Vyčíslení jistých Eulerových integrálů neomezených.

Napsal

Augustin Pánek.

Eulerovo známé dílo „Institutionum calculi integralis...", jehož německý překlad pořízen J. Salomonem, skýtá vyčíslení integrálů substitucemi zvláštními, mnohdy podivuhodnými. V úvahu volíme si některé integrály irracionálních differenciálů, uveřejněné poprvé Eulerem ve Sborníku Akademie věd v Petrohradě a v jeho díle reprodukované.*) K jich vyčíslení zvolíme substituci *téhož tvaru*, t. j. při uvažovaných integrálech položíme za symbolem integračním vyskytující se odmocninu z příslušné funkce proměnné x rovnou px, znamená-li litera p novou proměnnou, Eulerem užívanou. I seznáme methodu, jakým charakteristickým postupem možno snadně jisté integrály algebraických irracionálních differenciálů převésti na integrály algebraických differenciálů racionálních.

I. Abychom vyčíslili integrál

$$(1) \qquad V = \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{a + 2bx^n}},$$

užijeme substituce

$$(2) \qquad \sqrt[2n]{a + 2bx^n} = px,$$

kdež p značí novou proměnnou.

Z rovnice (2) plyne

*) Životopis slavného Eulera jest pisatelem této stati podán v „Ottově Naučném Slovníku" ovšem tak, jak jej možno napsati v rámci Slovníku samého. Poznamenáváme, že Eulerův „Inst. calculi integr." vydán Petrohradskou Akademií věd svaz. I. r. 1768, sv. II. r. 1769, svaz. III. r. 1770 a sv. IV. r. 1794. Slavný Euler zemřel r. 1783, tedy před vydáním sv. IV. Překlad Salomonův vyšel ve Vídni 1828—1830.

$$(2') \qquad a + 2bx^n = p^{2n}x^{2n},$$

načež dělením x^{2n} obdržíme

$$(2'') \qquad ax^{-2n} + 2bx^{-n} = p^{2n};$$

differencujeme-li tuto rovnici a zkrátíme-li ji pak — $2n$, nabudeme

$$(ax^{-2n-1} + bx^{-n-1})\,dx = -p^{2n-1}dp,$$

z níž

$$(3) \qquad dx = -\frac{x^{2n+1}p^{2n-1}}{a + bx^n}\,dp.$$

Dosadíme-li hodnoty z (2) a (3) do (1), bude

$$(4) \qquad dV = -\frac{x^{2n}p^{2n-2}}{(a + bx^n)^2}\,dp.$$

Abychom tu na pravé straně x vyjádřili funkcí p, násobíme rovnici (2″) konstantou a a k součinu tomu přičteme b^2, tedy sestrojíme výraz

$$(5) \qquad b^2 + ap^{2n} = \frac{(a + bx^n)^2}{x^{2n}},$$

který (4) promění přímo ve tvar

$$(4') \qquad dV = -\frac{p^{2n-2}dp}{b^2 + ap^{2n}},$$

což vede na integrál differenciálu racionálního

$$(1') \qquad \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{a + 2bx^n}} = -\int \frac{p^{2n-2}}{b^2 + ap^{2n}}\,dp.$$

Jest-li na př. $a = -1$, $b = 1$, obdržíme jakožto zvláštní vzorec

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{(1 - x^n)\sqrt[2n]{2x^n - 1}} = \int \frac{p^{2n-2}}{1 - p^{2n}}\,dp;$$

je-li ještě $n = 2$, bude integrál, Eulerem uvedený,

$$(7) \qquad \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt[4]{2x^2 - 1}} = \int \frac{p^2dp}{1 - p^4},$$

jenž, jak známo, vede k integrálům základním, a to k

$$\frac{1}{2}\left(\int\frac{dp}{1-p^2}-\int\frac{dp}{1+p^2}\right),$$

t. j.

$$\frac{1}{4}l\frac{1+p}{1-p}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,ctg} p,$$

kde

$$p=\frac{\sqrt[4]{2x^2-1}}{x},$$

takže konečně

$$(7') \qquad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{2x^2-1}}=\frac{1}{4}l\frac{x+\sqrt[4]{2x^2-1}}{x-\sqrt[4]{2x^2-1}} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt[4]{2x^2-1}}.$$

Poslední integrál lze transformovati na známý integrál differenciálu irracionálního, položíme-li

$$(8) \qquad x=\sqrt{\frac{1+z^4}{2}},$$

kde z jest nová proměnná, načež

$$(9) \qquad dx=\sqrt{2}\frac{z^3dz}{\sqrt{1+z^4}}.$$

Dosadíme-li hodnoty z (8) a (9) do integrálu (7'), obdržíme relaci

$$(10) \qquad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{2x^2-1}}=2\sqrt{2}\int\frac{z^2dz}{(1-z^4)\sqrt{1+z^4}}.$$

Integrál na pravé straně jest totiž jeden ze čtyř význačných integrálů Eulerových,*) který jsme přímo vyčíslili co nejjednodušší

*) Viz Aug. Pánek: „*O některých integrálech Eulerových.*“ Rozpravy české akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v Praze, roč. II., 1893.

substitucí *algebraickou*, když jsme kladli příslušnou odmocninu, rovnou řečenému typickému součinu

$$\sqrt{1+z^4}=pz,$$

kde p je nová proměnná.*)

Zmíněný integrál zvšeobecníme v odstavci následujícím.

II. Při stanovení integrálu

$$\text{(1)} \qquad V=\int\frac{x^2dx}{(a-cx^4)\sqrt{a+bx^2+cx^4}}$$

vede k cíli uvedená substituce

$$\text{(2)} \qquad \sqrt{a+bx^2+cx^4}=px$$

aneb

$$\text{(2')} \qquad a+bx^2+cx^4=p^2x^2.$$

Určíme dx, když rovnici (2′) dělíme především x^2, tedy

$$ax^{-2}+b+cx^2=p^2,$$

načež differencováním, krátíme-li ihned 2, dostaneme

$$-\frac{a-cx^4}{x^3}dx=pdp,$$

tudíž

$$\text{(3)} \qquad dx=-\frac{x^3pdp}{a-cx^4}.$$

Dosazením hodnot z (2) a (3) do (1) nabýváme

$$\text{(4)} \qquad dV=-\frac{x^4dp}{(a-cx^4)^2}.$$

Abychom tu vyloučili x, uvažme, že dle (2′)

$$\text{(2'')} \qquad a+cx^4=x^2(p^2-b),$$

což zdvojmocněno

$$(a+cx^4)^2=x^4(p^2-b)^2,$$

---

*) Srovnej Aug. Pánek: „*O vyčíslení některých integrálů Eulerových společnou substitucí algebraickou.*“ Věstník král. české společnosti nauk. V Praze, 1893.

a odečteme-li od toho na obou stranách $4acx^4$, zjednáme si

$$(a - cx^4)^2 = x^4[(p^2 - b)^2 - 4ac].$$

Tato hodnota, vložená do vzorce (4), poskytuje tvar differenciálu

$$(4') \qquad dV = -\frac{dp}{(p^2 - b)^2 - 4ac};$$

tudíž V čili

$$(1') \int \frac{x^2dx}{(a - cx^4)\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \int \frac{dp}{4ac - (p^2 - b)^2}.$$

Jest tedy integrál předložený vyjádřen integrálem differenciálu racionálního.

Klademe-li tu $a = c = 1$, $b = 0$, nabudeme tvar Eulerova integrálu (10), v odst. I. na pravé straně vytčeného, totiž

$$(5) \qquad \int \frac{x^2dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^4}} = \int \frac{dp}{4 - p^4},$$

při čemž dle původní substituce bude

$$(6) \qquad p = \frac{\sqrt{1 + x^4}}{x}.$$

Když rovnici (6) zdvojmocníme a násobíme ji (5), to jest rovnicí

$$(5') \qquad \frac{x^2dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^4}} = \frac{dp}{4 - p^4},$$

obdržíme

$$\frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4}\,dx = \frac{p^2dp}{4 - p^4},$$

čímž nabudeme jiného význačného integrálu Eulerova, vyjádřeného integrálem differenciálu racionálního

$$(7) \qquad \int \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4} = \int \frac{p^2dp}{4 - p^4}.$$

Můžeme si též zjednati obecný tvar integrálu (7), když (1'), t. j.

$$\frac{x^2dx}{(a-cx^4)\sqrt{a+bx^2+cx^4}}=\frac{dp}{4ac-(p^2-b)^2},$$

znásobíme rovnicí (2″), t. j.

$$\frac{a+cx^4}{x^2}=p^2-b,$$

čímž dospíváme integrálního vzorce

$$(8)\quad \int\frac{a+cx^4}{a-cx^4}\cdot\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}}=\int\frac{(p^2-b)\,dp}{4ac-(p^2-b)^2}.$$

Jest-li tu $a=c=1$, $b=0$, obdržíme integrál (7).

Úvaha tato vede k tomu, že možno rázem oba integrály (5) a (7) dostati z obecnějšího integrálu, jak jest konstruován v odstavci následujícím.

III. Chceme-li vyčísliti integrál

$$(1)\qquad V=\int\frac{x^{m+n-1}dx}{(a-cx^{2n})\sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})^m}},$$

zavedeme opět sprostředkující rovnici

$$(2)\qquad \sqrt[n]{a+bx^n+cx^{2n}}=px$$

neboli

$$(2')\qquad a+bx^n+cx^{2n}=p^nx^n,$$

načež dělením x^n

$$ax^{-n}+b+cx^n=p^n.$$

Differencujeme-li tuto rovnici a krátíme-li n, vzejde

$$-\frac{a-cx^{2n}}{x^{n+1}}dx=p^{n-1}dp,$$

z čehož

$$(3)\qquad dx=-\frac{x^{n+1}p^{n-1}}{a-cx^{2n}}dp.$$

Vložíme-li hodnoty z (2) a (3) do (1), povstane

$$(4)\qquad dV=-\frac{x^{2n}p^{n-m-1}}{(a-cx^n)^2}dp.$$

Z rovnice (2') plyne

$$a + cx^{2n} = x^n (p^n - b),$$

a zdvojmocníme-li tuto rovnici,

$$(a + cx^{2n})^2 = x^{2n} (p^n - b)^2,$$

načež, odečítáme-li na obou stranách $4acx^{2n}$, nabudeme

$$(a - cx^{2n})^2 = x^{2n} [(p^n - b)^2 - 4ac].$$

Tato hodnota, dosazená do (4), vede k integrálu žádanému

$$(1') \quad \int \frac{x^{m+n-1} dx}{(a - cx^{2n}) \sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}} = \int \frac{p^{n-m-1} dp}{4ac - (p^n - b)^2}.$$

Klademe-li do tohoto integrálu $m = 1$, $m = 2$, obdržíme integrál (1') odst. II. a tím také nabýváme integrálu (5) v témže odstavci.

Jest-li však $m = -1$, $n = 2$, obdržíme z (1') jakožto speciální případ integrál

$$(5) \qquad \int \frac{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}{a - cx^4} dx = \int \frac{p^2 dp}{4ac - (p^2 - b)^2};$$

a je-li tu $a = c = 1$, $b = 0$, dospějeme integrálu (7) odst. II.

K význačným integrálům Eulerovým (5) a (7) odst. II., které jsou nyní zvláštními případy vzorce (1'), druží se ještě dva jiné, a to

$$\int \frac{(1 + x^2) dx}{(1 - x^2) \sqrt{1 + x^4}} \quad \text{a} \quad \int \frac{(1 - x^2) dx}{(1 + x^2) \sqrt{1 + x^4}}.$$

Abychom tyto integrály vyčíslili, sestrojíme především výraz

$$\frac{(1 \pm x^2)^2}{x^2} = \frac{1 + x^4 \pm 2x^2}{x^2},$$

který vyjádříme proměnnou p, rovnicí (6) odst. II. uvedenou

$$\frac{1 + x^4}{x^2} = p^2,$$

takže máme

$$(6) \qquad \frac{(1 \pm x^2)^2}{x^2} = p^2 \pm 2 .$$

Volíme-li hořejší znaménko v rovnici této a znásobíme-li ji rovnicí (5′) odst. II., vzejde konečně po zřejmé redukci

$$(7) \qquad \int \frac{(1 + x^2)\, dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^4}} = \int \frac{dp}{2 - p^2} .$$

Přihlížejíce k dolnímu znaménku v rovnici (6) a násobíce týmže způsobem, obdržíme integrál

$$(8) \qquad \int \frac{(1 - x^2)\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} = - \int \frac{dp}{2 + p^2} .$$

Poznámka k odstavcům předchozím. Z úvah vytčených poznáváme, že z úvodního integrálu

$$(\alpha) \qquad \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{a + 2bx^n}}$$

nabudeme speciálně integrál

$$(\beta) \qquad \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt[4]{2x^2 - 1}} ,$$

jenž souvisí s integrálem tvaru

$$(\gamma) \qquad \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^4}} ,$$

který možno snadně uvésti na tvary integrálů

$$(\delta) \qquad \int \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4}\, dx ,$$

$$(\varepsilon) \qquad \int \frac{(1 + x^2)\, dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^4}} ,$$

$$(\zeta) \qquad \int \frac{(1 - x^2)\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} .$$

Když Euler*) vyčísloval integrál (ε), položil

$$(m) \qquad \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}=p$$

a při vyčíslení integrálu (ζ) kladl

$$(n) \qquad \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}=q,$$

pak sečtením integrálů (ε) a (ζ) násobených $\frac{1}{2}$ obdržel integrál (δ) a odečtením integrálů (ε) od (ζ) násobených $\frac{1}{4}$ zjednal si integrál (γ)**).

O substituci (m) praví Euler, že nelze jí vyčísliti integrály (γ), (δ), (ζ), a podobně vyslovuje se o substituci (n), že nelze jí použiti při vyčíslení integrálů (γ), (δ), (ε). Dokázali jsme však, že oběma substitucemi možno vyčísliti všecky čtyři integrály (γ), (δ), (ε), (ζ), a že jsou tedy dotčené substituce všem těmto integrálům společny.***)

IV. Integrály Eulerovy (γ), (δ), (ε), (ζ), v předchozí poznámce uvedené a před tím na integrály differenciálů racionálních převedené, mají vesměs odmocninu z příslušné funkce x tvaru

$$\sqrt{1+x^4}\,.$$

Vyčíslení těchto čtyř integrálů společnou substitucí při obecnějším rázu uvedené odmocniny jest jen tehdy možné, má-li po našem soudu odmocnina z funkce x podobu $\sqrt{1+\mu x^2+x^4}$. Zároveň supponujeme, že jeden z těchto integrálů přímo vyčíslíme a ostatní tři zbývající zjednáme si pak z tohoto nejrychleji snadnými obraty.

---

*) Viz Euler: „*Inst. calculi integr.*“, 4. díl, str. 22. aneb Salomonův německý překlad, 4. díl, str. 22.

**) Substituce, Eulerem zavedené (m) a (n) k vyčíslení příslušného integrálu, najdeme též ve známých spisech auktorů jako: *Bertrand*, *Studnička*, *Schnuse* aneb ve známých „Sbírkách úloh“ auktorů: *Brahy*, *Frenet*, *Láska*.

***) Viz Pánek: „O některých integrálech Eulerových“. Rozpravy české Akademie, roč. II., 1893.

Budiž na př. předložen integrál

$$(1') \qquad V = \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + \mu x^2 + x^4}},$$

o jehož vyčíslení jde, i klademe dle zavedené substituce

$$(a) \qquad \sqrt{1 + \mu x^2 + x^4} = px,$$

a dle dřívějšího výkladu rovnici tuto zdvojmocňujeme, dělíme ji pak x^2, načež differencováním obdržíme

$$(b) \qquad dx = -\frac{x^3 p dp}{1 - x^4}.$$

Hodnoty z (a), (b), vloženy do (1), stanoví

$$(c) \qquad dV = -\frac{x^4 dp}{(1 - x^4)^2}.$$

Z rovnice (a) plyne

$$(a') \qquad 1 + x^4 = x^2 (p^2 - \mu),$$

což zdvojmocněno

$$(1 + x^4)^2 = x^4 (p^2 - \mu)^2,$$

a odečteme-li na obou stranách této rovnice $4x^4$, dostaneme

$$(1 - x^4)^2 = x^4 [(p^2 - \mu)^2 - 4].$$

Dosadivše tuto hodnotu do vzorce (c), dospíváme konečně integrálu předloženého, vyjádřeného integrálem differenciálu racionálního

$$(1) \qquad \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + \mu x^2 + x^4}} = \int \frac{dp}{4 - (p^2 - \mu)^2}.$$

Tento integrální vzorec můžeme ovšem dostati z (1′) odst. II., položíme-li tam

$$a = c = 1, \; b = \mu.$$

Běží nyní o stanovení zbývajících tří integrálů.

Z rovnice (a') jde

$$(d) \qquad \frac{1+x^4}{x^2} = p^2 - \mu.$$

Znásobíme-li (1) s (d), obdržíme

$$(2) \qquad \int \frac{1+x^4}{1-x^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+\mu x^2+x^4}} = \int \frac{(p^2-\mu)\,dp}{4-(p^2-\mu)^2},$$

což plyne též ze vzorce (8) odst. II. opětně při hodnotách

$$a = c = 1, \; b = \mu.$$

Abychom další dva integrály si zjednali, sestrojíme především výraz

$$\frac{(1 \pm x^2)^2}{x^2} = \frac{1+x^4}{x^2} \pm 2,$$

který, vyjádřen proměnnou p rovnicí (d), podává

$$\frac{(1 \pm x^2)^2}{x^2} = p^2 - \mu \pm 2.$$

Volíme-li hořejší znaménko a násobíme-li rovnici tuto rovnicí (1), obdržíme integrál

$$(3) \qquad \int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+\mu x^2+x^4}} = \int \frac{dp}{2+\mu-p^2},$$

a volíme-li dolní znaménko, nalezneme

$$(4) \qquad \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+\mu x^2+x^4}} = -\int \frac{dp}{2-\mu+p^2}.$$

Klademe-li $\mu = 0$ do (1), (2), (3), (4), obdržíme Eulerovy integrály (γ), (δ), (ε), (ζ), v předchozí poznámce odst. III. vytčené.

Poznámka 1. Jest-li ve vzorci (1′) odst. III. položíme

$$a = c = 1, \; b = \mu, \; n = 2,$$

obdržíme pro $m = +1$ identický integrál s (1) a z toho pro $\mu = 0$ integrál (γ) odst. III. Pro $m = -1$ však nabýváme z téhož vzorce integrálu

$$\int \frac{\sqrt{1+\mu x^2+x^4}}{1-x^4}\,dx = \int \frac{p^2\,dp}{4-(p^2-\mu)^2},$$

tedy tvaru jiného než jest (2), avšak i z tohoto jde pro $\mu = 0$ integrál (δ) odst. III.

Poznámka 2. Z téhož vzorce (1′) odst. III. lze si zjednati několik známých integrálův.

Položíme-li tam na př. $n = 3$, obdržíme

$$(1) \qquad \int \frac{x^{m+2}dx}{(a - cx^6)\sqrt[3]{(a + bx^3 + cx^6)^m}} = \int \frac{p^{2-m}dp}{4ac - (p^3 - b)^2},$$

a je-li tu $b = 0$,

$$(2) \qquad \int \frac{x^{m+2}dx}{(a - cx^6)\sqrt[3]{(a + cx^6)^m}} = \int \frac{p^{2-m}dp}{4ac - p^6}.$$

Dejme tomu, že $m = -1$, povstane

$$(3) \qquad \int x \frac{\sqrt[3]{a + cx^6}}{a - cx^6} dx = \int \frac{p^3dp}{4ac - p^6},$$

a položíme-li $x^2 = z$, jest $xdx = \frac{1}{2} dz$, i nabýváme

$$(4) \qquad \int \frac{\sqrt[3]{a + cz^3}}{a - cz^3} dz = 2\int \frac{p^3dp}{4ac - p^6}$$

a pro $a = 1$, $c = -1$ dostaneme

$$(5) \qquad \int \frac{\sqrt[3]{1 - z^3}}{1 + z^3} dz = -2\int \frac{p^3dp}{4 + p^6}.$$

Vzorec (1′) odst. III. uvedeme dále ve tvarech obecnějších, jichž poskytuje odstavec následující.

V. Vzorec (1′) odst. III. pišme v podobě

$$(\alpha) \qquad \frac{x^{m+n-1}dx}{(a - cx^{2n})\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}} = -\frac{p^{n-m-1}dp}{(p^n - b)^2 - 4ac},$$

kde souvislost nové proměnné p s původní proměnnou x vyjadřuje rovnice

$$(\beta) \qquad \sqrt[n]{a + bx^n + cx^{2n}} = px,$$

a další vztahy v témže odstavci byly

$$(\gamma) \qquad a + cx^{2n} = x^n(p^n - b),$$

$$(\delta) \qquad (a + cx^{2n})^2 = x^{2n}(p^n - b)^2,$$

$$(\varepsilon) \qquad (a - cx^{2n})^2 = x^{2n}[(p^n - b)^2 - 4\,ac].$$

Zmocníme-li poslední dvě rovnice na mocninu k-tou, bude

$$(\zeta) \qquad \frac{(a + cx^{2n})^{2k}}{x^{2kn}} = (p^n - b)^{2k},$$

$$(\eta) \qquad \frac{(a - cx^{2n})^{2k}}{x^{2kn}} = [(p^n - b)^2 - 4ac]^k.$$

Dělíme-li rovnici (α) rovnicí (η) a integrujeme-li, obdržíme nový vzorec integrální

$$(1) \int \frac{x^{(2k+1)n+m-1}\,dx}{(a - cx^{2n})^{2k+1}\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}} = -\int \frac{p^{n-m+1}\,dp}{[(p^n - b)^2 - 4ac]^{k+1}}$$

Klademe-li tu $k = 0$, nabudeme integrál (1′) odst. III.

Znásobíme-li rovnice (γ), (ζ), obdržíme

$$(\vartheta) \qquad \frac{(a + cx^{2n})^{2k+1}}{x^{(2k+1)n}} = (p^n - b)^{2k+1};$$

a když dělíme differenciál (1) rovnicí (ϑ), nabýváme pak integrujíce

$$(2) \qquad \int \frac{x^{2(2k+1)n+m-1}\,dx}{(a^2 - c^2x^{4n})^{2k+1}\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}}$$

$$= -\int \frac{p^{n-m-1}\,dp}{(p^n - b)^{2k+1}[(p^n - b)^2 - 4ac]^{k+1}}.$$

Násobíme-li differenciál (1) rovnicí (ϑ), nalezneme

$$(3)\qquad \int x^{m-1}\left(\frac{a+cx^{n}}{a-cx^{2n}}\right)^{2k+1}\frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx^{n}+cx^{2n})^{m}}}$$

$$=-\int\frac{(p^{n}-b)^{2k+1}p^{n-m-1}\,dp}{[(p^{n}-b)^{2}-4ac]^{k+1}},$$

kde pro všechny integrály (1), (2), (3) jsou k a m čísla celistvá, buď kladná nebo záporná, a ve zvláštních případech poskytují řadu integrálů známých, které se různými substitucemi vyčíslují.

Pouhý pohled na integrální vzorce (1), (2), (3) vede k tomu, že m může býti též zlomek $m=\frac{m_1}{m_2}$. Tu třeba, aby byl na pravé straně integrál differenciálu racionálního, zavésti substituci

$$p=q^{m_2}$$

a

$$dp=m_2q^{m_2-1}dq,$$

i musila tedy býti na levé straně, jak patrno, zavedena substituce

$$\sqrt[n]{a+bx^{n}+cx^{2n}}=q^{m_2}x.$$

Aby na levé straně v (1), (2), (3) lomený exponent proměnné x byl odstraněn, třeba klásti $x=z^{m_2}$. Tímto však způsobem zvláštní všeobecnosti integrálů těch se nedocílí.

(Pokračování.)