Vilém Jung

Poznámka o vzorci pro součet kladných a celistvých mocnin čísel přirozené řady

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 2, 124--125

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122058`

bodů a a ${}^1a$ křivky M, a přímky va, v^1a mají na π své stopy v bodech u, t, ve kterých v_1a_1 a K se protínají. Ježto rovina tečná τ'_a hyp. paraboloidu P_h v bodu a obsahuje promítající paprsek a_1a, jest promítající rovinou tečny T_a v bodu a, pročež jest stopa roviny tečné τ'_a jednou tečnou bodu dvojného a_1. Tak jako dříve stopa roviny tečné τ_m byla rovnoběžna s poloměrem op, tak jest i nyní stopa roviny tečné τ'_a rovnoběžna s poloměrem $\overline{ou}$. Vedeme-li tedy dvojným bodem a_1 rovnoběžku s poloměrem $\overline{ou}$, obdržíme jednu tečnu bodu dvojného a_1. Druhá tečna dvojného bodu a_1 jest obdobně rovnoběžna s poloměrem $\overline{ot}$.

4. *Tečny bodu dvojného* v_1. Rovina tečná τ'_v hyp. paraboloidu P_h ve vrcholu v obsahuje přímku $\overline{vo}$ a rovnoběžku vedenou vrcholem v s přímkou v_1a_1, pročež prochází stopa roviny τ'_v stopou o přímky $\overline{vo}$ a jest rovnoběžna s v_1a_1. Buďtež c a d body, ve kterých stopa roviny tečné τ'_v seče kružnici K. Položme ku ploše kuželové P_k rovinu tečnou τ_v podél přímky vc. Rovina τ'_v seče rovinu τ_v v přímce vc, pročež jest vc tečnou křivky M v bodu v. Ježto však v_1c jest průmětem tečny vc, jest v_1c jednou tečnou bodu dvojného v_1. Druhá tečna bodu dvojného v_1 jest $\overline{v_1d}$.

5. Je-li přímka $\overline{v_1y_1}$ rovnoběžna s $\overline{v_1x_1}$, jest M_1 conchoidou Nicomedovou, leží-li v_1 na kružnici K, jest M_1 strophoidou, čímž souvislost těchto křivek na jevo vychází. Strophoida má v_1 za bod dvojný a a_1 za ohnisko. Tečny bodu dvojného stojí na sobě kolmo.

Poznámka o vzorci pro součet kladných a celistvých mocnin čísel přirozené řady.

Napsal

Vilém Jung,

professor v Praze.

V roč. XXVII. (seš. 3., pag. 191.—198.) tohoto Časopisu jsme dokázali na základě *Studničkova* nezávislého vyjádření *Bernoulliových* čísel determinanty deduktivně vzorec

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{(p)_1}{2} B_1 n^{p-1} - \frac{(p)_3}{4} B_2 n^{p-3}$$
$$+ \frac{(p)_5}{6} B_3 n^{p-5} - \frac{(p)_7}{8} B_4 n^{p-7} + \ldots,$$

značí-li B_r čísla Bernoulliova.

Máme-li tohoto vzorce užiti k vyjádření $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$, musíme rozeznávati *dva* případy:

1. pro *sudé* $p = 2\mu$ platí vzorec

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{n} k^{2\mu} = \frac{n^{2\mu+1}}{2\mu+1} + \frac{n^{2\mu}}{2} + \sum_{r=1}^{\mu} (-1)^{r+1} \frac{(2\mu)_{2r-1}}{2r} B_r n^{2\mu+1-2r},$$

2. pro *liché* $p = 2\mu + 1$ platí vzorec

$$3)\quad \sum_{k=1}^{n} k^{2\mu+1} = \frac{n^{2\mu+2}}{2\mu+2} + \frac{n^{2\mu+1}}{2}$$
$$+ \sum_{r=1}^{\mu} (-1)^{r+1} \frac{(2\mu+1)_{2r-1}}{2r} B_r n^{2\mu+2-2r}.$$

K tomu ještě dlužno podotknouti, že pro $\mu = o$ nutno vzíti ve vzorci (2) pouze *první* člen, čímž se obdrží

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = n$$

a ve vzorci (3) pouze *první dva* členy, čímž se obdrží

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Věstník literární.

B. Niewenglowski, Cours de Géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe des Mathématiques spéciales et