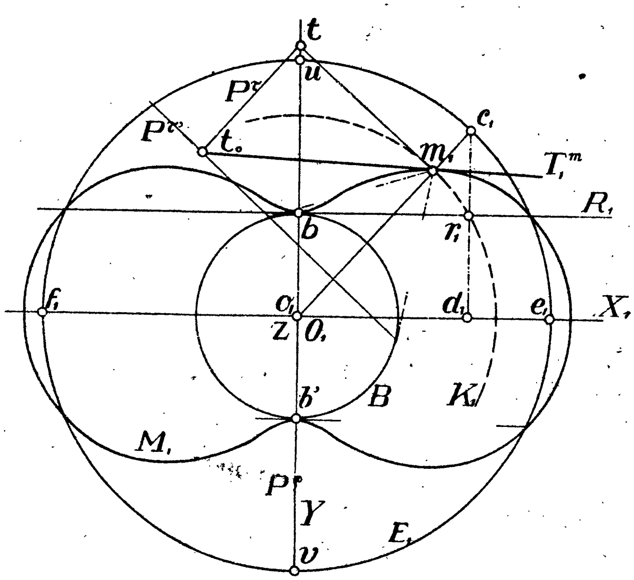
O lemniskátě Boothově.

V. Jeřábek, ředitel v. v. v Telči.
Obrazec rýsoval dr. J. Roháček.

V průmětně π buďtež dány kružnice E_1 a její dva kolmé průměry $e_1f_1 \equiv X_1$ a $uv \equiv Y$. Střed kružnice označme O_1. Pevnou přímkou $R_1 \parallel X_1$ protněme poloměr O_1u v bodě b. S bodu c_1, zvoleném na E_1, spusťme kolmici na R_1 a sestrojme její patou r_1 ze



středu O_1 kružnici K_1, jež seče poloměr O_1c_1 v bodě m_1. Geom. místem bodu m_1 jest, jak později dokážeme, *lemniskáta Boothova* M_1, která je úpatnicí elipsy, určené ohnisky e_1f_1 a vrcholem b, pro její střed O_1, jako pól.

Stanovme nyní plochy, jejichž společná křivka M promítá se do M_1 a sestrojme tečnu této křivky v bodě m_1. V bodě r_1 postavme kolmici na π a vytkněme na ní, nad průmětnou, bod r ve výšce $r_1r = br_1$. Považujme nyní R_1 za průmět přímky R spojující bod b s bodem r a K_1 za průmět kružnice K, jdoucí bodem r. Mění-li bod r na přímce R svou polohu, vytvoří kružnice K rotační hyperboloid, jehož hrdelním kruhem je B $(O_1, \overline{O_1b})$ a osou přímka O, mající svůj průmět v $O_1 \equiv o_1$ ve společném středu kruhů B a E_1. Tím určena je plocha jedna. Abychom stanovili ještě plochu druhou, které křivka M náleží, položme přímkami R a Y rovinu ϱ, která má tudíž svou stopu P^ϱ v ose Y. Kolmice vztyčené v bodech e_1, f_1 na průmětnu π, protínají rovinu ϱ v bodech e, f. Spojnice $X \parallel R$ těchto bodů má svůj průmět v ose $X_1 \parallel R_1$. Je-li nyní v rovině ϱ osami uv, ef stanovena elipsa E, její průmět je v kružnici E_1. Buďtež osa O' hyperboloidu, elipsa E a průmětna π řídícími útvary konoidu, jehož jedna površka $OC \parallel O_1C_1$ seče přímku O v bodě o a elipsu E v bodě c. Rovina $(ocr) \parallel \pi$ seče přímku X v bodě d, jehož průmět d_1 na X_1 vytíná spojnice c_1r_1. V této rovině sekou se površka oc konoidu a kružnice K rot. hyperboloidu v bodě m křivky M, společné těmto dvěma plochám. Jest tedy bod m_1, v němž o_1c_1 a K_1 se protínají, bodem křivky M_1, jakožto průmětu křivky M.

Tečnu T_1^m křivky M_1 v jejím bodě m_1 sestrojíme průmětem průsečnice rovin tečných τ, τ' konoidu resp. rot. hyperboloidu, vedených v bodě m. Rovinu τ určíme tečnou rovinou hyper. paraboloidu, který se podél površky oc konoidu dotýká a který je stanoven přímkou $O \perp \pi$, tečnou v bodě c k elipse a průmětnou π. Rovina τ v bodě m je stanovena površkami obou soustav $mc \parallel m_1c_1$ a mt, z nichž tato má svůj stopník t na stopnici P^ϱ hyp. paraboloidu a její průmět m_1t je na o_1c_1 kolmý. Stopa P^τ této roviny prochází bodem t rovnoběžně s $o_1c_1 \parallel oc$. Stopa $P^{\tau'}$ roviny tečné τ' v bodě m rot. hyperboloidu je polárou bodu m_1 vzhledem k hrdelnímu kruhu B. Průsečík t_0 stop P^τ a $P^{\tau'}$ je stopou tečny T^m křivky M v bodě m a spojnice t_0m_1 je pak tečnou T_1^m jejího průmětu.

Rovnice křivky M_1. Rovnici křivky M_1 odvodíme z rovnic ploch, které křivku M určují. Za tím účelem pokládejme $X_1, Y, Z \equiv O$ za pravoúhlou soustavu souřadnou. Pak rovnice kruhu K_1 je

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ kdež } o_1r_1 = r$$

a poněvadž bod $r(x_1, b)$ kružnici náleží

$$x_1^2 + b^2 = r^2.$$

Vyloučením r z obou rovnic obdržíme

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + b^2$$

a klademe-li $x_1 = z$

$$x^2 + y^2 - z^2 = b^2, \qquad (1)$$

což jest rovnice rotačního hyperboloidu.

Přímka o_1c_1 má rovnici

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \qquad (2)$$

a že c_1 je na kružnici $(o_1, \overline{o_1e_1} = e)$

$$x_1^2 + y_1^2 = e^2,$$

a položíme-li $e_1 b = a$ je $e^2 = a^2 - b^2$ a

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 - b^2. \tag{3}$$

Zdvojmocníme-li rovnici 2) a užitím věty v úměře platné

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{e^2}{x_1^2}.$$

Položíme-li opět $x_1 = z$ obdržíme

$$(x^2 + y^2)z^2 = (a^2 - b^2)x^2 \tag{4}$$

což je rovnice konoidu.

Vyloučením z z rovnic 1) a 4) plyne

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2, \text{ jako rovnice křivky } M_1.$$

Tato rovnice je rovnicí úpatnice elipsy o poloosách a, b pro pól O_1, čili rovnicí lemniskáty Boothovy.

*

Sur la lemniscate de Booth.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette courbe s'obtient comme la projection de l'intersection de deux surfaces de la manière suivante: dans le plan d'une ellipse E, se projetant suivant un cercle, est choisie une droite R, parallèle à son axe principal; par R et par la perpendiculaire O, abaissée du centre de l'ellipse sur le plan de projection, est déterminé un hyperboloïde de révolution; par l'ellipse E, la droite O et le plan de projection est déterminé un conoïde (du 4e ordre); l'intersection de ces deux surfaces donne la courbe en question.