Rudolf Hruša

Poznámky k theorii kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 639--646

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122074

bodu M, vrcholu to pravého úhlu AMH, jehož ramena pevnými body A, H procházejí, je kružnice o průměru AH.

Analogické kružnice lze obdržeti, které mají hořejší úseky dalších dvou výšek trojúhelníka za průměry.

Poznámky k theorii kuželoseček.

III.

Kuželosečky rovnoběžníku vepsané.

Napsal **Rudolf Hruša.**

1. Budiž dán kosodélník o stranách $2u$, $2v$. Zvolme střed kosodélníku za počátek kosoúhlé soustavy a střední příčky za osy souřadné. Strany kosodélníku dány jsou rovnicemi:

$$x \mp u = 0, \quad y \mp v = 0;$$

jaké jest geom. místo všech ohnisek kuželoseček vepsaných?

Otázku tu zodpověděl Lippmann v Nouvelles Annales (t. VI, 2e série) roku 1867 pro čtyřúhelník obecný. Geometrické místo ohnisek jest křivka 3. stupně. Dá-li se čtyřúhelníku vepsati kruh, má křivka zmíněná ve středu téhož kruhu bod dvojný. Důkaz provedl týž mathematik vycházeje od věty, že součin vzdáleností obou ohnisek od tečny kuželosečky rovná se dvojmoci malé poloosy. (B. Niewenglowski, Cours de géometrie analytique, tome II. p. 243.) Dá se očekávati, že u rovnoběžníku se tato křivka degeneruje. (Niewenglowski, Tome II, p. 251, exercices 24.)

V dalších vývodech přidržíme se methody M. G. Lippmanna. Označme vzdálenosti ohniska $f(x, y)$ od stran kosodélníku: m, n, p, q, vzdálenosti ohniska druhého $f'(x', y')$ od stran téhož kosodélníku: m', n', p', q'. Přímo názorem vedeni jsme k relacím:

$$m = p', \quad n = q', \quad p = m', \quad q = n'.$$

Dle svrchu zmíněné věty jest patrně:

$$mp = nq = b^2,$$

kdež m, n, p, q jsou dány relacemi:

$$m = (x - u) \sin \omega$$
$$n = (y - v) \sin \omega \qquad [\omega \text{ je úhel kosodélníku}]$$
$$p = (x + u) \sin \omega$$
$$q = (y + v) \sin \omega.$$

Máme tudíž vztah:

$$(x - u)(x + u) \sin^2 \omega = (y - v)(y + v) \sin^2 \omega.$$

Rovnice hledaného geometrického místa všech ohnisek jest tvaru:

$$x^2 - y^2 = u^2 - v^2. \tag{1}$$

Rovnice ta náleží hyperbole, která prochází všemi vrcholy kosodélníku. Poněvadž asymptoty její jsou přímky:

$$A_1 \equiv x - y = 0, \qquad A_2 \equiv x + y = 0,$$

které spolu svírají úhel pravý, jest zmíněná hyperbola rovnoramenná.

2. Kuželosečky rovnoběžníku vepsané mají střed s tímto společný a proto jest jejich rovnice tvaru:

$$K \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - D = 0;$$

mají-li se dotýkati stran kosodélníku, jest nutné a stačí, by kvadratické rovnice vzhledem k neznámým y, resp. x:

$$Au^2 + 2Buy + Cy^2 - D = 0,$$
$$Ax^2 + 2Bxv + Cv^2 - D = 0$$

měly dvojné kořeny. Vyslovená podmínka vede přímo k těmto relacím:

$$B^2u^2 = C(Au^2 - D),$$
$$B^2v^2 = A(Cv^2 - D),$$

které můžeme psáti ve tvaru:

$$CD = u^2(AC - B^2),$$
$$AD = v^2(AC - B^2).$$

Diskriminant $AC - B^2$ značme symbolem Δ, načež dají se veličiny A, B, C, D vyjádřiti parametrem L definovaným relací:

$$L = \frac{D^2}{\varDelta} = \frac{D^2}{AC - B^2}$$

a sice takto:

$$A : D = \frac{v^2}{L}, \quad B : D = \frac{\sqrt{u^2v^2 - L}}{L}, \quad C : D = \frac{u^2}{L}. \qquad (2)$$

Rovnici vepsaných kuželoseček můžeme psáti ve tvaru tomto:

$$v^2x^2 + 2xy\sqrt{u^2v^2 - L} + u^2y^2 - L = 0. \qquad (3)$$

V této rovnici, která formálně je totožná s rovnicí (a) v „Poznámce II.“ str. 100, vystupuje jediný neurčitý parametr. Na místě parametru L můžeme zavésti rationálný parametr λ rovnicí: $\sqrt{u^2v^2 - L} = \lambda uv$, čímž se rovnice (3) málo pozmění a sice ve tvar:

$$v^2x^2 + 2xyuv\lambda + u^2y^2 - u^2v^2(1 - \lambda^2) = 0, \qquad (3a)$$

$$A : D = \frac{1}{u^2(1 - \lambda^2)}, \qquad B : D = \frac{\lambda}{uv(1 - \lambda^2)},$$

$$C : D = \frac{1}{v^2(1 - \lambda^2)}. \qquad (2a)$$

Osy kuželoseček jsou kořeny rovnice:

$$X^4 - [u^2 + v^2 + 2\lambda uv \cos\omega]\, X^2 + (1 - \lambda^2)\, u^2v^2 \sin^2\omega = 0.$$

Z rovnice té, jejíž kořeny jsou a, b, plyne:

$$a^2b^2 = (1 - \lambda^2)\, u^2v^2 \sin^2\omega = L \sin^2\omega;$$

obsah vepsaných ellips jest dán formulí:

$$\pi ab = \pi \,.\, \sqrt{L} \,.\, \sin\omega$$

a je tudíž přímo úměrný odmocnině z parametru L čili naopak parametr L je ve stálém poměru s dvojmocí obsahu příslušné ellipsy vepsané.

Výstřednost je dána rovnicí:

$$e^4 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 \cos 2\omega + 4\lambda uv\,(u^2 + v^2) \cos\omega$$
$$+ 4\lambda^2u^2v^2. \qquad (5)$$

Osy kuželosečky můžeme vyjádřiti pomocí výstřednosti a parametru λ takto:

$$a^2 = \frac{u^2 + v^2 + 2\lambda uv \cos \omega + e^2}{2},$$
$$b^2 = \frac{u^2 + v^2 + 2\lambda uv \cos \omega - e^2}{2}. \tag{6}$$

Užitím relací (5) a (6) můžeme řešiti úlohy:

Do daného kosodélníku vepsati kuželosečku, známe-li buďto výstřednost její nebo délku některé poloosy.

Uvážíme-li, že úhlopříčny kosodélníku jsou dva sdružené směry pro všechny vepsané kuželosečky, tu můžeme rovnici jejich při vhodné volbě os souřadných psáti ve tvaru:

$$\frac{v^2 x^2}{\lambda} + \frac{u^2 y^2}{u^2 - \lambda} = v^2. \tag{7}$$

Uvedené úlohy dají se pomocí (7) řešiti rovněž tak snadno jako dříve.

Směry os dány v prvém případě těmito rovnicemi:

$$x\,(a^2 - u^2 + u^2\lambda^2) + y\left(a^2 + \frac{uv\,(1 - \lambda^2)}{\lambda}\right) = 0,$$

$$x\,(b^2 - u^2 + u^2\lambda^2) + y\left(b^2 + \frac{uv\,(1 - \lambda^2)}{\lambda}\right) = 0.$$

Rovnici (7), zevšeobecněnou pro čtyřúhelník obecný $ABCD$, najde čtenář v citovaném díle Niewenglowského (díl I, p. 429) ve tvaru:

$$\frac{X^2}{\lambda} + \frac{Y^2}{1 - \lambda} = Z^2,$$

kdež X, Y, Z jsou lineárné trojčleny takové, že

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = 0,$$

značí rovnice úhlopříček úplného čtyrstranu o vrcholech A, B, C, D, a rovnice:

$$X + Y + Z = 0, \quad X + Y - Z = 0, \quad X - Y + Z = 0,$$
$$-X + Y + Z = 0,$$

náleží stranám téhož.

3. Rovnice kuželosečky, která se dotýká všech stran rovnoběžníku, při čemž zároveň prochází bodem $G(x_1, y_1)$, má tvar:

$$v^2x^2 + 2uvxy\lambda + u^2y^2 - u^2v^2(1 - \lambda^2) = 0. \qquad (3a)$$

Parametr λ jest stanoven kvadratickou rovnicí:

$$u^2v^2\lambda^2 + 2uvx_1y_1\lambda + v^2x_1^2 + u^2y_1^2 - u^2v^2 = 0. \qquad (3b)$$

Řešením této rovnice přímo dostaneme tento resultát:

$$uv\lambda = -x_1y_1 \pm \sqrt{(u^2 - x_1^2)(v^2 - y_1^2)}. \qquad (3c)$$

Tvar křivky závisí na znamení diskriminantu rovnice (3a), jenž jest tvaru:

$$\varDelta = \lambda^2u^2v^2 - u^2v^2 = u^2v^2(\lambda^2 - 1)$$
$$= x_1^2(y^2 - v^2) \pm 2x_1y_1\sqrt{(u^2 - x_1^2)(v^2 - y_1^2)} + y_1^2(x_1^2 - u^2).$$

Je-li diskriminant kladný, jest, jak známo, křivka hyperbola, případu, že se annulluje, odpovídá degenerace téže ve dvě přímky, a záporný diskriminant přísluší ellipse. Při tom mlčky supponujeme realitu parametru λ; nutná i dostatečná podmínka této reality jest vyjádřena nerovností

$$(u^2 - x_1^2)(v^2 - y_1^2) > 0.$$

Nerovnosti té můžeme vyhověti dvojím způsobem a to:

1. $(u - x_1)(u + x_1) > 0, \qquad (v + y_1)(v - y_1) > 0,$
2. $(x_1 - u)(x_1 + u) > 0, \qquad (y_1 - v)(y_1 + v) > 0.$

Druhou podmínku splňují ony body ležící vně rovnoběžníku, které se nalézají mezi prodlouženými sousedními stranami jeho. V tom případě pišme diskriminant ve tvaru:

$$\varDelta = (x_1\sqrt{y_1^2 - v^2} \pm y_1\sqrt{x_1^2 - u^2})^2,$$

z něhož patrno, že jest kladný pro všechny body splňující podmínku druhou, a že kuželosečky těmi body procházející jsou vesměs hyperboly.

Body uvnitř rovnoběžníku splňují podmínku první. V tom případě můžeme diskriminant psáti ve tvaru:

$$\varDelta = -(x_1\sqrt{v^2 - y_1^2} \pm y_1\sqrt{u^2 - x_1^2})^2,$$

z čehož patrno, že jest záporný, pokud je splněna podmínka prvá. —

Tedy můžeme vysloviti tento výrok: Body uvnitř rovnoběžníku ležícími procházejí reálné ellipsy; body, ležícími v prodloužených úhlech, procházejí dvě hyperboly; body, ležícími v pásech omezených protějšími stranami rovnoběžníku, neprochází žádná reálná kuželosečka.

4. Zajímavý a jednoduchý výraz obdrží se pro úhel kuželoseček, které se v bodě G protínají. Pro tangentu tohoto úhlu máme v soustavě kosoúhlé formuli:

$$tg\,\varphi = \frac{(A_2 - A_1)\,sin\,\omega}{1 + A_1 A_2 + (A_1 + A_2)\,cos\,\omega},$$

kdež značí A_1, A_2 směrnice obou tečen v bodě G.

Jsou-li λ, λ' kořeny rovnice (3b), jest patrně:

$$A_1 = -\frac{v^2 x_1 + uv\lambda y_1}{u^2 y_1 + uv\lambda x_1}, \qquad A_2 = -\frac{v^2 x_1 + uv\lambda' y_1}{u^2 y_1 + uv\lambda' x_1}.$$

Postupně dále obdržíme:

$$A_2 - A_1 = \frac{(\lambda - \lambda')(u^2 y_1^2 - v^2 x_1^2)}{(u^2 y_1 + uv\lambda x_1)(u^2 y_1 + uv\lambda' x_1)}$$

$$1 + A_1 A_2 =$$

$$\frac{v^4 x_1^2 + u^4 y_1^2 + uv x_1 y_1 (n^2 + v^2)(\lambda + \lambda') + u^2 v^2 (x_1^2 + y_1^2)\lambda\lambda'}{(u^2 y_1 + uv\lambda x_1)(u^2 y_1 + uv\lambda' x_1)}$$

$$A_1 + A_2 =$$

$$\frac{2u^2 v^2 x_1 y_1 + (v^2 x_1^2 + u^2 y_1^2)(\lambda + \lambda')\,uv + 2u^2 v^2 y_1 x_1 \lambda\lambda'}{(u^2 y_1 + uv\lambda x_1)(u^2 y_1 + uv\lambda' x_1)}.$$

Do těch formulí dlužno za $\lambda - \lambda'$, $\lambda + \lambda'$, $\lambda\lambda'$ zavésti hodnoty plynoucí z rovnice (3b) ve tvaru:

$$uv(\lambda + \lambda') = -2x_1 y_1,$$
$$uv(\lambda - \lambda') = \pm 2\sqrt{(y_1^2 - v^2)(x_1^2 - u^2)},$$
$$u^2 v^2 \lambda\lambda' = v^2 x_1^2 + u^2 y_1^2 - u^2 v^2,$$

načež obdržíme, že $A_1 + A_2 = 0$ a dále postupně:

$$tg\,\varphi =$$

$$\frac{\pm 2(v^2 x_1^2 - u^2 y_1^2)\sqrt{(x_1^2 - u^2)(y_1^2 - v^2)}}{a^4 x_1^2 + u^4 y_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)(v^2 x_1^2 + u^2 y_1^2 - u^2 v^2) - 2x_1^2 y_1^2 (u^2 + v^2)}$$

$$\times\, sin\,\omega,$$

$$tg\,\omega = \frac{\pm 2(v^2 x_1^2 - u^2 y_1^2)\sqrt{(x_1^2 - u^2)(y_1^2 - v^2)}}{(u^2 y_1^2 - v^2 x_1^2)(u^2 - v^2 - x_1^2 + y_1^2)}\,sin\,\omega.$$

V případě, že jest dvojčlen: $u^2 y_1^2 - v^2 x_1^2$ roven nulle, leží bod G na úhlopříčně rovnoběžníku, jedna z kuželoseček se degeneruje. Vyloučíme-li ten případ, máme pro úhel kuželoseček formuli:

$$tg\,\varphi = 2\frac{\sqrt{(x_1^2 - u^2)(y_1^2 - v^2)}}{u^2 - v^2 - x_1^2 + y_1^2}\,sin\,\omega. \tag{8}$$

Rovnici tu můžeme uvésti ve tvar:

$$2 sin\,\omega\, cotg\,\varphi = \sqrt{\frac{v^2 - y_1^2}{u^2 - x_1^2}} - \sqrt{\frac{u^2 - x_1^2}{v^2 - y_1^2}}. \tag{8*}$$

Geometrické místo všech bodů, v nichž se vepsané kuželosečky protínají v úhlu stálém φ, obdržíme, když ve formuli (8) vynecháme indexy, píšíce x, y místo x_1, y_1. Na první pohled se zdá, že tu máme před sebou křivku čtvrtého stupně, ale zevrubným vyšetřováním přicházíme k poznání, že se křivka rozpadá ve dvě kuželosečky.

Rovnici (8*) můžeme řešiti dle proměnné ξ stanovené rovnicí:

$$\xi = \sqrt{\frac{v^2 - y_1^2}{u^2 - x_1^2}},$$

čímž dostaneme:

$$\xi = sin\,\omega\, cotg\,\varphi \pm \sqrt{sin^2\omega\, cotg^2\varphi + 1};$$

rovnice hledaných kuželoseček jsou tvaru:

$$\begin{aligned} x^2\xi_1^2 - y^2 &= u^2\xi_1^2 - v^2, \\ x^2\xi_2^2 - y^2 &= u^2\xi_2^2 - v^2, \\ \xi_1 &= sin\,\omega\, cotg\,\varphi + \sqrt{sin^2\,\omega\, cotg^2\,\varphi + 1}, \\ \xi_2 &= sin\,\omega\, cotg\,\varphi - \sqrt{sin^2\,\omega\, cotg^2\,\varphi + 1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Pro $\varphi = 90^0$, jest $\xi_1 = \xi_2 = 1$, a rovnice obou kuželoseček jsou tvaru jednoduššího a sice:

$$x^2 - y^2 = u^2 - v^2.$$

Ta rovnice však odpovídá oné hyperbole H, která obsahuje všechna ohniska vepsaných kuželoseček.

Můžeme vysloviti tyto dvě poučky:

„Geometrické místo všech bodů, ve kterých se protínají kuželosečky ve stálém úhlu φ, jsou dvě hyperboly procházející vrcholy rovnoběžníku.“

„Geometrické místo všech ohnisek vepsaných kuželoseček do rovnoběžníku jest rovnoramenná hyperbola H; asymptoty této hyperboly mají od stran rovnoběžníku stejné odchylky. Ve všech bodech této hyperboly protínají se kuželosečky vepsané v úhlu pravém."

5. V případě, že se jedná o čtyrúhelník obecný, je uvažované geometrické místo křivka vyššího stupně než čtvrtého (po případě až stupně desátého). Jedná-li se o deltoid, skládá se hledané geometrické místo z křivky čtvrtého stupně a z osy souměrnosti deltoidu.

Je-li daný rovnoběžník kosočtverec, zjednoduší se dosud uvedené formule, do kterých nutno vložiti všude

$$v = u.$$

Geometrické místo všech bodů, jimiž procházející kuželosečky se protínají v úhlu φ, jsou hyperboly, jejichžto rovnice jsou tvaru:

$$x^2 - \xi_1^2 y^2 = u^2 (1 - \xi_1^2),$$
$$x^2 - \xi_2^2 y^2 = u^2 (1 - \xi_2^2),$$

kdež ξ_1, ξ_2 má týž význam jako dříve. Pro ten případ, že $\varphi = 90^0$, splynou obě hyperboly a degenerují se ve dvojici přímek danou rovnicí:

$$x^2 - y^2 = 0,$$

a jsou tudíž totožny s úhlopříčnami kosočtverce. Všechny kuželosečky vepsané do kosočtverce protínají úhlopříčny tohoto v úhlu pravém.

Formule (6) nabývají pro kosočtverec tohoto tvaru:

$$\begin{aligned} e^2 &= 2u^2 (\lambda + \cos \omega) \\ a^2 &= u^2 (1 + \lambda)(1 + \cos \omega) \\ b^2 &= u^2 (1 - \lambda)(1 - \cos \omega). \end{aligned} \tag{6*}$$

Z formulí dosavadních plynou též dříve odvozené formule pro ten případ, že rovnoběžník je obdélníkem nebo čtvercem. (Poznámky k theorii kuželoseček II., str. 98, 99.)