Arthur Erdélyi

Asymptotische Darstellung der Whittakerschen Funktionen für große reelle Werte des Argumentes und der Parameter

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 4, 240--248

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122008

Asymptotische Darstellung der Whittakerschen Funktionen für große reelle Werte des Argumentes und der Parameter.

A. Erdélyi, Brünn.

(Eingegangen am 28. Mai 1937.)

§ 1. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Während das Verhalten der Whittakerschen Funktionen $W_{k,m}(z)$ und $M_{k,m}(z)$[1]) für große Werte von $|z|$ vollständig geklärt ist,[2]) und auch einige Untersuchungen über das asymptotische Verhalten bei großen Werten der Parameter vorliegen,[3]) ist im Gegensatz hierzu über das Verhalten dieser Funktionen bei großen Werten des Argumentes *und* der Parameter wenig bekannt.[4]) Nur in einzelnen Sonderfällen wurden derartige Untersuchungen in größerem Umfange angestellt, die z. B. in der Theorie der Besselschen Funktionen zu den bekannten Debyeschen Reihen,[5]) im Falle der Funktionen des parabolischen Zylinders zu den von Watson[6]) angegebenen asymptotischen Entwicklungen, und bei den Batemanschen k-Funktionen zu den Entwicklungen von Frenkel[7]) führten.

---

[1]) Bezüglich der Erklärung dieser Funktionen sei verwiesen auf E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge 1927, insbesondere Kapitel XVI. Dieses Werk wird im Folgenden mit M. A. zitiert.

[2]) M. A. § 16, 3.

[3]) O. Perron, Arch. d. Math. u. Phys. (3) **22** (1914), 329, Journal f. die reine und angew. Math. **151** (1921), 63; A. Erdélyi, Math. Ann. **113** (1936), 357 insbes. § 3., Proc. Akad. Amsterdam **39** (1936), 1092 Gleichung (3, 6), Math. Zeitschr. **42** (1937), 641, Gleichung (10, 1).

[4]) E. Fisher, Proc. Nat. Acad. USA. **21** (1935), 529.

[5]) P. Debye, Math. Ann. **67** (1909), 535, Münchener Sitzungsberichte **40** (1910), Nr. 5. Vergl. auch G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, insbesondere Seite 241 ff., ferner F. Emde und R. Rühle, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **43** (1934), 251.

[6]) G. N. Watson, Proc. London Math. Soc. (2) **17** (1918), 116.

[7]) M. Frenkel, Zeitschr. f. Physik **89** (1935), 599.

Mit Rücksicht auf das große Interesse, das den Whittakerschen Funktionen nicht zuletzt wegen ihres häufigen Auftretens in den Anwendungen entgegengebracht wird, ist es von einiger Wichtigkeit, entsprechende Entwicklungen für die *allgemeinen* Whittakerschen Funktionen aufzustellen. Vorliegende Note enthält einen ersten Beitrag hierzu.[8])

Es wird zunächst das asymptotische Verhalten der beiden Integrale

$$I_1(n) = \int_0^\infty e^{-(an+\alpha)t}\, t^{bn+\beta}\, (1+t)^{cn+\gamma}\, dt$$

$$(a > 0,\ b > 0,\ c \text{ reell})$$

und

$$I_2(n) = \int_{-1}^{+1} e^{(an+\alpha)t}\, (1-t)^{bn+\beta}\, (1+t)^{cn+\gamma}\, dt$$

$$(a \text{ reell},\ b > 0,\ c > 0)$$

für $n \to \infty$ untersucht. Die Ergebnisse können in folgenden beiden Sätzen zusammengefaßt werden:

S a t z 1. *Sind a, b positiv reell, und ist c reell; bedeutet ferner t_1 die positive Wurzel der quadratischen Gleichung*

$$a - \frac{b}{t} - \frac{c}{1+t} = 0,$$

so ist

$$I_1(n) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\, \frac{e^{-(an+\alpha)t_1}\, t_1^{bn+\beta+1}\, (1+t_1)^{cn+\gamma+1}}{\sqrt{b\,(1+t_1)^2 + c t_1^2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

S a t z 2. *Ist a reell, sind b und c positiv reell, und bedeutet t_2 die zwischen -1 und $+1$ liegende Wurzel der quadratischen Gleichung*

$$a - \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t} = 0,$$

so ist

$$I_2(n) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\, \frac{e^{(an+\alpha)t_2}\, (1-t_2)^{bn+\beta+1}\, (1+t_2)^{cn+\gamma+1}}{\sqrt{b\,(1+t_2)^2 + c\,(1-t_2)^2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Die Anwendung dieser Ergebnisse auf die Whittakerschen Funktionen, die durch Integrale vom Typus $I_{1,2}(n)$ dargestellt werden können, liefert folgende Ergebnisse:

---

[8]) Die hier mitgeteilten Ergebnisse sind ein Teil einer noch nicht ganz abgeschlossenen umfangreicheren Untersuchung des Verfassers über die asymptotischen Entwicklungen der Whittakerschen Funktionen und der verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen bei großen komplexen Werten des Argumentes und der Parameter.

Satz 3. *Sind k, m und x reell, $m > k$, $x > 0$, und wachsen $|k|$, $|m|$, x derart über alle Grenzen, daß hierbei die Quotienten $\frac{x}{k}$ und $\frac{m}{x}$ festgehalten werden; bedeutet ferner λ den positiv reellen Wert von*

$$\lambda = \frac{1}{2}\log \frac{x - 2k + \sqrt{x^2 - 4kx + 4m^2}}{2(m-k)}.$$

so ist

$$W_{k,m}(x) =$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}x\coth\lambda + m - k + 2k\lambda}\, x^{m+\frac{1}{2}}}{(2\sinh\lambda)^{2m}(m-k)^{m-k}\sqrt{2(m\cosh 2\lambda - k\sinh 2\lambda)}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Satz 4. *Sind k, m und x reell, $m > |k|$ und $x > 0$; wachsen $|k|$, m und x derart über alle Grenzen, daß hierbei die Quotienten $\frac{k}{x}$ und $\frac{m}{x}$ festgehalten werden, und bedeutet ψ den positiv reellen Wert von*

$$\psi = \frac{1}{2}\log \frac{x - 2k + \sqrt{x^2 - 4kx + 4m^2}}{2(m+k)}.$$

so ist

$$M_{k,m}(x) =$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}x\tanh\psi + 2k\psi}\, x^{m+\frac{1}{2}}\, m^{2m+\frac{1}{2}}(\cosh\psi)^{-2m}}{(m+k)^{m+k}(m-k)^{m-k}\sqrt{m\cosh 2\psi + k\sinh 2\psi}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Alle Quadratwurzeln sind positiv auszuziehen. Der Beweis dieser Sätze erfolgt mittels der Sattelpunktsmethode, wobei der Kürze halber jeweils nur die ersten Glieder der asymptotischen Entwicklungen angegeben wurden.

§ 2. Die asymptotische Darstellung von $I_1(n)$ und $I_2(n)$.

Wir setzen

$$f_1(t) = at - b\log t - c\log(1+t)$$
$$\varphi_1(t) = e^{-\alpha t}\, t^{\beta}(1+t)^{\gamma}$$

und schreiben $I_1(n)$ in der Form

$$I_1(n) = \int_0^\infty e^{-nf_1(t)}\,\varphi_1(t)\,dt.$$

Dieses Integral kann leicht mit Hilfe der Sattelpunktsmethode behandelt werden.[9]) Die Sattelpunkte des Integranden sind die durch die Gleichung $f_1'(t) = 0$, also

$$a - \frac{b}{t} - \frac{c}{1+t} = 0$$

bestimmten Punkte. Diese Gleichung hat bei den Annahmen des Satzes 1 über a, b, c eine und nur eine positiv reelle Wurzel, die mit t_1 bezeichnet werden soll. Durch die Substitution

$$f_1(t) - f_1(t_1) = u^2$$

geht $I_1(n)$ über in

$$I_1(n) = e^{-nf_1(t_1)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-nu^2} \varphi_1(t) \frac{dt}{du}\, du. \tag{1}$$

Der von n unabhängige Bestandteil des Integranden kann in der Umgebung des Sattelpunktes $u = 0$ (bzw. $t = t_1$) in folgender Weise entwickelt werden:

$$\varphi_1(t) \frac{dt}{du} = \varphi_1(t_1) \left[\frac{dt}{du}\right]^{t=t_1} \{1 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots\},$$

und die Eintragung dieser Entwicklung in (1) liefert wegen

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-nu^2} u^{2r}\, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2r-1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n^{2r+1}}}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-nu^2} u^{2r+1}\, du = 0$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots)$$

nach dem sogenannten Watsonschen Lemma,[10]) deren Voraussetzungen in dem vorliegenden Falle als erfüllt nachgewiesen werden können, die asymptotische Entwicklung

$$I_1(n) \sim e^{-nf_1(t_1)} \varphi_1(t_1) \,\cdot$$
$$\cdot \left[\frac{dt}{du}\right]^{t=t_1} \left\{\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{2} A_2 \sqrt{\frac{\pi}{n^3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} A_4 \sqrt{\frac{\pi}{n^5}} + \ldots\right\}. \tag{2}$$

Nun folgt aus der Definitionsgleichung von u nach einigen Zwischenrechnungen

$$\left[\frac{dt}{du}\right]^{t=t_1} = \sqrt{\frac{2}{f_1''(t_1)}} = \frac{t_1 (1 + t_1) \sqrt{2}}{\sqrt{b (1 + t_1)^2 + c t_1^2}}.$$

---

[9]) Über die Sattelpunktsmethode vergl. z. B. Debye, l. c., G. N. Watson, l. c. Anm. [5]) Seite 235 ff. und auch C. S. Meijer, Math. Ann. **108** (1933), 321.

[10]) Watson, l. c. Anm. [6]) Seite 133.

Setzen wir diesen Wert, sowie $f_1(t_1)$ und $\varphi_1(t_1)$ in (2) ein, so ergibt sich gerade die Aussage des Satzes 1. Durch Weiterführung der Entwicklung von $\varphi_1(t)\frac{dt}{du}$ lassen sich alle weiteren Koeffizienten A_ν und hiermit die vollständige asymptotische Entwicklung von $I_1(n)$ berechnen.

Genau so erfolgt der Beweis des Satzes 2. Hier wird

$$\begin{aligned} f_2(t) &= -at - b\log(1-t) - c\log(1+t) \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t}(1-t)^\beta(1+t)^\gamma \end{aligned}$$

gesetzt. Die den Sattelpunkt bestimmende Gleichung lautet in diesem Falle

$$-a + \frac{b}{1-t} - \frac{c}{1+t} = 0,$$

und hat gewiß eine und nur eine Wurzel zwischen -1 und $+1$, sofern nur a, b, c die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllen. Diese Wurzel wird mit t_2 bezeichnet. Die Substitution lautet in diesem Falle:

$$f_2(t) - f_2(t_2) = u^2,$$

die Entwicklung des von n unabhängigen Teiles des Integranden:

$$\varphi_2(t)\frac{dt}{du} = \varphi_2(t_2)\left[\frac{dt}{du}\right]^{t=t_2}\{1 + B_1 u + B_2 u^2 + \ldots\}.$$

Daher ergibt sich genau wie im Falle von $I_1(n)$

$$I_2(n) \sim e^{-nf_2(t_2)}\varphi_2(t_2)\,.$$
$$\cdot\left[\frac{dt}{du}\right]^{t=t_2}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{2}B_2\sqrt{\frac{\pi}{n^3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}B_4\sqrt{\frac{\pi}{n^5}} + \ldots\right\},$$

woraus sich wegen

$$\left[\frac{dt}{du}\right]^{t=t_2} = \sqrt{\frac{2}{f_2''(t_2)}} = \frac{(1-t_2)(1+t_2)\sqrt{2}}{\sqrt{b(1+t_2)^2 + c(1-t_2)^2}}$$

Satz 2 ergibt.

§ 3. Asymptotische Darstellung der Whittakerschen Funktionen.

Die Funktion $W_{k,m}(x)$ besitzt die unter den Voraussetzungen des Satzes 3 sicher gültige Integraldarstellung[11])

$$W_{k,m}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}x^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}\int_0^\infty e^{-xt}t^{m-k-\frac{1}{2}}(1+t)^{m+k-\frac{1}{2}}\,dt. \quad (3)$$

[11]) M. A. § 16, 12.

Das in (3) auftretende Integral ist vom Typus von $I_1(n)$, und zwar ist in diesem Falle

$$an = x, \quad bn = m - k, \quad cn = m + k$$
$$\alpha = 0, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}, \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}$$

zu setzen. Die den Sattelpunkt bestimmende Gleichung lautet daher

$$x - \frac{m-k}{t} - \frac{m+k}{1+t} = 0.$$

Ihre positive Wurzel kann mittels der durch die Gleichung

$$e^{2\lambda} = \frac{x - 2k + \sqrt{x^2 - 4kx + 4m^2}}{2\,(m-k)}$$

eingeführten reellen Größe λ, die während des Grenzüberganges $x \to \infty$ ebenso wie $\frac{k}{x}$ und $\frac{m}{x}$ konstant bleibt, in der Form

$$t_1 = \frac{e^{-\lambda}}{2\sinh\lambda}, \quad 1 + t_1 = \frac{e^{\lambda}}{2\sinh\lambda}$$

dargestellt werden. Daher ergibt sich nach Satz 1 die asymptotische Darstellung des Integrals auf der rechten Seite von (3) zu

$$\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-xe^{-\lambda}/(2\sinh\lambda)+2k\lambda}}{(2\sinh\lambda)^{2m}\sqrt{m\cosh 2\lambda - k\sinh 2\lambda}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Anderseits ist nach der Stirlingschen Formel

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - k\right) = \sqrt{2\pi}\,(m-k)^{m-k}\,e^{-(m-k)}\left[1 + O\left(\frac{1}{m-k}\right)\right].$$

Die Eintragung dieser beiden asymptotischen Darstellungen in (3) liefert Satz 3.

Ähnlich verfahren wir mit der Whittakerschen Funktion $M_{k,m}(x)$, für welche wir die unter den Voraussetzungen des Satzes 4 sicher gültige Integraldarstellung[12])

$$M_{k,m}(x) = \frac{\Gamma(2m+1)\,2^{-2m}\,x^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)}\cdot$$
$$\cdot\int_{-1}^{+1} e^{\frac{1}{2}xt}\,(1-t)^{m+k-\frac{1}{2}}\,(1+t)^{m-k-\frac{1}{2}}\,dt \qquad (4)$$

heranziehen. Das in (4) auftretende Integral ist vom Typus von

[12]) M. A. Seite 352 Ex. 1.

$I_2(n)$, und folglich kann Satz 2 mit

$$an = \frac{x}{2}, \qquad bn = m + k, \qquad cn = m - k,$$

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -\tfrac{1}{2}, \qquad \gamma = -\tfrac{1}{2}$$

angewendet werden. Diesmal wird die reelle Größe ψ durch die Gleichung

$$\epsilon^{2\psi} = \frac{x - 2k + \sqrt{x^2 - 4kx + 4m^2}}{2\,(m + k)}$$

eingeführt, und der Sattelpunkt, d. h. die zwischen -1 und $+1$ liegende Wurzel der Gleichugg

$$-\frac{x}{2} + \frac{m+k}{1-t} - \frac{m-k}{1+t} = 0$$

kann mittels ψ in der Gestalt

$$t_2 = -\tanh\psi, \quad 1 - t_2 = \frac{\epsilon^{\psi}}{\cosh\psi}, \quad 1 + t_2 = \frac{e^{-\psi}}{\cosh\psi}$$

dargestellt werden. Hierauf ergibt Satz 2 als die asymptotische Darstellung des in (4) auftretenden Integrals

$$\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}x\tanh\psi + 2k\psi}\,(\cosh\psi)^{-2m}}{\sqrt{m\cosh 2\psi + k\sin 2\psi}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Für die Gammafunktionen in (4) ergibt die Stirlingsche Formel

$$\Gamma\,(2m + 1) = \sqrt{2\pi}\,(2m)^{2m+\frac{1}{2}}\,e^{-2m}\left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + m \pm k\right) = \sqrt{2\pi}\,(m \pm k)^{m\pm k}\,e^{-(m\pm k)}\left[1 + O\left(\frac{1}{m \pm k}\right)\right],$$

und die Eintragung aller dieser asymptotischen Darstellungen in (4) ergibt die Aussage von Satz 4.

In beiden hier behandelten Fällen kann

$$k = k_1 n, \quad m = m_1 n, \quad x = x_1 n$$

gesetzt werden, und die asymptotischen Darstellungen gelten für feste k_1, m_1, x_1 und $n \to \infty$. Es möge bemerkt werden, daß die Sätze 1 und 2 die asymptotischen Darstellungen der Whittakerschen Funktionen auch noch in dem etwas komplizierteren Falle angeben, daß die Parameter und das Argument dieser Funktionen in der Form

$$k = k_1 n + k_2, \quad m = m_1 n + m_2, \quad x = x_1 n + x_2$$

mit festen $k_{1,2}$, $m_{1,2}$, $x_{1,2}$ und $n \to \infty$ erscheinen, und für k_1, m_1, x_1

ähnliche Voraussetzungen wie in den Sätzen 3 und 4 gelten. Die auf diese Weise zu gewinnenden Formeln, auf deren Notierung hier verzichtet werden kann, müssen in manchen Fällen anstatt der in Sätzen 3 und 4 gegebenen herangezogen werden, so z. B. bei der Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Funktionen des parabolischen Zylinders ($m_1 = 0$, $m_2 = \pm \frac{1}{4}$).

§ 4. Die asymptotischen Darstellungen der Besselschen Funktionen von rein imaginärem Argument.

Es soll noch gezeigt werden, wie Sätze 3 und 4 zur Ermittlung des asymptotischen Verhaltens der Zylinderfunktionen von rein imaginärem Argument herangezogen werden können. Diese erscheinen als Sonderfälle der Whittakerschen Funktionen, denn es ist

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, W_{0,\nu}(2z), \tag{5}$$

und

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) = \frac{2^{-2\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+1)\sqrt{z}}\, M_{0,\nu}(2z). \tag{6}$$

Wir müssen also in den Sätzen 3 und 4

$$k = 0,\quad m = \nu,\quad x = 2z$$

setzen. Die Voraussetzungen der genannten Sätze sind sicher erfüllt, wenn sowohl ν als auch z positiv reell sind. Es erweist sich noch als vorteilhaft

$$z = \nu \operatorname{cosech} \alpha \quad (\alpha > 0)$$

zu setzen.

Bei den Zylinderfunktionen dritter Art $K_\nu(z)$ ergibt sich

$$e^{2\lambda} = \coth \frac{\alpha}{2}$$

und daher

$$\sinh \lambda = \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2 \sinh \alpha}}, \qquad \cosh \lambda = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2 \sinh \alpha}}.$$

Daraufhin folgt aus (5) und Satz 3 folgende asymptotische Darstellung:

$$K_\nu(\nu \operatorname{cosech} \alpha) = \sqrt{\frac{\pi \tanh \alpha}{2\nu}}\, e^{-\nu(\tanh \alpha - \alpha)}\left[1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] \tag{7}$$

$$(\alpha > 0,\ \nu > 0).$$

Entsprechend ergibt sich für die Zylinderfunktionen erster

Art $I_\nu(z)$

$$e^{2\psi} = \coth\frac{\alpha}{2}$$

und daher

$$\sinh\psi = \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2\sinh\alpha}}, \quad \cosh\psi = \frac{e^{+\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2\sinh\alpha}}.$$

Wegen

$$\Gamma(\nu+1) = \sqrt{2\pi}\,\nu^{\nu+\frac{1}{2}}\,e^{-\nu}\left[1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]$$

lautet die aus Satz 4 und Gleichung(6) zu gewinnende asymptotische Darstellung in diesem Falle

$$I_\nu(\nu\,\mathrm{cosech}\,\alpha) = \sqrt{\frac{\tanh\alpha}{2\pi\nu}}\,e^{\nu(\tanh\alpha-\alpha)}\left[1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]. \qquad (8)$$

Diese asymptotischen Darstellungen stimmen mit den ersten Gliedern der bekannten Debyeschen Reihen genau überein.

In ganz ähnlicher Weise können für alle Funktionen, welche durch die Whittakerschen ausdrückbar sind — und deren gibt es eine große Anzahl — asymptotische Darstellungen hergeleitet werden.

*

Asymptotické vyjádření Whittakerových funkcí pro velké reálné hodnoty proměnné a parametrů.

(Obsah předešlého článku.)

Předmětem této práce je odvození asymptotických vzorců pro Whittakerovy funkce $W_{k,m}(x)$ a $M_{k,m}(x)$ pro velké reálné hodnoty proměnné a parametrů. Užitím t. zv. „Sattelpunktsmethode" nebo „method of steepest descent" obdržíme asymptotická vyjádření, z nichž jsou zvláště odvozena vyjádření funkce $W_{k,m}(x)$ pro $m > k$ a $x > 0$ (věta 3) a funkce $M_{k,m}(x)$ pro $m > |k|$ a $x > 0$ (věta 4). Jako speciální případy obdržíme asymptotická vyjádření Besselových funkcí prvního a třetího druhu s ryze imaginární proměnnou (§ 4).