Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O větě Pappusově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 2, 111--122

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122060`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1899

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

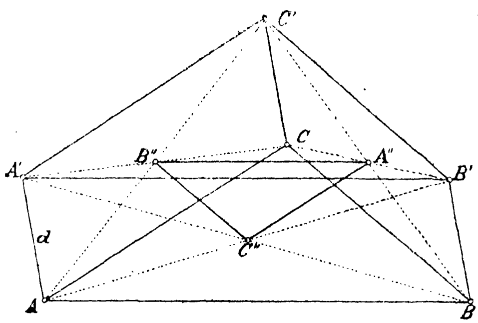
O větě Pappusově.

Podává

Dr. Karel Zahradník,

ř. professor mathematiky při universitě v Záhřebě.

1. Pošineme-li trojúhelník ABC do polohy A′B′C′ (obr. 1.), opíšou strany trojúhelníka rovnoběžníky; součet ploch jejich rovná se nulle. Znásobíme-li totiž



Obr. 1.

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} \stackrel{\frown}{=} 0$$

relací

$$\mathrm{AA'} \stackrel{\frown}{=} \mathrm{BB'},$$

obdržíme

$$\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{AA'} + \mathrm{BC}\,.\,\mathrm{BB'} + \mathrm{CA}\,.\,\mathrm{AA'} \stackrel{\frown}{=} 0. \tag{1}$$

Dle Grassmanna*) jest

$$\overline{\mathrm{AB}}\ \overline{\mathrm{AA'}} = \overline{\mathrm{AB}}\,.\,\overline{\mathrm{AA'}} \sin \mathrm{BAA'}$$

*) Srovnej: *Grassmann: „Die lineare Ausdehnungslehre,“* 2. Au. 1878, pg. 65. Tato věta jest ostatně zvláštní případ věty: Plocha, již opíše otevřený mnohoúhelník v rovině, rovná se ploše, již opisuje strana mnohoúhelník uzavírající. L. c. § 29., pg. 49. Důkaz pomocí ekvipolencí viz *Bellavitis-Zahradník: „Methoda ekvipolencí,“* Praha, 1874, pg. 29.

vnější*) součin přímek AB i AA′ a jest roven ploše rovnoběžníka ABB′A′; můžeme nyní vztah (1) psáti:

$$ABB'A' + BCC'B' + CAA'C' \triangleq 0$$

aneb

$$ABB'A = ACC'A' + CBB'C'. \tag{2}$$

Vztah (1) vyjadřuje *Pappusovu* větu obecně.

Ostatně je planimetrický důkaz této věty zcela jednoduchý.**)

Ježto

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C',$$

jest

$$ABB'C'A'A - ABC = ABB'C'A'A - A'B'C',$$

tudíž

$$ABB'A' = ACC'A' + CBB'C'.$$

2. Zajímavou tuto větu, v níž jest obsažena věta Pythagorova jakožto speciální případ, dokážeme též trigonometricky, ve kterémž důkaze postup odstavce 1. se obráží. Pošiňme trojúhelník ABC o délku $d = AA'$ ve směru $\Theta = \sphericalangle BAA'$. Označíme-li délky stran AB, BC, CA postupně c, a, b, jest, jak známo,

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Znásobíme-li tuto relaci $d \sin \Theta$, t. j. výškou rovnoběžníka ABB′A′, obdržíme, ježto,

$$\begin{gathered}\cos \alpha \sin \Theta = \sin (\Theta - \alpha) + \sin \alpha \cos \Theta \\ \cos \beta \sin \Theta = \sin (\Theta + \beta) - \sin \beta \cos \Theta, \\ dc \sin \Theta = ad \sin (\Theta + \beta) + bd \sin (\Theta - \alpha) \\ - d \cos \Theta (a \sin \beta - b \sin \alpha).\end{gathered}$$

Dle poučky sinusové jest

$$a \sin \beta - b \sin \alpha = 0,$$

tudíž:

$$dc \sin \Theta = ad \sin (\Theta + \beta) + bd \sin (\Theta - \alpha),$$

t. j.

$$ABB'A' = CBB'C' + ACC'A'.$$

---

*) Viz *A. Libický:* „*Základové geometrického počtu Grassmannova.*“ Časop. pro pěst. mathem. a fys., ročník XXV. pg. 268.

**) Viz *Henrici-Treutlein:* „*Lehrbuch der Elementar-Geometrie.*“ Leipzig 1891. I. Theil pg. 98. *Hoffmann:* Zeitschrift f. math. u. nat. Unterr. díl XXVI. pg. 257.

α) Je-li $\Theta = 90^{0}$, jest

$$cd = ad \cos\beta + bd \cos\alpha.$$

Píšeme-li

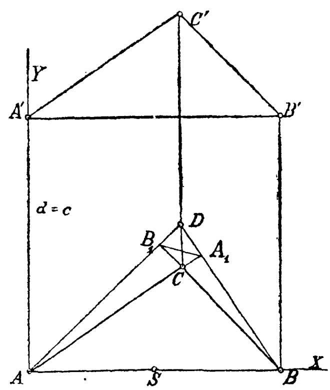
$$d \cos\beta = k_1, \quad d \cos\alpha = k,$$

máme

$$cd = ak_1 + bk. \tag{3}$$

β) Je-li mimo to $d = c$ (obr. 2), najdeme

$$c^2 = ac \cos\beta + bc \cos\alpha.$$



Obr. 2.

Spustíme-li kolmice $BA_1 \perp AC$, $AB_1 \perp BC$, obdržíme

$$c \cos\alpha = AA_1 = a + a_1$$
$$c \cos\beta = BB_1 = b + b_1,$$

kdež jsme položili $a_1 = \overline{CA_1}$, $b_1 = \overline{CB_1}$, tudíž

$$c^2 = a^2 + b^2 + aa_1 + bb_1.$$

Pro čtyřúhelník ABA_1B_1 jest v platnosti

$$\overline{AC} \cdot \overline{CA_1} = \overline{BC} \cdot \overline{CB_1},$$

t. j.

$$aa_1 = bb_1,$$

načež svrchu uvedená relace přechází ve tvar

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,aa_1, \tag{4}$$

což jest známá věta Pythagorova pro trojúhelník kosoúhlý, jíž můžeme opět, píšeme-li

$$a_1 = AC \cos(\Pi - \gamma) = -b \cos\gamma,$$

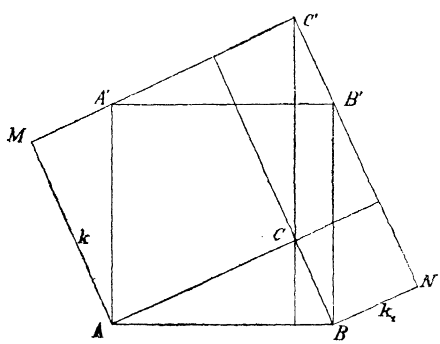
dáti tvar trigonometrický

$$(5) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma.$$

8. Je-li ve zvláštním případě daný trojúhelník pravoúhlý, takže úhel při C, t. j. $\gamma = 90^0$, (obr. 3.) jest v platnosti

$$k = AM = AA' \cos\alpha = AB \cos\alpha = AC = b$$
$$k_1 = BN = BB' \cos\beta = AB \cos\beta = BC = a$$

a relace (3) nebo (5) přechází v obyčejnou větu Pythagorovu.



Obr. 3.

3. Označíme-li průsek kolmic AB_1, BA_1 písmenem D (průsek to výšek trojúhelníka ABC), můžeme říci: Kruh opsaný čtyřúhelníku A_1B_1AB, jakož i kruh čtyřuhelníku A_1DB_1C opsaný mají společnou tetivu A_1B_1. Kolmice ve středu této tetivy je centralou obou kruhů, spojnice středů délek AB i CD půlí tudíž délku A_1B_1 kolmo. Úhel ADB je supplementem úhlu ACB (obr. 2.).

Trojúhelník Pappusův.

4. Budiž (obr. 1.) C″ těžiště rovnoběžníka ABB′A′, podobně A″, B″ pro rovnoběžníky BB′C′C, ACC′A′, i pokládejme

vrchol A za počátek pravoúhlých souřadnic, stranu AB za osu X. Úsečka bodu B bude c. Dále buďtež ξ, η souřadnice vrcholu C. Potom najdeme

$$A'(d\cos\Theta,\ d\sin\Theta),\quad A''\left(\frac{\xi+c+d\cos\Theta}{2},\ \frac{\eta+d\sin\Theta}{2}\right),$$

$$B'(c+d\cos\Theta,\ d\sin\Theta),\quad B''\left(\frac{\xi+d\cos\Theta}{2},\ \frac{\eta+d\sin\Theta}{2}\right),$$

$$C'(\xi+d\cos\Theta,\ \eta+d\sin\Theta),\quad C''\left(\frac{c+d\cos\Theta}{2},\ \frac{d\sin\Theta}{2}\right).$$

Trojúhelník $A''B''C''$ pojmenujeme *Pappusovým trojúhelníkem*, jehož těžiště má souřadnice

$$T''\left(\frac{\xi+c}{3}+\frac{d\cos\Theta}{2},\ \frac{\eta}{3}+\frac{d\sin\Theta}{2}\right).$$

Vlastnosti Pappusova trojúhelníka.

α) Strany jeho nejsou závisly ani na velikosti pošinutí d, ani na směru pošinutí Θ. Platí totiž

$$A''B''=\frac{AB}{2},\quad B''C''=\frac{BC}{2},\quad C''A''=\frac{CA}{2}.$$

β) Strany daného trojúhelníka jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníka Pappusova.

γ) Následkem β) jest $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$; poměr podobnosti jest $\frac{1}{2}$.

δ) Trojúhelník Pappusův má čtyřnásobnou plochu daného trojúhelníka.

ε) Trojúhelníky ABC, $A''B''C''$ jsou v poloze perspektivné.

ζ) Je-li d konstantou, jest geom. místo (T'') těžišť Pappusových trojúhelníků kruh, jehož poloměr je $\frac{d}{2}$ a jehož střed leží v těžišti T trojúhelníka ABC.

η) Je-li Θ konstantou, jest geom. místo (T'') těžišť Pappusových trojúhelníků přímka, jež jde těžištěm T daného trojúhelníka ABC, majíc daný směr Θ, tudíž

$$y - \frac{\eta}{3} = \operatorname{tg}\Theta\left(x - \frac{c+\xi}{3}\right).$$

ϑ) Opisují-li A′, B′, C′ kruhy, mající poloměr d a středy postupně A, B, C, opisují A″, B″, C″ kruhy o poloměru $\frac{d}{2}$ a o středech $\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$, $\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$, $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$, a těžiště T″ opisuje kruh o poloměru $\frac{d}{3}$ a středu $\left(\frac{\xi+c}{3}, \frac{\eta}{3}\right)$, t. j. kruh mající těžiště trojúhelníka daného za svůj střed.

ι) Je-li T′ těžiště trojúhelníka A′B′C′, bude

$$TT'' = T''T',$$

t. j. T″ je střed délky TT′.

O involutorní příbuznosti kvadratické.

5. Přihlédněme nyní blíže k obrazci 2. Kolmice BA_1, AB_1 na strany AC a BC protínají se v bodě D. Spojnice DC musí býti kolmou na AB, neboť kolmice z C na AB jde bodem D, průsečíkem to výšek trojúhelníka ABC. Bodu C odpovídá tím docela určitý bod D, ale i naopak toutéž konstrukcí přicházíme od bodu D k bodu C, t. j. vyjdeme-li od trojúhelníka ABD místo od trojúhelníka ABC. Body C i D nalézají se tudíž v příbuznosti involutorní, biracionální i, jak ihned dokážeme, kvadratické.

Předpokládáme-li soustavu souřadnic jako v odst. 4., najdeme souřadnice bodu D

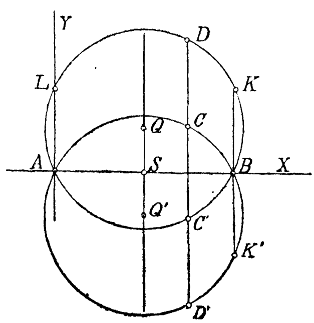
$$x = \xi \qquad (6)$$
$$y = \frac{\xi(c-\xi)}{\eta}.$$

Z těchto rovnic jde

$$\xi = x \qquad (7)$$
$$\eta = \frac{x(c-x)}{y}.$$

Již pohled na tyto rovnice dokazuje naše tvrzení. Hlavní body obou soustav bodů (C) i (D) jsou bod A, bod B a úběžný bod osy Y.

Opisuje-li na př. proměnlivý vrchol C trojúhelníka ABC přímku Π, která nejde hlavním bodem, jest na základě zmíněné příbuznosti sdružená křivka hyperbola, která jde body A, B a která má jednu asymptotu kolmou na přímku AB, druhou asymptotu kolmou na přímku Π. Křivka sdružená přímce, která jde bodem A, rozpadá se na osu Y a na přímku, která jde bodem B a stojí kolmo na danou přímku atd.



Obr. 4.

Vidíme tudíž, že máme zde co činiti se zvláštním případem kvadratické inverse, kterouž vyložil *Hirst**) ve svém pojednání *„On the quadric inversion of plane curves.“* *London*, 1865.

6. Body sdružené ve stálé vzdálenosti d, tedy $CD = d$, leží na dvou kružnicích

---

*) Pojednání toto přeložil na jazyk italský slavný L. Cremona: *Hirst-Cremona: „Sull' inversione quadratica delle curve piane.“* — Anali di matematica pura ed applicata T. VII, *Battaglini*: „Giornale di matematica“ vol. IV. Hirst béře základní kuželosečku i střed inverse S_1. Bod M_1 bodu M sdružený obdrží jako průsek spojnice S_1M s polarou bodu M vzhledem k základní kuželosečce. V našem případě je střed inverse úběžný bod osy Y a základní kuželosečka jest kruh sestrojený nad AB jakožto průměrem. Srovnej *A. Strnad: „Úvod do theorie kvadratických transformací rovinných.“* Progr. vyšší realky v Králové Hradci, 1886/7 pg. 8.

$$x^2 + y^2 - cx \pm dy = 0,$$

jež jsou symmetricky položeny k ose x (obr. 4.). Bodům oblouku LDK odpovídá oblouk ACB druhého kruhu, oblouku LD'K prvního kruhu odpovídá oblouk AC'B druhého kruhu. Je-li d proměnlivo, obdržíme svazek kruhů, jejichž osou stejných mocností jest osa X a souměrné kruhy tohoto svazku vzhledem k ose stejných mocností spadají k témuž d. Pro $d = 0$, je $C \equiv D$. Kruh opsaný nad AB jakožto průměrem je samodružná kuželosečka této kvadratické transformace.

6. S transformací touto nebudeme se blíže obírati, dostačí, poukážeme-li na práci Hirst-ovu. Uvedeme pouze, že se obecně křivka C^2 transformuje na racionálnou křivku C^4, která má v hlavních bodech transformace své dvojné body. Jde-li C^2 bodem A, skládá se transformovaná křivka z osy Y a z racionální křivky C^3, kteráž má jednu neb tři asymptoty reálné, dle toho, je-li C^2 ellipsa neb hyperbola. Prochází-li C^2 body A, B, rozpadá se transformovaná křivka na osu Y, na přímku, která jde bodem A kolmo na přímku AB a mimo to na kuželosečku.

Budiž ještě uvedena *transformace cissoidy*

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a_1 - x}}.$$

Transformovaná křivka jest dvojnásobná osa Y a racionální křivka třetího stupně, kteráž má reálný dvojný bod pro $a_1 > c$, isolovaný dvojný bod pro $a_1 < c$. Je-li $a_1 = c$, obdržíme opět cissoidu kongruentní s danou, pootočenou pouze kolem kolmice ve středu S strany $\overline{AB}$ vztýčené.

O racionálné příbuznosti kvadratické reciproké.

8. V odst. 5. seznali jsme, že se body $D(\xi, \eta)$ i $D(x, y)$ nacházejí v příbuznosti biracionální kvadratické, a opíše-li tudíž bod C přímku $\Pi(u, v)$, že sdružený bod D opíše hyperbolu

$$H \equiv x(uy - vx) + cvx + y = 0,$$

kteráž prochází, jak již řečeno, hlavními body soustav (C) i (D).

Jedna asymptota hyperboly H je rovnoběžná s osou Y druhá stojí kolmo na přímce Π. Naopak, každá hyperbola, jejíž jedna asymptota jest rovnoběžna s osou Y a která prochází počátkem souřadnic i bodem B $(c, 0)$, může se transformovati na přímku.

Je-li totiž hyperbola

$$H \equiv x(mx + ny) + px + y = 0,$$

jsou souřadnice dotyčné přímky $(m, -n)$ a $AB = c = -\frac{p}{m}$.

Označme nyní písmenem S′ střed hyperboly H a x', y' jeho souřadnice, najdeme

$$(8) \qquad \begin{aligned} x' &= -\frac{1}{u} \\ y' &= -\frac{(2 + cu)\,v}{u^2}. \end{aligned}$$

Střed S′ leží vždy na přímce kolmé k ose X v jejím průseku s přímkou Π. Obráceně, vytkneme-li si některý bod S′ jakožto střed hyperboly H, je tím již hyperbola H určena (známe totiž tři její body a střed její); řešení rovnic (8) podává

$$(9) \qquad \begin{aligned} u &= -\frac{1}{x'} \\ v &= -\frac{y'}{(2x' - c)\,x'}, \end{aligned}$$

známe tedy u, v a tím i hyperbolu H.

Přímka Π (u, v) a bod S′ (x', y') jsou dle toho v příbuznosti kvadratické reciproké.

Křivka n-ho stupně, která nejde hlavními body, transformuje se na křivku $2n$-té třídy a naopak: Křivka n-té třídy, která se nedotýká hlavních přímek, transformuje se na křivku $2n$-tého stupně. Píšeme-li rovnici křivky n-té třídy

$$C_n \equiv \varphi_n + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0,$$

kdež značí φ_k homogenní funkci v souřadnicích tangenciálných u, v, jest rovnice transformované křivky

$$
(10)\qquad \begin{aligned} C^{2n} \equiv \Phi_n + x'(2x'-c)\Phi_{n-1} + \dots \\ + x'^{n-1}(2x'-c)^{n-1}\Phi_1 + x'^n(2x'+c)^n\Phi_0 = 0, \end{aligned}
$$

kdež opět Φ_k značí resultat substituce $-(2x'-c)$, $-y'$ postupně za u a v do funkce φ_k, tudíž polynom k-tého stupně vzhledem k x', y', totiž

$$
\varphi_k \equiv \sum_{h=0}^{k} (-1)^k m_h y'^h (2x'-c)^{k-h}.
$$

Hlavní body jsou bod $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ a úběžný bod osy Y, v němž se spojují dva hlavní body. Z této vlastnosti úběžného bodu osy Y vychází rovnoběžnost asymptot s osou Y, což i rovnice (10) podává.

Podobně bychom při transformaci křivky n-tého stupně C^n pomocí rovnic substitučních (8) postupovali.

9. Nechť se nyní přímka Π otáčí kolem svého bodu (x_0, y_0). V každé poloze této přímky platí

$$
x_0 u + y_0 v + 1 = 0
$$

a zmíněný střed S′ (x', y') sdružené hyperboly H obdržíme pomocí rovnic (9)

$$
(11)\qquad 2x'^2 - (2x_0 + c)x' - y_0 y' + c x_0 = 0.
$$

Otáčí-li se přímka Π kolem svého bodu (x_0, y_0), mění sdružený střed S′ hyperboly své místo na parabole P dané rovnicí (11); t. j. svazku paprsků (x_0, y_0) sdružena je parabola P, která probíhá hlavními body transformace.

Dvěma bodům (x_0, y_0), (x_1, y_1) přísluší jako vrcholům svazků paprsků dvě paraboly, jež mají společné hlavní body transformace a mimo to se protínají v bodě, jejž bychom obdrželi jakožto bod sdružený ku spojnici bodů (x_0, y_0), (x_1, y_1) po zákonu (9)

10. Uvažujme nyní obráceně přímku Π jakožto místo bodu S′ (x', y'); platí tudíž

$$
u_0 x' + v_0 y' + 1 = 0.
$$

Pohybuje-li se bod S′ po přímce (u_0, v_0), obaluje přímka Π sdružená bodu S′ parabolu

$$(12) \qquad u(u - c v_0 v) - u_0 u - 2 v_0 v = 0.$$

Že kuželosečka (12) jest parabolou, vidno již z toho, že vyhovuje rovnici (12) $u = 0$, $v = 0$, t. j. že kuželosečky se dotýká přímka úběžná.

11. Vrchol V (ξ, η) paraboly P, která odpovídá svazku přímek (x_0, y_0), jest

$$(13) \qquad \xi = \frac{2x_0 + c}{4}, \qquad \eta = -\frac{(2x_0 - c)^2}{8y_0}.$$

Řešením těchto rovnic dle x_0, y_0 obdržíme

$$(14) \qquad x_0 = \frac{4\xi - c}{2}, \qquad y_0 = -\frac{(2\xi - c)^2}{2\eta}.$$

Je-li tudíž dán vrchol T (ξ, η) jakožto vrchol svazku paprskového, je tím jednoznačně i vrchol V paraboly P určen a obráceně ku každému bodu (ξ, η) jakožto vrcholu paraboly P přísluší bod (x_0, y_0), jakožto vrchol svazku paprsků. Body (x_0, y_0), (ξ, η) nacházejí se tím v příbuznosti birracionální a to, jak ze tvaru rovnic (18) neb (14) patrno, kvadratické. Našli jsme tím, že je soustava bodů T i soustava bodů V v příbuznosti Cremonově; taktéž soustava bodů C se soustavou bodů D.

Dle toho lze vždy určiti přímku, která jde bodem T, pro nějž S′ $\equiv$ V.

Místo bodů (T), pro něž je délka VT konstantní, jest křivka čtvrtého stupně.

Označíme-li patu kolmice s bodu S′ na přímku Π spuštěné písmenem N, najdeme geometricky aneb analyticky ihned, že je geometrické místo bodů (S′), které mají od sdružené přímky stálou vzdálenost d, křivkou čtvrtého stupně

$$C^4 \equiv y'^4 - d^2[(2x' - c)^2 + y'^2] = 0.$$

Obálka přímek Π, které mají od sdruženého bodu stálou vzdálenost d, jest křivka šesté třídy

$$C_6 \equiv u^4 (u^2 + v^2) d^2 - (2 + cu)^2 v^4 = 0.$$

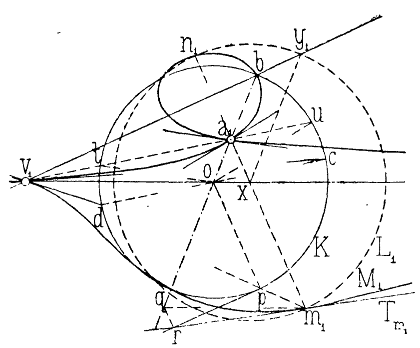
O křivce, která souvisí s conchoidou Nicomedovou a strophoidou.

Napsal

V. Jeřábek,

professor při c. k. vyšší realné škole v Brně.

Buďtež dány dvě různoběžky v_1x_1, v_1y_1 a v jejich rovině π bod a_1. Veďme v úhlu těchto různoběžek příčku x_1y_1 ve směru daném a učiňme na paprsku a_1x_1 délku $\overline{x_1m_1} = \overline{x_1n_1} = \overline{x_1y_1}$. Geom. místem bodů m_1, n_1 jest křivka M_1, o níž v následujících řádcích krátce pojednáme.



1. *Křivka M_1 jest stupně čtvrtého.* Abychom tvrzení toto dokázali, veďme v úhlu $x_1v_1y_1$ příčku oa_1b rovnoběžně s $\overline{x_1y_1}$ a sestrojme v rovině π různoběžek v_1x_1 a v_1y_1 ze středu o poloměrem ob kružnici K. Kružnice tato buďiž stopou plochy kuželové P_k, jejíž vrchol v promítá se na průmětnu π do bodu v_1. Veďme bodem a_1 rovnoběžku A s promítajícím paprskem v_1v