František Hromádko

Krychlový obsah šikmého rovnoběžnostěnu bez užívání sférické trigonometrie

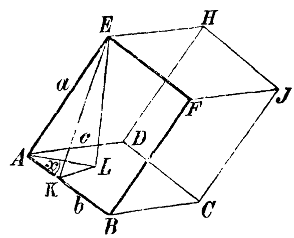
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 2, 123--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122069

Krychlový obsah šikmého rovnoběžnostěnu bez užívání sférické trigonometrie.*)

Podává

Fr. Hromádko, professor v Táboře.



Hrany kosoúhlého rovnoběžnostěnu (AJ), vybíhající ze společného rohu (A) buďtež pro krátkost vyjádřeny číselnými hodnotami takto:

$$AE = a;\ AB = b;\ AD = c,$$

úhly těchto hran pak:

$$\widehat{bc} = \alpha;\ \widehat{ac} = \beta;\ \widehat{ab} = \gamma$$

a předpokládejme, že těchto šest veličin známe. Z rohu (E) spusťme kolmici EL $\perp$ na rov. ABCD a rovněž LK $\perp$ AB a veďmež přímku EK, o které snadno lze dokázati, že EK $\perp$ AB. Spojme konečně bod L s A přímkou LA a nazvemež úhel $\sphericalangle LAB = x$; pročež $\sphericalangle LAD = \alpha - x$. Výšku EL $= k$ nutno především vypočítati, neboť krychlový obsah rovnoběžnostěnu AJ, jejž chceme prozatím označiti literou P, se rovná:

$$P = bck \sin \alpha. \qquad (1)$$

Z $\triangle ALK$ jest

$$AL = \frac{AK}{\cos x} = \frac{a \cos \gamma}{\cos x}.$$

Spustíme-li s bodu L rovněž kolmici na hranu (c), bude z téhož důvodu

$$AL = \frac{a \cos \beta}{(\cos \alpha - x)};$$

pročež:

$$\frac{\cos \gamma}{\cos x} = \frac{\cos \beta}{\cos (\alpha - x)}$$

čili

$$\cos \alpha \cos x \cos \gamma + \sin \alpha \sin x \cos \gamma = \cos \beta \cos x$$

nebo:

$$\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \operatorname{tg} x = \cos \beta,$$

z čehož

*) Pro žáky posledních dvou tříd středních škol.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos\beta - \cos\alpha \cos\gamma}{\sin\alpha \cos\gamma} \qquad (2)$$

Úhel EKL budiž roven $\sphericalangle$ B (úhel sklonu obou stěn). I jest

$$\cos B = \frac{LK}{EK}.$$

Dále jest

$$AK = a\cos\gamma;\ EK = a\sin\gamma;\ \ LK = AK \operatorname{tg} x,$$

pročež

$$\cos B = \frac{LK}{EK} = \frac{\cos\gamma \operatorname{tg} x}{\sin\gamma}. \qquad (3)$$

Nahradíme-li za tg x hodnotu z rov. (2) do rov. (3), obdržíme

$$\cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}. \qquad (4)$$

Uvážíme-li dále, že

$$1 + \cos B = 2\cos^2\frac{B}{2} \qquad (5)$$

a

$$1 - \cos B = 2\sin^2\frac{B}{2}, \qquad (6)$$

konečně, že

$$\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

a výška k z $\triangle$ELK, že se rovná

$$k = a\sin\gamma\sin B;$$

krychlový pak obsah

$$P = abc\sin\alpha\sin B\sin\gamma;$$

obdržíme na základě těchto vztahů (rovnice 4, 5, 6) pro krychlový obsah šikmého rovnoběžnostěnu souměrný vzorec:

$$P = 2\,abc\sqrt{\sin s \,.\, \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}, \qquad (7)$$

ve kterém

$$s = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

a hledaná výška

$$k = \frac{2\,a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin s \,.\, \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)};$$

konečně

$$\sin B = \frac{k}{a\sin\gamma} = \frac{2}{\sin\alpha\sin\gamma}\sqrt{\sin s\sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}.$$