Jan Schuster

O jisté transformaci determinantu a jejím užití na úkol Pothenotův i v mechanice

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 1, 25--36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122037

O jisté transformaci determinantu a jejím užití na úkol Pothenotův i v mechanice.

Dr. *Jan Schuster.*

I.

1. Buďte dány souřadnice tří bodů roviny $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, a tři parametry u, v, w, vázané vztahem

$$vw + wu + uv = 1, \tag{1}$$

a uvažujme determinant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & n_1 \\ 1 & m_2 & n_2 \\ 1 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

kde

$$\left\{ \begin{aligned} m_1 &= x_2 + x_3 + (y_2 - y_3)\, u \\ m_2 &= x_3 + x_1 + (y_3 - y_1)\, v \\ m_3 &= x_1 + x_2 + (y_1 - y_2)\, w \\ n_1 &= y_2 + y_3 + (x_3 - x_2)\, u \\ n_2 &= y_3 + y_1 + (x_1 - x_3)\, v \\ n_3 &= y_1 + y_2 + (x_2 - x_1)\, w. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Označíme-li strany trojúhelníka

$$a = BC, \quad b = CA, \quad a = AB, \quad \text{plochu } P,$$

platí

$$-D = a^2 u + b^2 v + c^2 w - 4P. \tag{4}$$

2. Mezi veličinami (3) platí četné vztahy, jež pro další výpočty dávají značná usnadnění.

Především

$$\left\{ \begin{aligned} m_2 - m_1 + (n_3 - n_1)\, v &= u\,(n_2 - n_3) \\ -(n_2 - n_1) + (m_3 - m_1)\, v &= u\,(m_2 - m_3) \end{aligned} \right. \tag{5}$$

s formulemi vzniklými cyklickou substitucí indexů i parametrů.

Když tedy utvoříme determinant

$$\begin{vmatrix} m_2 - m_1 \;, & -(n_2 - n_1) \\ n_3 - n_1 \;, & m_3 - m_1 \end{vmatrix},$$

a když v něm k prvnímu řádku přičteme druhý, znásobený parametrem v, vznikne

$$u\begin{vmatrix} n_2 - n_3, & m_2 - m_3 \\ n_3 - n_1, & m_3 - m_1 \end{vmatrix},$$

což není než $-uD$, takže máme soustavu relací:

$$6)\quad \begin{cases} (m_2 - m_1)(m_3 - m_1) + (n_2 - n_1)(n_3 - n_1) = -uD \\ (m_3 - m_2)(m_1 - m_2) + (n_3 - n_2)(n_1 - n_2) = -vD \\ (m_1 - m_3)(m_2 - m_3) + (n_1 - n_3)(n_2 - n_3) = -wD \end{cases}$$

3. Jiná soustava relací plyne z

$$\begin{aligned}(m_2 - m_3)\, u &= (x_3 - x_2)\, u + (y_3 - y_1)\, vu - (y_1 - y_2)\, wu \\ &= n_1 - (y_2 + y_3) + (y_3 - y_1)\, vu + (y_2 - y_1)\, wu.\end{aligned}$$

Když nyní užijeme rovnice (1), a převedeme n_1 nalevo, zbude napravo výraz nezávislý na parametrech, a můžeme hned položit:

$$7)\quad \begin{cases} (m_2 - m_3)\, u - n_1 = (m_3 - m_1)\, v - n_2 = (m_1 - m_2)\, w - n_3 = \\ \qquad = y_1 (vw - 1) + y_2 (wu - 1) + y_3 (uv - 1) = S. \end{cases}$$

Stejně by se pak obdrželo:

$$8)\quad \begin{cases} (n_2 - n_3)\, u + m_1 = (n_3 - n_1)\, v + m_2 = (n_1 - n_2)\, w + m_3 = \\ \qquad = x_1 (1 - vw) + x_2 (1 - wu) + x_3 (1 - uv) = T. \end{cases}$$

4. Tyto vztahy jsou užitečné k úpravě výrazu:

$$F_1 = \begin{vmatrix} (m_1 - m_2) x_3 + (n_1 - n_2) y_3, & v \\ (m_1 - m_3)\, x_2 + (n_1 - n_3) y_2, & -w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 - n_1, & -x_3 - y_3 v \\ n_3 - n_1, & -x_2 + y_2 w \end{vmatrix}.$$

V prvním determinantu proveďme rozklad ve dva, podle členů prvního sloupce, a přepišme oba na tvar:

$$a)\qquad \begin{vmatrix} (m_1 - m_2)\, w, & x_2 \\ (m_1 - m_3)\, v, & -x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_1 - n_2, & y_2\, v \\ n_1 - n_3, & -y_3\, w \end{vmatrix}.$$

V prvním z těchto pak nahraďme členy prvního sloupce hodnotami plynoucími ze (7), jež jsou $n_3 + S$, $-n_2 - S$ resp. Když pak ve druhém členu v F_1 podobně rozložíme druhý sloupec, a přičteme-li vzniklé členy v souhlasném pořadí ke členům (a), obdržíme

$$\begin{vmatrix} S + n_1, & x_2 \\ -S - n_1, & -x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (n_1 - n_2)\, w, & y_2 + y_3 \\ (n_1 - n_3)\, v, & -(y_2 + y_3) \end{vmatrix}.$$

Když sem zase dosadíme $S + n_1$ ze (7) a hodnoty prvků prvního sloupce ve druhém determinantu z (8), vznikne:

$$(m_2 - m_3)\, u\, (x_2 - x_3) - (y_2 - y_3)\, (m_2 - m_3),$$

z čehož se zřetelem ke čtvrté rovnici soustavy (3):

9) $$F_1 = (m_3 - m_2)\, n_1.$$

Podobně se transformuje výraz:

$$G_1 = \begin{vmatrix} (m_1 - m_2)\, x_3 + (n_1 - n_2)\, y_3, & v \\ (m_1 - m_3)\, x_2 + (n_1 - n_3)\, y_2, & -w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3 - m_1, & -y_2 - x_2 w \\ m_2 - m_1, & -y_3 + x_3 v \end{vmatrix}$$

který hned převedeme na

$$\begin{vmatrix} m_1 - m_2, & vx_2 \\ m_1 - m_3, & -wx_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T - m_3, & +y_2 \\ m_2 - T, & -y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3 - m_1, & -y_2 \\ m_2 - m_1, & -y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3 - m_1, & -x_2 w \\ m_2 - m_1, & x_3 v \end{vmatrix}.$$

Zde slučme oba vnitřní a oba krajní členy, takže

$$\begin{vmatrix} T - m_1, & y_2 \\ m_1 - T, & -y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 - m_2, & v\,(x_2 + x_3) \\ m_1 - m_3, & -w\,(x_2 + x_3) \end{vmatrix}.$$

Dosazením hodnoty $T - m_1$ z (8) a $(m_1 - m_2)\, w$, $(m_1 - m_3)\, v$ ze (7), vznikne podle první rovnice ze (3):

10) $$G_1 = (n_2 - n_3)\, m_1.$$

Cyklicky ovšem patří do 9) a 10) další dvě formule.

Další obdobné funkce jsou:

$$H_1 = \begin{vmatrix} (m_1 - m_2)\, x_3 + (n_1 - n_2)\, y_3, & 1 \\ (m_1 - m_3)\, x_2 + (n_1 - n_3)\, y_2, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 - n_1, & -y_3 + x_3 v \\ n_3 - n_1, & -y_2 - x_2 w \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} m_1 - m_2, & x_2 \\ m_1 - m_3, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_1 - n_2, & y_2 \\ n_1 - n_3, & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 - n_1, & -y_3 \\ n_3 - n_1, & -y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (n_2 - n_1)\, w, & x_3 \\ (n_3 - n_1)\, v, & -x_2 \end{vmatrix}.$$

Obě střední sloučíme, v poslední je podle (8) první sloupec roven $m_3 - T$, $T - m_2$ resp., takže

$$\begin{vmatrix} m_1 - T, & x_2 \\ m_1 - T, & x_3 \end{vmatrix} + (y_2 + y_3)\,(n_3 - n_2)$$

po opětném užití hodnoty $(m_1 - T)$ z (8) a hodnoty n_1 ze (3) vznikne

11) $$H_1 = (n_3 - n_2)\, n_1.$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} (m_1 - m_2)\, x_3 + (n_1 - n_2)\, y_3, & 1 \\ (m_1 - m_3)\, x_2 + (n_1 - n_3)\, y_2, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_2 - m_1, & -x_3 - y_3 v \\ m_3 - m_1, & -x_2 + y_2 w \end{vmatrix}.$$

Rozviňme jako v H_1, v posledním náhradou ze (7) bude první sloupec $-S - n_3$ resp. $S + n_2$, slučme první a třetí a druhý a čtvrtý, což dá:

$$\begin{vmatrix} m_1 - m_2, & x_2 + x_3 \\ m_1 - m_3, & x_3 + x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S + n_1, & y_2 \\ S + n_1, & y_3 \end{vmatrix}$$

12) a $$J_1 = (m_2 - m_3)\, m_1.$$

II.

5. Nyní se obratíme k užití provedených výkonů v úkolu Pothenotově.

V tomto úkolu jde jednak o určení polohy bodu Q, stanoviště pozorovatelova, který měří zorné úhly

$$\varphi = \sphericalangle BQC, \qquad \psi = \sphericalangle CQA, \qquad \omega = \sphericalangle AQB,$$

a nadto jest určiti změny v poloze Q, způsobené známými posuny bodů základních (A, B, C) nebo změnami zorných úhlů, pokud vzniklé změny polohy jsou tak malé, že dovolují užití metody superposice. K určení polohy bodu Q slouží výrazy pro úhly:

$$\left(\frac{y-y_3}{x-x_3}-\frac{y-y_2}{x-x_2}\right)\operatorname{cotg}\varphi = 1+\frac{(y-y_3)(y-y_2)}{(x-x_3)(x-x_2)}$$

$$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}-\frac{y-y_3}{x-x_3}\right)\operatorname{cotg}\psi = 1+\frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(x-x_1)(x-x_3)}$$

$$\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}-\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\operatorname{cotg}\omega = 1+\frac{(y-y_2)(y-y_1)}{(x-x_2)(x-x_1)} .$$

Zde platí

13) $$\varphi+\psi+\omega = 0,\ 360^\circ,$$

kterážto rovnice jest ekvivalentní s (1), když

14) $$u = \operatorname{cotg}\varphi, \qquad v = \operatorname{cotg}\psi, \qquad w = \operatorname{cotg}\omega.$$

Ale potom soustava posledních rovnic pro kružnice se přepíše v rovnice s koefficienty (3):

15) $$\begin{cases} x^2+y^2-m_1x-n_1y = L_1 \equiv K_1 \\ x^2+y^2-m_2x-n_2y = L_2 \equiv K_2 \\ x^2+y^2-m_3x-n_3y = L_3 \equiv K_3 \end{cases}$$

kde

16) $$\begin{cases} L_1 = -(x_2x_3+y_2y_3)+(x_2y_3-x_3y_2)\,u \\ L_2 = -(x_3x_1+y_3y_1)+(x_3y_1-x_1y_3)\,v \\ L_3 = -(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1y_2-x_2y_1)\,w. \end{cases}$$

Určení souřadnic x, y bodu Q z rovnic (15) je teď bezprostřední:

$$-xD = \begin{vmatrix} 1, & L_1, & n_1 \\ 1, & L_2, & n_2 \\ 1, & L_3, & n_3 \end{vmatrix}, \qquad -yD = \begin{vmatrix} 1, & m_1, & L_1 \\ 1, & m_2, & L_2 \\ 1, & m_3, & L_3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka: Nejde-li o další důsledky, nýbrž jen o polohu bodu Q, netřeba počítat determinantů právě uvedených. Zvolíme-li totiž bod A za základní, takže $x_1 = y_1 = 0$, jest $L_2 = L_3 = 0$, kdežto

$$L_1 = -bc\cos\alpha + bc\sin\alpha\operatorname{cotg}\varphi = bc\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}$$

a pak máme jednodušeji:

$$18)\qquad \begin{cases} -(x-x_1)\,D = \dfrac{bc\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}(n_2-n_2) \\[2ex] -(y-y_1)\,D = \dfrac{bc\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}(m_3-m_2). \end{cases}$$

Při tom značí α úhel BAC v trojúhelníku základnim.

6. Posuny bodu Q buďte takové, že lze účinky od jednotlivých základních bodů počítat jakožto veličiny navzájem nezávislé, takže platí:

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial x}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial x}{\partial y_2}\Delta y_2 + \frac{\partial x}{\partial x_3}\Delta x_3 + \frac{\partial x}{\partial y_3}\Delta y_3$$

a podobná rovnice pro Δy.

Jednoduchá pravidla o derivacích vedou k výrazu:

$$-\frac{\partial x}{\partial x_1}D^2 = \begin{vmatrix} 1, & L_1, & 0 \\ 1, & L_2, & v \\ 1, & L_3, & -w \end{vmatrix} D + \begin{vmatrix} 1, & 0, & n_1 \\ 1, & -x_3-y_3 v, & n_2 \\ 1, & -x_2+y_2 w, & n_3 \end{vmatrix} D +$$

$$+\begin{vmatrix} 1, & L_1 & n_1 \\ 1, & L_2 & n_2 \\ 1, & L_3 & n_3 \end{vmatrix} 2\{(x_1-x_3)v + (x_1-x_2)w - (y_2-y_3)\}.$$

Koeficient posledního členu je $2(n_2-n_3)$.

Všechny determinanty převeďme odečítáním na druhý řád. Pak zde vystoupí členy:

$$19)\qquad \begin{cases} L_2 - L_1 = (m_1-m_2)\,x_3 + (n_1-n_2)\,y_3 \\ L_3 - L_2 = (m_2-m_3)\,x_1 + (n_2-n_3)\,y_1 \\ L_1 - L_3 = (m_3-m_1)\,x_2 + (n_3-n_1)\,y_2 \end{cases}$$

a třetí determinant

$$-2(L_2-L_1)(n_1-n_3)(n_2-n_3) - 2(L_3-L_1)(n_2-n_1)(n_2-n_3)$$

přepíšeme podle (6) na

$$2D\begin{vmatrix} L_2-L_1, & -v \\ L_3-L_1, & w \end{vmatrix} + 2(m_2-m_3)\begin{vmatrix} L_2-L_1, & m_1-m_2 \\ L_3-L_1, & m_1-m_3 \end{vmatrix}.$$

Poslední determinant jest podle (17) yD, a sloučíme-li všecky ostatní členy v $\frac{\partial x}{\partial x_1}$, vznikne

$$D\left\{\begin{vmatrix} L_2-L_1, & -v \\ L_3-L_1, & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_3-y_3 v, & n_2-n_1 \\ -x_2+y_2 w, & n_3-n_1 \end{vmatrix} - 2y(m_2-m_3)\right\}.$$

Ale podle (19) jsou první dva členy v závorce $-F_1$, takže po zkrácení vznikne jednoduše

$$\text{20)} \qquad -\frac{\partial x}{\partial x_1} D = (m_3 - m_2)(2y - n_1).$$

Další požadavek jest určiti

$$-\frac{dx}{dy_1} D^2 = D_1 \begin{vmatrix} 1, & L_1, & 0 \\ 1, & L_2, & 1 \\ 1, & L_3, & 1 \end{vmatrix} + D \begin{vmatrix} 1, & 0 & n_1 \\ 1, & -y_3 + x_3\, v, & n_2 \\ 1, & -y_2 - x_2\, w, & n_3 \end{vmatrix} +$$
$$+ 2 \begin{vmatrix} 1, & L_1, & n_1 \\ 1, & L_2, & n_2 \\ 1, & L_3, & n_3 \end{vmatrix} (m_3 - m_2).$$

Zde zase přetvoříme třetí determinant podle (2)....

$$2(L_2 - L_1)(n_3 - n_1)(m_3 - m_2) - 2(L_3 - L_1)(n_2 - n_1)(m_3 - m_2) =$$
$$- 2D \begin{vmatrix} L_2 - L_1, & 1 \\ L_3 - L_1, & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} L_2 - L_1, & m_1 - m_2 \\ L_3 - L_1, & m_1 - m_3 \end{vmatrix} (n_2 - n_3),$$

kde druhý člen je podle (17) $-2\,yD(n_2 - n_3)$, a dosazením vznikne

$$-\frac{\partial x}{\partial y_1} D = - \begin{vmatrix} L_2 - L_1, & 1 \\ L_3 - L_1, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -y_3 + x_3 v, & n_2 - n_1 \\ -y_2 - x_2 w, & n_3 - n_1 \end{vmatrix} - 2y\,(n_2 - n_3).$$

Zde jsou první dva členy rovny $-H_1$, takže

$$\text{21)} \qquad -\frac{\partial x}{\partial y_1} D = (n_2 - n_3)(n_1 - 2y).$$

Dále jest, obdobně s právě odvozeným výrazem:

$$-\frac{\partial y}{\partial x_1} D^2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & L_1 \\ 1, & 1, & L_2 \\ 1, & 1, & L_3 \end{vmatrix} D + \begin{vmatrix} 1, & m_1, & 0 \\ 1, & m_2, & -x_3 + y_3\, v \\ 1, & m_3, & -x_2 + y_2\, w \end{vmatrix} D +$$
$$+ \begin{vmatrix} 1, & m_1, & L_1 \\ 1, & m_2, & L_2 \\ 1, & m_3, & L_3 \end{vmatrix} 2(n_2 - n_3).$$

Přetvoření posledního determinantu se děje zase užitím (2).

$$-\frac{\partial y}{\partial x_1} D = \begin{vmatrix} L_2 - L_1, & 1 \\ L_3 - L_1, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_2 - m_1, & -x_3 - y_3\, v \\ m_3 - m_1, & -x_2 + y_2\, w \end{vmatrix} + 2x\,(m_2 - m_3).$$

První dva členy napravo jsou J_1, a proto

$$\text{22)} \qquad -\frac{\partial y}{\partial x_1} D = (m_3 - m_2)(m_1 - 2x).$$

Posléze pro $\frac{\partial y}{\partial y_1}$ platí:

$$-\frac{\partial y}{\partial y_1}D^2 = D\begin{vmatrix} 1, & 0, & L_1 \\ 1, & -v, & L_2 \\ 1, & w, & L_3 \end{vmatrix} + D\begin{vmatrix} 1, & m_1, & 0 \\ 1, & m_2, & -y_3+x_3 v \\ 1, & m_3, & -y_2-x_2 w \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} 1, & m_1, & L_1 \\ 1, & m_2, & L_2 \\ 1, & m_3, & L_3 \end{vmatrix} 2(m_2-m_3)$$

nebo

$$-\frac{\partial y}{\partial y_1}D = \begin{vmatrix} L_2-L_1, & -v \\ L_3-L_1, & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_2-m_1, & -y_3+x_3 v \\ m_3-m_1, & -y_2-x_2 w \end{vmatrix} + 2x(n_2-n_3).$$

První dva členy napravo nejsou než $-G_1$, a proto

$$23)\qquad -\frac{\partial y}{\partial y_1}D = (n_2-n_3)(2x-m_1).$$

7. Dosavadní výsledky třeba nyní ověřit. To se stane především, uvažujeme-li posuny bodu Q, způsobené jen posuny bodu A, tedy $(dx)_1$, $(dy)_1$ dány formulemi:

$$24)\qquad \begin{cases} (dy)_1 = -\frac{1}{D}(m_1-2x)\,[(m_3-m_2)\,dx_1+(n_3-n_2)\,dy_1] \\ (dx)_1 = -\frac{1}{D}(2y-n_1)\,[(m_3-m_2)\,dx_1+(n_3-n_2)\,dx_1]. \end{cases}$$

Dáme-li tyto veličiny do poměru a srovnáme-li s hodnotou diferenciálního poměru, jež plyne z rovnice (15) pro kruh K_1, totiž

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_1-2x}{2y-n_1},$$

shledáváme, že skutečně nezávisí směr posunu bodu Q na směru posunu bodu A, neboť kruh K_1 určený body B, C, Q, zůstává pevný, ať A vykonává kterékoli pohyby.

8. Abychom lépe přehlédli závislost posunů bodu Q na posunech bodu A, vyšetřme posuny stejné absolutní hodnoty r_1. Položíme-li tedy

$$\Delta x_1 = r_1\cos\lambda_1,\qquad \Delta y_1 = r_1\sin\lambda_1,$$

a označíme-li R_1 amplitudu kmitů bodu Q, způsobených oběhem bodu A po malé kružnici poloměru r_1 kol středu (x_1, y_1), obdržíme

$$25)\qquad R_1^2 = \left\{(m_1-2x)^2+(2y-n_1)^2\right\}\left\{(m_3-m_2)^2+(n_3-n_2)^2\right\}\frac{r_1^2}{D^2},$$

při čemž položeno

$$(m_2 - m_3) = \sqrt{(m_2 - m_3)^2 + (n_2 - n_3)^2} \sin \delta_1$$

$$n_2 - n_3 = -\sqrt{(m_2 - m_3)^2 + (n_2 - n_3)^2} \cos \delta_1,$$

takže posun bodu Q má hodnotu

$$\sqrt{(\Delta x)_1^2 + (\Delta y)_1^2} = R_1 \sin (\delta_1 - \lambda_1).$$

Projde tedy bod Q dvakrát polohou (x, y), když A opíše kruh, a to, když $\lambda_1 = \delta_1$, nebo $\lambda_1 = 180 + \delta_1$, což odpovídá průchodu bodu A přímkou spojující polohy (x_1, y_1) a (x, y). Tato přímka má směrnici

$$-\frac{m_2 - m_3}{n_2 - n_3} = tg\, \delta_1.$$

Maxima odchylek odpovídají polohám λ_1 o 90^0 různým od předchozích, neboť při předpokladu malého r_1 se k malým veličinám řádu vyššího nehledí.

Pro lepší jasnost v posuzování posunů vyjádřeme poměr $\frac{R_1}{r_1}$ prvky trojúhelníka ABC.

První činitel ve (25) se rozvine na

$$m_1^2 + n_1^2 + 4(x^2 + y^2 - xm_1 - yn_1) = m_1^2 + n_1^2 + 4L_1$$

podle (15). Když pak zase vztahujeme prvky na A jako bod základní a užijeme rovnic (3) obdržíme

$$b^2 + c^2 + 2(x_2 x_3 + y_2 y_3) + [b^2 + c^2 - 2(x_2 x_3 + y_2 y_3)] \operatorname{cotg}^2 \varphi +$$
$$+ 2[(x_2 + x_3)(y_2 - y_3) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)] \operatorname{cotg} \varphi - 4(x_2 x_3 +$$
$$+ y_2 y_3) + 8P \operatorname{cotg} \varphi = (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) \operatorname{cosec}^2 \varphi + 4P \operatorname{cotg} \varphi =$$
$$= a^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi + 4P \operatorname{cotg} \varphi.$$

Druhý činitel jest

$$[x_3 - x_2 + y_3 \operatorname{cotg} \varphi + y_2 \operatorname{cotg} \omega]^2 + [y_3 - y_2 - x_3 \operatorname{cotg} \varphi - x_2 \operatorname{cotg} \omega]^2 =$$
$$= a^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2 \psi + c^2 \operatorname{cotg}^2 \omega - 4P([\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega] -$$
$$- 2(y_2 y_3 + x_2 x_3) \operatorname{cotg} \omega \operatorname{cotg} \psi = a^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2 \psi + c^2 \operatorname{cotg}^2 \omega -$$
$$- 2bc \operatorname{cotg} \psi \operatorname{cotg} \omega \cos \alpha - 4P (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega).$$

Zde značí druhý až čtvrtý člen čtverec strany stejnolehlé s a v trojúhelníku, jehož ramena, svírající týž úhel α, jsou proti b a c větší v poměru $\cot \psi$ resp. $\cot \omega$. Značíme li ji $\overline{a}$, bude

$$26) \quad \frac{R_1^2}{r_1^2} = \frac{[a^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi + 4P \operatorname{cotg} \varphi]\,[a^2 + \overline{a}^2 - 4P(\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega)]}{[a^2 \operatorname{cotg} \varphi + b^2 \operatorname{cotg} \psi + c^2 \operatorname{cotg} \omega - 4P]^2}.$$

9. Na základě zákona nezávislosti malých veličin, pokud se hledí jen k jejich prvním mocninám, můžeme hned napsat posuny

bodu Q jako funkce posunů všech bodů A, B, C, užijeme-li cyklické substituce indexů:

$$
27)\quad \begin{cases}
-D\Delta x = (n_1 - 2y)\,[(m_2 - m_3)\,\Delta x_1 + (n_2 - n_3)\,\Delta y_1] \\
\qquad + (n_2 - 2y)\,[(m_3 - m_1)\,\Delta x_2 + (n_3 - n_1)\,\Delta y_2] \\
\qquad + (n_3 - 2y)\,[(m_1 - m_2)\,\Delta x_3 + (n_1 - n_2)\,\Delta y_3] \\
-D\Delta y = (2x - m_1)\,[(m_2 - m_3)\,\Delta x_1 + (n_2 - n_3)\,\Delta y_1] \\
\qquad + (2x - m_2)\,[(m_3 - m_1)\,\Delta x_2 + (n_3 - n_1)\,\Delta y_2] \\
\qquad + (2x - m_3)\,[(m_1 - m_2)\,\Delta x_3 + (n_1 - n_2)\,\Delta y_3].
\end{cases}
$$

Tato formule dovoluje druhé ověření nalezených výsledků. Kdyby se všecky body A, B, C pošinuly stejně, takže

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \xi, \qquad \Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 = \eta,$$

musí se celý uvažovaný systém chovati jako tuhý útvar, a bod Q se pošine o touž veličinu. Vskutku sečítáme-li ve formuli předposlední po sloupcích, obdržíme

$$\xi \,\Sigma n_1 (m_2 - m_3) - 2y\xi\, \Sigma (m_2 - m_3) + \eta \Sigma n_1 (n_2 - n_3) - 2y\eta \Sigma (n_2 - n_3)$$

kde Σ se vztahuje na cyklické permutace tří indexů.

Koeficient při ξ je $-D$, ostatní koeficienty totožně mizejí. Když týž postup provedeme i v poslední rovnici, máme, jak žádáno

$$\Delta x = \xi, \quad \Delta y = \eta.$$

10. Pro posouzení, jak voliti základní body, rozhodují hlavně úhly φ, ψ, ω. Protože se uplatňují cotangentami, nutno dbáti, aby úhly nebyly malé, neboť pak se malé posuny základních bodů objeví ve velkých násobcích na bodě Q. Dále ukazují rovnice (27), že posuny budou menší, je-li absolutní hodnota D velká.

Podle (4) vidíme, že bude výhodné, aby byly u, v, w vesměs záporné, tedy úhly φ, ψ, ω tupé, t. j. bude dobře, platí-li $\varphi + \psi + \omega = 360°$, t. j. bod Q lež uvnitř základního trojúhelníka, a body A, B, C buďte rozděleny v obzoru pozorovatelově co možná stejnoměrně (asi v úhlech $120°$). Ostatně extremum D nastane obecně v Brocardových bodech trojúhelníka ABC.

Že rovnice $\varphi + \psi + \omega = 0$ je méně výhodná, plyne z toho, že se koeficient při jedné straně ve (4) změní v opačný, čímž se absolutní hodnota D vždy velmi zmenší.

11. Vliv změn zorných úhlů φ, ψ, ω na polohu bodu Q se vyjádří bezprostředně, a nevyžaduje zvláštních úkonů, jako tomu bylo výše.

Z rovnice (13) plyne,

$$28)\qquad \Delta\varphi + \Delta\psi + \Delta\omega = 0.$$

Derivací formulí (17) obdržíme:

$$-\frac{\partial x}{\partial \varphi} D = \operatorname{cosec}^2 \varphi \, [p_1 (n_3 - n_2) + (x_2 - x_3)(L_3 - L_2) + a^2 x],$$

kde

29) $p_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad p_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad p_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1.$

Když spojíme člen prostý parametrů (cotangent) v prvním členu v hranaté závorce s posledním členem, bude roven

$$(y_2 - y_3)\, 2P + a^2 (x - x_1).$$

Koeficient při $v\, [= \operatorname{cotg} \psi]$ činí

$$(x_3 - x_1)\, p_1 - (x_2 - x_3)\, p_2 = x_3 - 2P,$$

a podobně při $w\, [= \operatorname{cotg} \omega]$ stojí

$$(x_2 - x_1)\, p_1 + (x_2 - x_3)\, p_3 = x_2 - 2P,$$

neboť

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0.$$

Je tedy možno psáti výsledek ve tvaru

$$-\frac{\partial x}{\partial \varphi} D = \operatorname{cosec}^2 \varphi \, [a^2 (x - x_1) + 2P (y_2 - y_3 + x_3 \operatorname{cotg} \psi + x_2 \operatorname{cotg} \omega)].$$

Koeficient při $2P$ možná všude psáti

$$n_3 - n_2 + x_1 (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega).$$

Ale $\operatorname{cosec}^2 \varphi \, (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega) = \dfrac{-1}{\sin \varphi \sin \psi \sin \omega} = \Phi,$ takže

$$\text{30)} \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} D = \operatorname{cosec}^2 \varphi \, [a^2 (x - x_1) + 2P (n_3 - n_2)] + x_1 \Phi \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \psi} D = \operatorname{cosec}^2 \psi \, [b^2 (x - x_2) + 2P (n_1 - n_3)] + x_2 \Phi \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \omega} D = \operatorname{cosec}^2 \omega \, [c^2 (x - x_3) + 2P (n_2 - n_1)] + x_3 \Phi \\ -\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} D = \operatorname{cosec}^2 \varphi \, [a^2 (y - y_1) + 2P (m_2 - m_3)] + y_1 \Phi \\ -\dfrac{\partial y}{\partial \psi} D = \operatorname{cosec}^2 \psi \, [b^2 (y - y_2) + 2P (m_3 - m_1)] + y_2 \Phi \\ -\dfrac{\partial y}{\partial \omega} D = \operatorname{cosec}^2 \omega \, [c^2 (y - y_3) + 2P (m_1 - m_2)] + y_3 \Phi \end{cases}$$

Na první pohled překvapuje závislost derivací na absolutní hodnotě souřadnic, ale uvážíme-li rovnici (28), vidíme hned, že jejím dosazením vystoupí ve výsledku rozdíly členů obsahujících Φ, jinými slovy, každá změna úhlová jednoho paprsku postihuje dva úhly smyslem protivným, tedy se uplatní členy s Φ jen diferenčně.

Co se praktických výpočtů týče, vidíme na formulích (30), že je výhodnější užívati tří úhlů φ, ψ, ω, než-li dvou a dosazovati φ, ψ, $360-\varphi-\psi$, neboť se sloučením derivací stanou výsledky nepřehlednými a složitějšími.

III.

12. Dosavádních výsledků možná užít k určení virtuálních posunů a sil v případě, kdy bod Q spojen s pevnými body A, B, C pružnými vlákny modulů pružnosti E_1, E_2, E_3, v nichž působí napětí T_1, T_2, T_3, a mají-li vlákna po pošinutí zachovati vzájemné sklony.

Především patrno, že úhly φ, ψ, ω určeny napětími, neboť

$$-2T_2 T_3 \cos\varphi = T_2^2 + T_3^2 - T_1^2 \text{ atd.},$$

takže k zachování úhlů nutno, aby napětí i po pošinutí zůstala v témž poměru. Z toho plyne požadavek

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{\Delta T_2}{T_2} = \frac{\Delta T_3}{T_3} = \varepsilon.$$

Změna délky vlákna $AQ = l_1$ dána rovnicí

$$l_1 \Delta l_1 = (y-y_1)(\Delta y - \Delta y_1) + (x-x_1)(\Delta x - \Delta x_1),$$

kde $\Delta x, \Delta y$ značí hodnoty udané v rovnicích (23).

Ježto dále $E_1 \Delta l_1 = l_1 \Delta T_1$, máme pro nová napětí, jež nutno dodat, aby při posunech bodů A, B, C zůstaly úhly zachovány, tyto podmínky:

$$31)\quad \frac{1}{E_i}\varepsilon l_i^2 T_i = (y-y_i)(\Delta y - \Delta y_i) + (x-x_i)(\Delta x - \Delta x_i)\ (i = 1, 2, 3).$$

Vidíme tedy, že je-li dán malý koeficient úměrnosti ε, platí mezi šesti složkami posunů Δx_i, Δy_i tři rovnice, nebo naopak jsou-li dány posuny dvou vrcholů, možno z těchto rovnic určit posuny třetího vrcholu a poměrné zvětšení všech napětí $(l_1+\varepsilon)$.

Též můžeme užíti dosavadních výsledků k určení změn napětí, způsobených posuny základních bodů. Mění-li se napětí, mění se též úhly φ, ψ, ω podle pravidla

$$32)\quad \begin{cases} -\Theta\Delta\varphi = T_1(+\Delta T_1 + \Delta T_2 \cos\omega + \Delta T_3 \cos\psi) \\ -\Theta\Delta\psi = T_2(\Delta T_1 \cos\omega + \Delta T_2 + \Delta T_3 \cos\varphi) \\ -\Theta\Delta\omega = T_3(\Delta T_1 \cos\psi + \Delta T_2 \cos\varphi + \Delta T_3), \end{cases}$$

kde $\Theta = T_2 T_3 \sin\varphi = T_3 T_1 \sin\psi = T_1 T_2 \sin\omega.$

Pak máme tyto výrazy dosadit do:

$$\Delta x = \sum_{=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial x}{\partial y_i}\Delta y_i\right) + \sum_{\varphi,\psi,\omega}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\Delta\varphi,$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial y}{\partial y_i} \Delta y_i \right) + \sum_{\varphi, \psi, \omega} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi .$$

Když pak dosadíme do rovnice tvaru (31), vzniknou tři rovnice, z nichž postačí napsat prvou:

$$\frac{l_1^2 \Delta T_1}{E_1} = (y - y_1) \left[-\Delta y_1 + \sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial y}{\partial y_i} \Delta y_i \right) + \sum \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi \right] \tag{33}$$
$$+ (x - x_1) \left[-\Delta x_1 + \sum \left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial x}{\partial y_i} \Delta y_i \right) + \sum \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta \varphi \right].$$

Z těchto rovnic lze pak vypočítat změny napětí ΔT_1, ΔT_2, ΔT_3, když za $\Delta \varphi$, $\Delta \psi$, $\Delta \omega$ dosadíme jejich hodnoty ze (32).

Transformation d'un déterminant et son application au problème de Pothenot et à la statique.

(Extrait de l'article précédent.)

C'est un déterminant spécial du troisième ordre dont les propriétés, étudiées dans la première partie du mémoire, permettent d'exprimer, d'une façon particulièrement simple, le déplacement du point d'observation en fonction des déplacements de trois points de base ou en fonction des variations des angles visuels. Si l'on attache, d'autre part, un point à trois points fixes par des fils extensibles, on voit que la variation de ce point, causée par la variation des tensions des fils ou des positions des points fixes, se réduit au même problème.