

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Hromádko

Krychlový obsah šikmého rovnoběžnostěnu bez užívání sférické trigonometrie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 2, 123--124

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122069>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1882

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Krychlový obsah šikmého rovnoběžnostěnu bez užívání sférické trigonometrie.*)

Podává

Fr. Hromádko, professor v Táboře.

Hrany kosohlého rovnoběžnostěnu (AJ), vybíhající ze společného rohu (A) buďtež pro krátkost vyjádřeny číselnými hodnotami takto:

$$AE = a; AB = b; AD = c,$$

úhly těchto hran pak:

$$\widehat{bc} = \alpha; \widehat{ac} = \beta; \widehat{ab} = \gamma$$

a předpokládejme, že těchto šest veličin známe. Z rohu (E) spustíme kolmici $EL \perp$ na rov. ABCD a rovněž $LK \perp AB$ a vedmež přímkou EK, o které snadno lze dokázat, že $EK \perp AB$. Spojme konečně bod L s A přímkou LA a nazvemež úhel $\sphericalangle LAB = x$; pročež $\sphericalangle LAD = \alpha - x$. Výšku $EL = k$ nutno především vypočítati, neboť krychlový obsah rovnoběžnostěnu AJ, jež chceme prozatím označiti literou P, se rovná:

$$P = bck \sin \alpha. \quad (1)$$

Z $\triangle ALK$ jest

$$AL = \frac{AK}{\cos x} = \frac{a \cos \beta}{\cos x}.$$

Spustíme-li s bodu L rovněž kolmici na hranu (c), bude z téhož důvodu

$$AL = \frac{a \cos \beta}{(\cos \alpha - x)};$$

pročež:

$$\frac{\cos \gamma}{\cos x} = \frac{\cos \beta}{\cos (\alpha - x)}$$

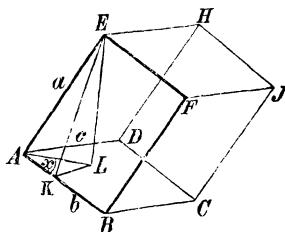
čili

$$\cos \alpha \cos x \cos \gamma + \sin \alpha \sin x \cos \gamma = \cos \beta \cos x$$

nebo:

$$\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \operatorname{tg} x = \cos \beta,$$

z čehož



*) Pro žáky posledních dvou tříd středních škol.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \cos \gamma} \quad (2)$$

Úhel EKL budiž roven $\sphericalangle B$ (úhel sklonu obou stěn). I jest

$$\cos B = \frac{LK}{EK}.$$

Dále jest

$$AK = a \cos \gamma; \quad EK = a \sin \gamma; \quad LK = AK \operatorname{tg} x,$$

pročež

$$\cos B = \frac{LK}{EK} = \frac{\cos \gamma \operatorname{tg} x}{\sin \gamma}. \quad (3)$$

Nahradíme-li za $\operatorname{tg} x$ hodnotu z rov. (2) do rov. (3), obdržíme

$$\cos B = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}. \quad (4)$$

Uvážíme-li dále, že

$$1 + \cos B = 2 \cos^2 \frac{B}{2} \quad (5)$$

$$a \quad 1 - \cos B = 2 \sin^2 \frac{B}{2}, \quad (6)$$

konečně, že

$$\sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

a výška k z $\triangle ELK$, že se rovná

$$k = a \sin \gamma \sin B;$$

krychlový pak obsah

$$P = abc \sin \alpha \sin B \sin \gamma;$$

obdržíme na základě těchto vztahů (rovnice 4, 5, 6) pro krychlový obsah šikmého rovnoběžnostěnu souměrný vzorec:

$$P = 2 abc \sqrt{\sin s \cdot \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)}, \quad (7)$$

ve kterém

$$s = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

a hledaná výška

$$k = \frac{2a}{\sin \alpha} \sqrt{\sin s \cdot \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)};$$

konečně

$$\sin B = \frac{k}{a \sin \gamma} = \frac{2}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)}.$$