a strana A_1A_6 kruh K_1 mimo bod A_1 v bodě P. Snadno lze ukázati, že přímka PQ prochází bodem B; to dokážeme, odůvodníme-li, že spojnice BP i BQ jsou rovnoběžny s přímkou A_3A_6.

Označíme-li úhel $\sphericalangle BPA_1$, α, tu úhel tento stojí v kružnici K_1 nad obloukem $\widehat{BA_1}$; nad týmž obloukem v téže kružnici stojí obvodový $\sphericalangle BA_2A_1$, a poněvadž tento úhel stojí nad obloukem $\widehat{A_1A_3}$ v kružnici K a nad týmž obloukem v téže kružnici stojí $\sphericalangle A_1A_6A_3$, jest $\sphericalangle A_1A_6A_3 = \sphericalangle BPA_1 = \alpha$. Jest proto $BP \parallel A_6A_3$.

Úhel $\sphericalangle BQA_4$ označme β. Tento úhel stojí v kruhu K_2 nad obloukem $\widehat{BA_4}$; nad tímže obloukem a v téže kružnici stojí obvodový úhel $\sphericalangle BA_5A_4$; tento úhel stojí však v kružnici K nad obloukem $\widehat{A_6A_4}$ a nad týmž obloukem v téže kružnici stojí úhel obvodový $\sphericalangle A_6A_3A_4$; jest proto $\sphericalangle BQA_4 = \sphericalangle A_6A_3A_4 = \beta$ a přímka $BQ \parallel A_6A_3$. Jest tedy přímka BP i BQ rovnoběžná s přímkou A_3A_6, t. j. spojnice PQ prochází bodem B.

Úhel $\sphericalangle CA_1A_4$ vyplňuje se s úhlem $\sphericalangle A_6A_1A_4$ na 180^0; poněvadž i úhel $\beta = \sphericalangle A_6A_5A_4$ vyplňuje se s úhlem $\sphericalangle A_6A_1A_4$ na 180^0, jest úhel $\sphericalangle CA_1A_4 = \beta$ a z týchž příčin i úhel $\sphericalangle A_1A_4C = \alpha$.

Trojúhelníky CA_1A_4 a CPQ jsou tedy podobny a z podobnosti jich plyne:

$$CP : CQ = CA_4 : CA_1;$$

t. j.

$$CP \,.\, CA_1 = CQ \,.\, CA_4.$$

Bod C má tedy tutéž mocnost ke kružnicím K_1 a K_2, t. j. leží na jich chordále AB.

Přímka Pascalova jest tedy chordála kružnic K_1 a K_2.