Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O racionalisování jmenovatelů dvojčlenných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 2, 144--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122040

O racionalisování jmenovatelů dvojčlenných.

Pro studující napsal

dr. F. J. Studnička.

Jakož známo, vede provedení algebraického úkonu odmocňovacího ke dvěma novým druhům čísel*) a sice k tak zvaným *irracionálním*, jež nejsouce obsaženy v tělese čísel racionálních, celistvých neb lomených, vyjadřují se jich řadou nekonečnou, jako na př.

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \ldots,$$

a pak k číslům *imaginárním*, jež nehovíce při násobení znaménkovému pravidlu, nejsou obsaženy v tělese čísel realných, jako na př.

$$\text{imag}\,(a)\,.\,\text{imag}\,(b) = -ab.$$

Poněvadž tedy čísla irracionální nelze *konečným* opakováním úkonu sečítání *přesně* vyjádřiti, a tedy nutno vyčíslení jejich provésti jen *přibližně*, arci tak určitě, jak se toho v případě kterém vyžaduje, nastává pro početní praksi, kde irracionálnosť vyskytne se ve jmenovateli, před provedením takového vyčíslení přibližného napřed úloha, odstraniti tuto irracionálnosť ze jmenovatele. Neb jest-li na př. vyčísliti zlomek

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{1{\cdot}585786\ldots},$$

přijdeme pohodlněji k cíli, odstraníme-li irracionálnosť ve jmenovateli a určíme-li

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{7}(3+\sqrt{2}) = \frac{4{\cdot}4142136\ldots}{7}.$$

Všeobecný úkol sem patřící, pokud máme dvojčlenný výraz na zřeteli, vyžaduje tedy racionalisování neb odstranění irracionálnosti ze jmenovatele zlomku

*) Viz *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy škol středních" I. vyd. pag. 15.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}},$$

kdež n jest celistvé číslo buď *sudé* neb *liché*, takže podlé toho nutno rozeznávati čtyři zvláštní případy.

Jak tu nejjednoduševji přijdeme k cíli, ukazují nám nejlépe známé vzorce dělením algebraickým vznikající, a to pro *sudé* mocniny vzorec*)

$$\frac{x^{2n} - y^{2n}}{x \pm y} = x^{2n-1} \mp x^{2n-2} y + x^{2n-3} y^2 \mp \ldots \mp y^{2n-1}, \quad (1)$$

a pro *liché* mocniny vzorec

$$\frac{x^{2n+1} \pm y^{2n+1}}{x \pm y} = x^{2n} \mp x^{2n-1} y + x^{2n-2} y^2 \mp \ldots + y^{2n}, \quad (2)$$

platí-li současně buď svrchní nebo spodní znamení.

Položíme-li totiž ve vzorci (1)

$$x^{2n} = a, \text{ tedy } x = a^{\frac{1}{2n}},$$

$$y^{2n} = b, \quad „ \quad y = b^{\frac{1}{2n}},$$

při kterémžto obratu arci máme jednoznačnosť odmocnin těchto na zřeteli, nikoli pak mnohoznačnosť,**) obdržíme z něho přímo po převedení čitatele strany levé na pravo

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{2n}} \pm b^{\frac{1}{2n}}} = \frac{a^{\frac{2n-1}{2n}} \mp (a^{2n-2} b)^{\frac{1}{2n}} + (a^{2n-3} b^2)^{\frac{1}{2n}} \mp \ldots \pm b^{\frac{2n-1}{2n}}}{a - b}, (3)$$

z něhož pak jde ve zvláštním případě, kde ponecháno

$$x = a,$$

jednodušší vzorec

$$\frac{1}{a \pm b^{\frac{1}{2n}}} = \frac{a^{2n-1} \mp a^{2n-2} b^{\frac{1}{2n}} + a^{2n-3} b^{\frac{2}{2n}} \mp \ldots \mp b^{\frac{2n-1}{2n}}}{a^{2n} - b}. \quad (4)$$

*) Ibid pag. 81., vzorec (8) a (9).

**) Ibid. pag. 68.

Podlé toho jest tedy na př.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}}{a-b},$$

což i racionalisováním postupným přímo se obdrží.

Podobně plyne ze vzorce (2), položíme-li tam

$$x^{2n+1}=a, \text{ tedy } x=a^{\frac{1}{2n+1}},$$

$$y^{2n+1}=b, \text{ tedy } y=b^{\frac{1}{2n+1}},$$

obratem dřívějším

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{2n+1}}\pm b^{\frac{1}{2n+1}}}=\frac{a^{\frac{2n}{2n+1}}\mp(a^{2n-1}b)^{\frac{1}{2n+1}}+(a^{2n-2}b^2)^{\frac{1}{2n+1}}\mp\ldots+b^{\frac{2n}{2n+1}}}{a\pm b}, \quad (5)$$

z čehož pak ve zvláštním případě, kde ponecháno

$$x=a,$$

vyjde vzorec jednodušší

$$\frac{1}{a\pm b^{\frac{1}{2n+1}}}=\frac{a^{2n}\mp a^{2n-1}b^{\frac{1}{2n+1}}+a^{2n-2}b^{\frac{2}{2n+1}}\mp\ldots+b^{\frac{2n}{2n+2}}}{a^{2n+1}\pm b}. \quad (6)$$

Podlé toho jest na př.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b},$$

$$\frac{1}{a-\sqrt[5]{b}}=\frac{a^4+a^3\sqrt[5]{b}+a^2\sqrt[5]{b^2}+a\sqrt[5]{b^3}+\sqrt[5]{b^4}}{a^5-b},$$

o čemž se možná i přímo přesvědčiti zkouškou, vyžadující odstranění jmenovatelův.