Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch
K didaktice veličin komplexních. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 6, 302–308

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121989

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1891

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Vzhledem k odstavci (3) platí

$$\varphi(t) = m\,, \quad \varphi'' = 0\,.$$

Z posledních rovnic odstavce 3. obdržíme pro asymptotické křivky na *konoidech vůbec* následující rovnice*):

$$x = \mathrm{B}\sqrt{f'(t)}\,, \quad y = tx\,, \quad z = mx + f(t)\,.$$

U *konoidů přímých* jest řídící přímka kolmá k rovině řídící, tak že $m = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$.

Rovnice ploch tohoto typu mají tedy formu

$$tx - y = 0\,, \quad z - f(t) = 0\,,$$

zvolíme-li řídící přímku za osu Z.

Pro asymptotické křivky na těchto plochách platí pak rovnice:

$$x = \mathrm{B}\sqrt{f'(t)}\,, \quad y = tx\,, \quad z = f(t)\,.$$

K didaktice veličin komplexních.

Napsal

M. Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

(Dokončení.)

5. O nějakém komplexním výrazu pravíme, že zmizí, jestliže se rovná komplexu nullovému (0, 0). Pak platí důležitá věta, že komposiční součin jen tehdy zmizí, zmizí-li jeden z jeho činitelů.

Abychom to dokázali, pišme $a = (\alpha, \alpha')$, $b = (\beta, \beta')$ a položme $ab = 0$, t. j.

$$\alpha\beta - \alpha'\beta' = 0, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0.$$

*) K témuž výsledku dospějeme, dosadíme-li do posledních rovnic odstavce 4. hodnotu $n = \infty$, t. j. volíme druhou řídící přímku v nekonečné vzdálenosti, stanovíce ji zaměřením řídící roviny.

Těmto rovnicím lze vyhověti buď supposicí $a = 0$, neb $b = 0$; není-li a nullou, pak máme zde dvě homogení rovnice o neznámých β, β', jichž determinant $\alpha^2 + \alpha'^2$ nemizí, poněvadž aspoň jedna z veličin α, α' musí býti od nully různa.

Rovnicím takovým lze vyhověti pouze hodnotami $\beta = \beta' = 0$, t. j. není-li $a = 0$, musí $b = 0$.

Z této věty plyne, že k daným dvěma komplexům a, b, z nichž b není nullou, odpovídá jediný komplex hovící podmínce

$$a = bc;$$

neb kdyby takové komplexy byly dva, c a c', pak bychom měli též

$$a = bc',$$

a tedy odečtením $0 = b(c - c')$, což není možno, ano b není nullou. Že však skutečně jeden takový komplex c, který pak znamenáme $\frac{a}{b}$ (podíl a dle b), existuje, lze dokázati přímo řešením rovnice

$$bc = a \text{ při } a = (\alpha, \alpha'), \ (b = \beta, \beta'), \ c = (\gamma, \gamma'),$$

t. j. řešením rovnic

$$\beta\gamma - \beta'\gamma' = \alpha$$
$$\beta'\gamma + \beta\gamma' = \alpha'$$

vůči neznámým γ, γ'; odtud plyne

$$\gamma = \frac{\alpha\beta + \alpha'\beta'}{\beta^2 + \beta'^2}, \quad \gamma' = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta^2 + \beta'^2}.$$

6. Nebude nyní jasnosti na újmu, když místo „komposice komplexů“ budu říkati „násobení komplexů“, což jest užitečné vzhledem k analogii komposice s násobením čísel.

Pak budeme moci obor komplexů považovati za jaksi rozšířený obor čísel: lépe řečeno, každý algebraický problém od nynějška budeme řešiti v oboru komplexů, a nikoli v oboru čísel. Každé číslo (realné) a nahradíme při tom komplexem $(a, 0) = aj$. Aneb lépe, kdykoli budeme psáti číslo a, budeme tím rozuměti nikoli číslo to samo, nýbrž komplex $(a, 0)$.

Tak máme-li kvadratickou rovnici

$$(\alpha) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

řešiti v oboru čísel, budeme se zabývati jediné následujícím požadavkem: určiti komplex $(\xi, \eta) = x$, tak aby platila rovnice

$$(a, 0)(\xi, \eta)^2 + (b, 0)(\xi\,\eta) + (c, 0) = 0.$$

Výhoda plynoucí z této modifikace problému je ta, že je tento *vždy řešitelný*. Rozviňme symboly na levé straně, i obdrží náš požadavek tvar:

$$(\beta) \qquad a(\xi^2 - \eta^2, 2\xi\eta) + b(\xi, \eta) + (c, 0) = 0,$$

aneb ve tvaru soustavy rovnic:

$$a(\xi^2 - \eta^2) + b\xi + c = 0$$
$$2a\xi\eta + b\eta = 0.$$

Je-li při tomto řešení $\eta = 0$, pak víme, že platí rovnice

$$a(\xi, 0)^2 + b(\xi, 0) + (c, 0) = 0,$$

čili

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0,$$

t. j. že požadavek původní (α) lze splniti skutečnou veličinou $x = \xi$. Jestliže naopak ve všech řešeních požadavku (β) jest η od nully různo, pak je jisto, že nelze stanoviti *veličinu* (realnou) x, tak aby platila rovnice (α).

Dá nám tedy uvažování komplexů v případě rovnice kvadratické vždy určitou odpověď, zda rovnice ta jest možnou, a v tom případě podá také řešení.

Dříve než přikročíme k řešení obecné rovnice kvadratické, pojednáme o řešení rovnice zvláštní:

$$(\xi, \eta)^2 = (a, b).$$

Psána ve tvaru rozvinutém obdrží tato rovnice tvar

$$\xi^2 - \eta^2 = a, \quad 2\xi\eta = b.$$

Z rovnic těchto plynou pak následující:

$$\xi^2 + (-\eta^2) = a, \quad \xi^2(-\eta^2) = -\frac{b^2}{4},$$

z nichž soudíme, že ξ^2, $-\eta^2$ jsou kořeny kvadratické rovnice *realné:*

$$z^2 - az - \frac{b^2}{4} = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Z těchto jeden jest kladný a druhý záporný; skutečně **má** býti kořen $z = \xi^2$ kladným, $z = -\eta^2$ záporným; máme tedy

$$\xi^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \qquad \eta^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

a odtud

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \qquad \eta = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Znamení $\pm$ pro ξ jest libovolné, znamení pro η se pak ustanoví z podmínky $2\xi\eta = b$.

Z toho nacházíme, že požadavku

$$x^2 = (a, b), \text{ t. j. } (\xi, \eta)^2 = (a, b)$$

lze vyhověti vždy, a to dvojím způsobem:

$$x = \pm \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\, j + \varepsilon i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right],$$

kde $\varepsilon = 1$ pro $b > 0$, a $\varepsilon = -1$ pro $b < 0$.

Obě hodnoty pravé strany znamenáme $\sqrt{(a, b)}$, takže poslední výraz je symbolem dvojznačným. Nyní — když duch naší doktriny s dostatek jest jasným — můžeme *způsob psaní* zjednodušiti, vrátíce se ke způsobu všeobecně užívanému, kde se píše $a + ib$ místo $aj + bi$ neb (a, b).

Náš výsledek poslední obdrží takto obvyklý tvar:

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \varepsilon i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right],$$

$$\text{kde } \varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ pro } b > 0, \\ -1 \text{ pro } b < 0. \end{cases}$$

Jakožto podstatný výsledek dlužno si zapamatovati, že rovnici $x^2 = a$ lze v komplexním oboru vždy řešiti. Totéž ukážeme nyní o rovnici obecnější:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kterou patrně lze psáti takto:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4} = 0,$$

aneb

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$

Poněvadž x jest neznámý komplex, je též komplex $ax + \frac{b}{2}$ neznámý; tento lze ale vždy, a to jen na dvojí způsob ustanoviti tak, aby poslední požadavek byl splněn; a sice bude tu

$$ax + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}},$$

jestliže $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$ značí *jednu* z obou hodnot dvojznačného výrazu; tím jsme obdrželi známý vzorec

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Není naším úmyslem dopodrobna vyložiti všechny úvahy, jež jsou předepsány na školách středních, i domníváme se, že čtenáři je nyní jasno, jak by nám tu bylo pokračovati.

Nám se bude nyní jednati spíše o význam a důležitost komplexů pro řešení rovnic. Tak již z elementů této nauky známy jsou methody řešení rovnic stupně třetího a čtvrtého, a každý ví, že vzorce nalezené pro kořeny těchto rovnic vždy udávají všecka řešení: realná, když rovnice má kořeny realné, a komplexní, jestliže řešení realná neexistují. Ale význam komplexů čili — jak je dále chceme nazývati — *veličin komplexních* pro algebru má svůj původ hlavně v slavné větě D'Alembert-Gaussově, že každá algebraická rovnice

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

má řešení v oboru komplexním.

Jaký význam realný bezprostředně pochopitelný má tento velkolepý theorém?

Jdeme-li o krok dále a vyslovíme-li jej ve tvaru, že lze levou stranu rovnice psáti jako součin

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

kde $x_1, x_2 \ldots x_n$ jsou určité komplexy, pak lze větě uděliti jednodušší znění tím způsobem, že realné kořeny*) $x_1, x_2 \ldots x_k$ vyjmeme a kořeny komplexní, jež jsou po dvou sdruženy, píšeme ve tvaru $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_1 - i\beta_1$; $\alpha_2 + i\beta_2$, $\alpha_2 - i\beta_2$; ... $\alpha_m + i\beta_m$, $\alpha_m - i\beta_m$; uvážíme-li, že tu jest

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

pak zní řečená věta takto: Každý (algebraický) polynom $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, jehož součinitelé jsou čísla (realná), lze uvésti na tvar součinu činitelů stupně prvého aneb druhého:

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k) [(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2] \ldots \\ . [(x - \alpha_m)^2 + \beta_m]^2.$$

Jak jednoduchý jest tento tvar theorému, tak obtížný byl by jeho důkaz v oboru čísel. Teprvé přechodem k veličinám komplexním podařilo se podati jeho přesný důkaz.

Vedlo by nás příliš daleko, kdybychom se měli šířiti o dalších vlastnostech veličin komplexních, ačkoli by tu dobrá definice logarithmu a funkce exponencialné nebyla na škodu. Nám zmíniti se dlužno toliko o veliké chybě didaktické, jíž se dopouštějí mnohé spisy i pro posluchače vysokého učení vydané (jako na př. Skřivanovy Přednášky o algebraické analysi) tím, že snaží se dokazovati nutnosť Gaussova znázornění veličin komplexních body v rovině. Nejvíce překvapuje svojí naivností „důkaz“ následující: V rovině mějme soustavu pravoúhlých souřadnic OX, OY, na ose OX znázorňujme kladná i záporná čísla, zejmena buď $OA = +1$, $OA' = -1$, takže A′ leží v levo, A

---

*) Komplex (a, b) nazýváme *realným*, je-li $b = 0$. Kdyby $a = 0$, slul by komplex *ryzím* (ryze pomyslným).

v pravo od počátku O u vzdálenosti 1 od tohoto. Sestrojme pak kružnici poloměru 1 o středu v počátku, která nechť protne kladnou polovici osy OY v bodě B*). Nyní praví autoři: Čtverec délky OB musí se dle známé věty planimetrické rovnati součinu OA . OA', t. j. $(+1) . (-1) = -1$, a tedy máme $OB = \sqrt{-1} = i$.

Ačkoli je samozřejmo, že dedukce podobného rázu pocházeti mohou pouze z absolutní neznalosti ducha mathematického, aneb lépe z naprostého nedostatku logiky, přec nebude od místa poznamenati, že tu chyba vězí v tom, že oné známé věty planimetrické bylo zde zneužito špatnou interpretací: tato byvši odvozena z podobnosti trojúhelníků, je správnou jediné pro absolutní délky, a tedy nelze klásti $OA' = -1$.

Trochu méně naivní a také méně špatnou jest úvaha obsažená v citované knize Skřivanově; ona by konečně co do *ducha* **) byla přípustnou, kdyby byl autor dle toho zařídil definici veličin komplexních, jak to učinil Cauchy svým pojmem *quantité géométrique.*

Při *naší* definici ***) veličin komplexních jest ale nejen nemožno, nýbrž také nanejvýš zbytečno (a jasnosti škodlivo) dokazovati Gaussovo znázornění veličiny $x + iy$ bodem o pravoúhlých souřadnicích x, y. Znázornění to vězí *jediné* v té okolnosti, že jak poloha bodu, tak komplex $(x, y) = x + iy$ jest určen dvěma veličinama x a y.

Zobraziti (přímo) stopy roviny určené odchylkami α, β od průměten π, ν.

Napsal

Josef Novotný,

professor v Karlíně.

K přímému řešení úlohy dané vede úvaha tato: Dovolná rovina ϱ určuje s průmětnami π, ν trojkout, jehož hrany A, B,

---

*) Obraz sestrojí si čtenář.

**) Nemám po ruce této knihy, abych úvahu i co do detailů sledoval, což také jest zbytečno.

***) Která se v podstatě kryje s onou, z níž vychází většina autorů.