Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

Planimetrické odvození Heronova vzorce pro ploský obsah trojúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 6, 310--311

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121991

a z trojúhelníka on_1n_2

$$cos\,(N, X) = \frac{\overline{on_1}}{\overline{on_2}},$$

tak že

$$cos\,(N, X) = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\beta},\ \text{t. j.}\ cos\,(N, X) = cos\,b.$$

Podobně vyjde, že $cos\,(P, X) = cos\,c$.

Planimetrické odvození Heronova vzorce pro ploský obsah trojúhelníku.

Pro žáky středních škol napsal

Augustin Pánek.

Známý vzorec pro ploský obsah trojúhelníku, dány-li jsou strany jeho, stanoví se obvykle *vůbec* ve školních učebnicích, o planimetrii jednajících, že se nejprve vypočítává výška jeho.*) Možno však též jednoduchým způsobem zjednati si vzorec žádaný, přijmeme-li za neznámou ploský obsah trojúhelníku Δ, a sestavíme-li rovnici, přímo plochu tu stanovící.

Dán-li trojúhelník ABC o stranách a, b, c, a spustíme-li s vrcholu C výšku $\overline{CD}$, bude

$$\Delta = \frac{1}{2}c\,.\,\overline{CD},\ \text{tedy}\ \overline{CD} = \frac{2\Delta}{c}.$$

Ježto

$$\overline{AD} + \overline{DB} = c$$

a dle věty Pythagorovy jest

*) Viz na př. *Šanda,* Měřictví pro vyšší třídy středních škol, 2. vyd., str. 100; *Močník—Hora,* Měřictví, str. 57. a j.

V historickém článku s názvem: *„O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí stran jeho“*, který podle Baltzera podává dr. F. J. Studnička a který vytištěn v Časopise roč. I. str. 253., ukazuje se k dotčeným auktorům, kteří psali o různých způsobech vypočítávati ploský obsah trojúhelníku z daných stran jeho. Mimo to pojednáno ještě v *Časopise* na různých místech o řešení této úlohy.

$$\overline{AD} = \sqrt{b^2 - \frac{4\Delta^2}{c^2}}, \quad \overline{DB} = \sqrt{a^2 - \frac{4\Delta^2}{c^2}},$$

bude též

$$\sqrt{b^2 - \frac{4\Delta^2}{c^2}} + \sqrt{a^2 - \frac{4\Delta^2}{c^2}} = c.$$

Mocníme-li rovnici:

$$\sqrt{b^2 - \frac{4\,\Delta^2}{c^2}} = c - \sqrt{a^2 - \frac{4\,\Delta^2}{c^2}},$$

obdržíme

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2\,c\sqrt{a^2 - \frac{4\Delta^2}{c^2}}$$

a po opětném mocnění

$$(a^2 + c^2 - b^2)^2 = 4a^2c^2 - 16\,\Delta^2.$$

Z poslední rovnice plyne

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}\{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2\},$$

což vede k známému tvaru

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

aneb

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

vzorci Heronovu, při čemž značí s poloviční obvod trojúhelníku.*)

*) Při svých výkladech na městském vyšším realn. gymn. jsem nabyl přesvědčení, že svrchu uvedený chod výpočtu snáze žáci zachovají v paměti než jiný.