Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume.

Miroslav Katětov, Praha.

(Eingegangen am 2. Juni 1939.)

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile. Im § 1 werden (neben anderen Sätzen) zwei notwendige und hinreichende Bedingungen für die Bikompaktheit eines Raumes gegeben (Sätze **1.5** und **1.7**). Der Satz **1.7** ist nicht neu; er wurde von Herrn M. H. Stone[1]) mit Hilfe der Theorie der Booleschen Ringe bewiesen; hier gebe ich einen anderen Beweis. Im § 2 wird für jeden Hausdorffschen Raum die Existenz einer H-abgeschlossenen Hülle (siehe dort die Definition) bewiesen und einige ihre Eigenschaften untersucht. Im § 3 wird für die bikompakte Hülle [dieser Begriff und der betreffende Satz sind aus den Arbeiten von Herren M. H. Stone[1]) und E. Čech[2]) bekannt] ein auf den Ergebnissen von § 1 und 2 beruhender Existenzbeweis gegeben.

Vorbemerkungen.

Zunächst erklären wir einige im folgenden benützte Bezeichnungen; sonst stimmt die Terminologie mit der von Alexandroff und Hopf[3]) überein.

Ist R eine Menge und ist jeder Menge $M \subset R$ eine Menge $uM \subset R$ zugeordnet (also ist — wenn $\mathfrak{R}$ das System aller Teilmengen von R bezeichnet — eine Abbildung u von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ definiert), so heißt u eine *topologische Zuordnung* oder eine *allgemeine Topologie* auf R; (R, u) heißt ein *allgemein-topologischer Raum*. Man schreibt gewöhnlich, wenn daraus kein Mißverständnis entstehen kann, R anstatt (R, u) und $\overline{M}$ anstatt uM.

---

[1]) *M. H. Stone*, Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, Transactions of the Amer. Math. Soc., **41** (1937), S. 375ff.

[2]) *E. Čech*, On bicompact spaces, Annals of Math., (2), **38** (1937), S. 823—844.

[3]) *P. Alexandroff* und *H. Hopf*, Topologie, I. Band; Springer, Berlin 1935.

Sind u und v allgemeine Topologien auf R und ist stets $uM \subset vM$, so sagt man, u sei *schwächer* als v und v *stärker* als u.[4]) Ist $P \subset R$, so setzt man für $M \subset P$ $u_P M = P \, . \, uM$; u_P ist dann eine allgemeine Topologie auf P. (P, u_P) heißt ein *Relativraum* (in bezug auf R); man sagt auch, (P, u_P) sei in (R, u) *eingebettet* und (R, u) *umfasse* (P, u_P).

Ist $M \subset R$, M in dem Raum (R, u) offen, bzw. Umgebung eines Punktes usw., so sagen wir M sei u-offen, bzw. eine u-Umgebung usw. Wenn f eine Abbildung einer Menge A in eine Menge B und $M \subset A$ ist, bezeichnen wir mit f_M die Abbildung von M in B, welche entsteht, indem für $x \in M$ $f_M(x) = f(x)$ gesetzt wird.

Ein allgemein-topologischer Raum (R, u) heißt ein *Hausdorffscher* Raum und u heißt eine *Hausdorffsche* Topologie (wir schreiben: H-Raum, H-Topologie), wenn folgende Axiome erfüllt sind (dabei bezeichnen A, B Teilmengen von R):

I. $u\emptyset = \emptyset$. II. $A \subset uA$. III. $u(uA) = uA$. IV. $u(A+B) = uA + uB$.

V. (Hausdorffsches Trennungsaxiom.) Je zwei verschiedene Punkte aus R besitzen disjunkte Umgebungen.

Nun führen wir einige bekannte Sätze an, die im folgenden benützt werden. Sie rühren meistens von Alexandroff und Urysohn[5]) her; siehe auch das erwähnte Buch von Alexandroff und Hopf.

0.1 sind G, M Teilmengen eines H-Raumes, G offen, so ist $\overline{GM} = \overline{G\overline{M}}$.

Definition. Ein H-Raum heißt *H-abgeschlossen*, wenn er in jedem ihn umfassenden H-Raum abgeschlossen ist.

0.2. Ein H-Raum R ist dann und nur dann H-abgeschlossen, wenn jede seine offene Überdeckung endlichviele Elemente G_i mit $\sum_{i=1}^{m} \overline{G_i} = R$ enthält.

Definition. Ein H-Raum heißt *bikompakt*, wenn jede seine offene Überdeckung eine endliche Überdeckung enthält.

0.3. Ein H-Raum R ist dann und nur dann bikompakt, wenn folgendes gilt: ist $\mathfrak{F}$ ein (nichtleeres) System abgeschlossener Teilmengen von R und ist der Durchschnitt endlichvieler Elemente von $\mathfrak{F}$ stets nichtleer, so hat $\mathfrak{F}$ einen nichtleeren Durchschnitt.

0.4. Jede abgeschlossene Teilmenge eines bikompakten H-Raumes ist bikompakt (als Relativraum).

---

[4]) Also auch wenn $u = v$.

[5]) *P. Alexandroff* et *P. Urysohn*, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandlingen der Kon. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1, 1929.

0.5. Jede schlichte stetige Abbildung eines bikompakten H-Raumes auf einen H-Raum ist eine Homöomorphie.

Definition. Ein H-Raum heißt *regulär*, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von R, von denen eine einpunktig ist, disjunkte Umgebungen besitzen.

0.6. Ein H-Raum ist dann und nur dann bikompakt, wenn er H-abgeschlossen und regulär ist.

Definition. Ein H-Raum heißt *normal*, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von R disjunkte Umgebungen besitzen.

0.7. Jeder bikompakte H-Raum ist normal.

0.8. Ist R ein normaler H-Raum, $A \subset R$ abgeschlossen und ist in A eine beschränkte stetige Funktion f definiert, so gibt es eine in R definierte stetige beschränkte Funktion F mit $F_A = f$.

Definition. Ein H-Raum heißt *vollständig regulär*,[6]) wenn es zu jeder abgeschlossenen nichtleeren $M \subset R$ und jedem Punkt $x \in R - M$ eine in R definierte stetige Funktion f mit $f(x) = 0$, $f(M) = (1)$ gibt.

Offenbar ist jeder normale H-Raum vollständig regulär, und jeder vollständig reguläre H-Raum regulär.

§ 1.

1.1. *Ist der Raum R H-abgeschlossen, f seine stetige Abbildung auf einen H-Raum S, so ist auch S H-abgeschlossen.*

Beweis: $\mathfrak{G}$ sei eine offene Überdeckung von S. Dann bilden die Mengen $f^{-1}(G)$, $G \in \mathfrak{G}$, eine offene Überdeckung von R; daher gibt es nach **0.2** $G_i \in \mathfrak{G}$ $(i = 1, \ldots m)$ so daß $\sum_{i=1}^{m} \overline{f^{-1}(G_i)} = R$, also $\sum_{i=1}^{m} f^{-1}(\overline{G_i}) = R$, $\sum_{i=1}^{m} \overline{G_i} = S$ gilt. Die H-Abgeschlossenheit von S folgt jetzt aus **0.2**.

1.2. *Ist der Raum R H-abgeschlossen, $M \subset R$ offen, so ist auch der Raum $\overline{M}$ H-abgeschlossen.*

Beweis: Ist $\mathfrak{G}$ eine offene Überdeckung von $Q = \overline{M}$, so sei für jede $G \in \mathfrak{G}$ G^* in R offen und $G^*Q = G$. Dann ist $\Sigma G^* + (R - Q) = R$, also mit geeigneten $G_i \in \mathfrak{G}$ $\sum_{i=1}^{m} \overline{G_i^*} + \overline{R - Q} =$

---

[6]) *A. Tychonoff*, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. **102** (1930), S. 544.

$= R$ und daher $\overline{\sum_{i=1}^{m} \overline{G_i}^*} \supset M$, folglich wegen $M \,.\, \overline{\sum_{i=1}^{m} G_i^*} = M \,.\, \overline{\overline{\sum_{i=1}^{m} G_i^*}}$ (nach **0.1**) $\overline{\sum_{i=1}^{m} G_i} \supset \overline{M} = Q$, woraus die H-Abgeschlossenheit von $\overline{M}$ folgt.

Definition. Eine H-Topologie u auf R heißt *maximal*, wenn keine von u verschiedene H-Topologie auf R stärker als u ist.

1.3. *Ist der Raum (R, u) H-abgeschlossen, so gibt es eine und nur eine maximale H-Topologie v auf R, die stärker als u ist. Diese Topologie besitzt folgende Eigenschaften:*

(1) *ist $Q \subset R$, $uQ = R$, (Q, u_Q) regulär, so ist $u_Q = v_Q$;*

(2) *besitzen in (R, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen, so ist (R, v) regulär;*

(3) *ist f eine stetige Abbildung des Raumes (R, u) in einen regulären Raum, so ist f auch als Abbildung von (R, v) stetig.*

Beweis. I. Mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir das System aller $R - uG$, G u-offen, und definieren eine Topologie v auf R, indem wir $\mathfrak{A}$ für eine Basis des Raumes (R, v) erklären. Sind x, y verschiedene Punkte aus R, so sei U eine u-offene Umgebung von x, $y \operatorname{non} \epsilon\, uU$; setzt man $G = R - u(R - uU)$, $\Gamma = R - uU$, so ist G bzw. Γ eine v-Umgebung von x bzw. y und $G\Gamma = \emptyset$, also das Trennungsaxiom erfüllt. Offenbar genügt v auch den übrigen Axiomen und ist also eine H-Topologie und dabei stärker als u. Nach **1.1** ist der Raum (R, v) H-abgeschlossen.

w sei jetzt eine H-Topologie auf R und stärker als u. Ist $A \epsilon \mathfrak{A}$, so ist $A = R - B$, wo $B = uG$, G u-offen ist. Nach **1.2** und **1.1** ist dann der Raum (B, w_B) H-abgeschlossen, also B in (R, w) abgeschlossen, A w-offen. Daraus folgt, daß w schwächer als v ist; also ist v die (einzige) maximale Topologie auf R, die stärker als u ist.

II. Ist $Q \subset R$, $uQ = R$, (Q, u_Q) regulär, so sei $x \epsilon Q$, U eine Umgebung von x in (R, u). Da (Q, u_Q) regulär ist, kann man eine u-offene Umgebung V von x finden, für die $Q \,.\, u(VQ) \subset UQ$ gilt. Setzt man $G = R - u(R - uV)$, so ist $x \epsilon V \subset G \subset uV$, G v-offen, also eine v-Umgebung von x; nach **0.1** ist $u(VQ) = uV$ und daher $QG \subset Q \,.\, u(VQ) \subset QU$. Hiermit ist die Behauptung (1) bewiesen.

III. Nun setzen wir voraus, daß in (R, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen. Es sei $x \epsilon R$, U eine v-Umgebung von x. Nach der Definition von v gibt es eine u-offene Menge A mit $x \epsilon R - uA \subset U$. Zu jedem $y \epsilon B = uA$ kann man u-offene Umgebungen G_y und $G(y)$ von x bzw. y so finden, daß $uG_y \,.\, uG(y) = \emptyset$ ist.

Nach **1.2** ist B H-abgeschlossen; da $BG(y)$ eine offene Überdeckung von B bilden, gilt nach **0.2** mit geeigneten $y_i \in B$ $u \sum_{i=1}^{m} G(y_i) \supset B$. Setzt man $G = \prod_{i=1}^{m} G_{y_i}$, $\Gamma = R - u(R - uG)$, so ist $x \in G \supset \Gamma$, Γ v-offen, also eine v-Umgebung von x; ferner ist wegen $\prod_{i=1}^{m} u\, G_{y_i} \,.\, \sum_{i=1}^{m} uG(y_i) = \emptyset$ auch $B.\, uG = \emptyset$, also, da uG v-abgeschlossen, $\Gamma \subset uG$ ist, $v\Gamma \subset uG \subset R - B \subset U$, woraus die Regularität von (R, v) folgt.

IV. Ist f eine stetige Abbildung von (R, u) in einen regulären Raum S, so sei $x \in R$, U eine Umgebung von $y = f(x)$ in S, ferner V eine offene Umgebung von y, $\overline{V} \subset U$. Dann ist $x \in f^{-1}(V) \subset R - u(R - uf^{-1}(V)) \subset uf^{-1}(V) \subset f^{-1}(\overline{V}) \subset f^{-1}(U)$, also $f^{-1}(U)$ eine v-Umgebung von x. Daraus folgt die Behauptung (3).

1.4. *Eine H-Topologie u auf R ist dann und nur dann maximal, wenn* (1) *(R, u) H-abgeschlossen ist*; (2) *das System aller $R - uG$, G offen, eine Basis von (R, u) ist.*

Beweis. I. sind beide Bedingungen erfüllt, und definiert man die maximale Topologie v wie in **1.3**, I, so ist infolge der Bedingung (2) $v = u$.

II. Ist (R, u) H-abgeschlossen, gilt aber (2) nicht, so ist v offenbar stärker als u und von u verschieden.

III. Ist (R, u) kein H-abgeschlossener Raum, so sei (R, u) in einen H-Raum (S, v) eingebettet und $vR - R \neq \emptyset$.

Man wähle $\xi \in vR - R$ und $a \in R$ und setze $\varphi(\xi) = a$ und für $x \in R$ $\varphi(x) = x$; φ ist dann eine Abbildung von $Q = R + (\xi)$ auf R. Wir bestimmen eine Topologie v auf R durch die Festsetzung: $M \subset R$ ist dann und nur dann v-offen, wenn $\varphi^{-1}(M)$ in Q offen ist. Man beweist leicht, daß v eine H-Topologie, stärker als u und von u verschieden ist.

1.5. *Ein H-Raum (R, u) ist dann und nur dann bikompakt, wenn* (1) *je zwei verschiedene Punkte aus R disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen*; (2) *die Topologie u maximal ist.*

Beweis. I. Sind die Bedingungen erfüllt, so folgt aus (2) nach **1.4** die H-Abgeschlossenheit von (R, u). Konstruieren wir die H-Topologie v auf R wie in **1.3**, I, so ist erstens v stärker als u, also gleich u, zweitens folgt aus (1) nach **1.3**, Behauptung (2), daß (R, v), also (R, u) regulär ist. Daraus folgt nach **0.6** die Bikompaktheit von (R, u).

II. Ist (R, u) bikompakt, so ist (1) nach **0.6** und (2) nach **0.5** erfüllt.

1.6. *Jedes monotone (nichtleere) System nichtleerer H-abgeschlossenen Teilmengen eines H-Raumes hat einen nichtleeren Durchschnitt.*

Beweis. I. Es sei $\mathfrak{F}$ ein solches System von Teilmengen eines H-Raumes R. Man kann offenbar voraussetzen, daß R H-abgeschlossen ist.

Es sei $F \in \mathfrak{F}$, $x \in R - F$. Für $y \in F$ sei $U(y)$ eine offene Umgebung von y, x non $\in \overline{U(y)}$. Da F H-abgeschlossen ist, gilt nach **0.2** für geeignete $y_i \in F$ $\sum_{i=1}^{m} \overline{F U(y_i)} \supset F$. Setzt man $G(F, x) = \sum_{i=1}^{m} U(y_i)$, so ist $G(F, x)$ offen, $\overline{F G(F, x)} \supset F$ und $\prod_{x \in R-F} \overline{G(F, x)} = F$, da x non $\in \overline{G(F, x)}$.

II. Es sei $F_i \in \mathfrak{F}$, $x_i \in R - F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $F_i \supset F_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Ist $1 < r \leqq n$ und $F_r \prod_{i=r}^{n} G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, so ist auch $F_{r-1} \prod_{i=r}^{n} G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, also nach I $\overline{F_{r-1} G(F_{r-1}, x_{r-1})} \prod_{i=r}^{n} G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, also, da $\prod_{i=r}^{n} G(F_i, x_i)$ offen ist, $F_{r-1} \prod_{i=r-1}^{n} G(F_i, x_i) \neq \emptyset$. Nun folgt aus $F_n G(F_n, x_n) \neq \emptyset$ durch Rekursion $\prod_{i=1}^{n} G(F_i, x_i) \neq \emptyset$.

III. Man nehme an, $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F$ sei leer. Dann ist auch $\prod_{\substack{F \in \mathfrak{F} \\ x \in R-F}} \overline{G(F, x)} = \emptyset$, also $\sum_{\substack{F \in \mathfrak{F} \\ x \in R-F}} (R - \overline{G(F, x)}) = R$. Nach **0.2** gilt dann mit geeigneten $F_i \in \mathfrak{F}$, $x_i \in R - F_i$ $\sum_{i=1}^{n} \overline{R - \overline{G(F_i, x_i)}} = R$, $\sum_{i=1}^{n} (R - G(F_i, x_i)) = R$, $\prod_{i=1}^{n} G(F_i, x_i) = \emptyset$, wobei infolge der Monotonie von $\mathfrak{F}$ noch $F_i \supset F_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ vorausgesetzt werden kann. Das ist aber nach II ein Widerspruch.

1.7. *Ein H-Raum ist dann und nur dann bikompakt, wenn jede seine abgeschlossene Teilmenge H-abgeschlossen ist.*

Beweis. I. Die Bedingung ist nach **0.4** und **0.6** in jedem bikompakten Raum erfüllt.

II. Ist sie in einem H-Raum R erfüllt, so sei $\mathfrak{F}$ ein (nichtleeres) System von abgeschlossenen Teilmengen von R mit $\prod_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$ für $F_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Man nehme an, es sei $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F = \emptyset$. Dann gibt es die kleinste Zahl α, für die eine transfinite Folge $\{F_\xi\}$, $\xi < \alpha$, mit $F_\xi \in \mathfrak{F}$, $\prod_{\xi<\alpha} F_\xi = \emptyset$ existiert. Die Zahl α ist unendlich; wäre sie isoliert, so könnte man durch eine geeignete Umordnung aus $\{F_\xi\}$ eine Folge $\{F'_\xi\}$, $\xi < \beta$, $\beta < \alpha$, bilden, was aber ein Widerspruch ist. Die Mengen $A_\xi = \prod_{\eta<\xi} F_\eta$ ($0 < \xi < \alpha$) sind abgeschlossen, also H-abgeschlossen und nichtleer; für $0 < \xi_1 < \xi_2 < \alpha$ gilt $A_{\xi_1} \supset A_{\xi_2}$; da α keine isolierte Zahl ist, gilt $\prod_{0<\xi<\alpha} A_\xi = \prod_{\xi<\alpha} F_\xi = \emptyset$. Das ist nach **1.6** ein Widerspruch; also $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \emptyset$. Nun folgt aus **0.3** die Bikompaktheit von R.

§ 2.

2.1. *Zu jedem H-Raum R gibt es einen H-Raum S mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *R ist in S eingebettet,* $\overline{R} = S$; (2) *S ist H-abgeschlossen*; (3) *ist f eine stetige Abbildung von R in einen H-Raum Q, $\overline{f(R)} = Q$, so gibt es eine Teilmenge M von S und ihre stetige Abbildung F auf Q, für die $R \subset M$, $F_R = f$ gilt.*

Ist Q bikompakt, so kann man $M = S$ wählen.

Besitzt ferner ein H-Raum S' die Eigenschaften (1)—(3) *in bezug auf einen H-Raum R', so existiert zu jeder Homöomorphie f zwischen R und R' eine Homöomorphie zwischen S und S', welche auf R mit f zusammenfällt.*

Definition. Einen H-Raum S, welcher die erwähnten Eigenschaften (1)—(3) besitzt, nennen wir eine *H-abgeschlossene Hülle* von R.

Beweis des Satzes. Ist R H-abgeschlossen, so kann man $S = R$ setzen. Daher setzen wir voraus, R sei nicht H-abgeschlossen. In dem ganzen Beweis bezeichnen die Buchstaben A, B, G offene Teilmengen von R, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$ Systeme solcher Mengen.

I. $\mathfrak{A}$ heiße ein α-System, wenn (α1) $\mathfrak{A} \neq \emptyset$; ($\alpha$2) $\emptyset$ non $\in \mathfrak{A}$; (α3) ist $B \supset A$, $A \in \mathfrak{A}$, so ist $B \in \mathfrak{A}$; (α4) sind $A_i \in \mathfrak{A}$ ($i = 1, \ldots, m$), so ist $\prod_{i=1}^{m} A_i \in \mathfrak{A}$; ($\alpha$5) $\prod_{A \in \mathfrak{A}} \overline{A} = \emptyset$. $\mathfrak{A}$ heiße ein β-System, wenn $\mathfrak{A}$ ein α-System, aber keine echte Teilmenge eines α-Systems ist. Da R kein H-abgeschlossener Raum ist, gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{B}$ von R, welche keine B_i mit $\sum_{i=1}^{m} \overline{B}_i = R$ enthält. Mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir das System aller A, zu denen es $B_i \in \mathfrak{B}$ mit $R - \sum_{i=1}^{m} \overline{B}_i \subset A$ gibt. $\mathfrak{A}$ besitzt offenbar die Eigenschaften α1 — α4;

wegen $\prod\limits_{A \in \mathfrak{A}} \bar{A} \subset \prod\limits_{B \in \mathfrak{B}} \overline{R - B} \subset \prod\limits_{B \in \mathfrak{B}} (R - B) = \emptyset$ ist also $\mathfrak{A}$ ein α-System.

II. Es sei ein α-System $\mathfrak{A}$ gegeben. Wir wollen die Existenz eines $\mathfrak{A}$ umfassenden β-Systems beweisen. $\{\mathfrak{B}_\xi\}$, $\xi < \gamma$, sei eine (transfinite) Folge aller α-Systeme. Man setze $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ und für $0 < \xi < \gamma$ $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, falls $\mathfrak{B}_\xi \supset \sum\limits_{\eta<\xi} \mathfrak{A}_\eta$, sonst aber $\mathfrak{A}_\xi = \sum\limits_{\eta<\xi} \mathfrak{A}_\eta$; ferner setze man $\mathfrak{S} = \sum\limits_{\xi<\gamma} \mathfrak{A}_\xi$. $\mathfrak{S}$ genügt offenbar den Bedingungen $\alpha 1$ und $\alpha 5$. Bleibt zu zeigen, daß $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$ erfüllt sind.

Ad $\alpha 2$. Wäre $\emptyset \in \mathfrak{S}$, so gäbe es die kleinste $\xi < \gamma$ mit $\emptyset \in \mathfrak{A}_\xi$; es wäre dann $\mathfrak{A}_\xi \neq \sum\limits_{\eta<\xi} \mathfrak{A}_\eta$, also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, $\emptyset \in \mathfrak{B}_\xi$; das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{B}_\xi$ ein α-System ist.

Ad $\alpha 3$. Ist $B \supset A$, $A \in \mathfrak{S}$, so wähle man die kleinste ξ mit $A \in \mathfrak{A}_\xi$. Ist $\xi = 0$, so ist $A \in \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, also $B \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$. Ist $\xi > 0$, so ist $\mathfrak{A}_\xi \neq \sum\limits_{\eta<\xi} \mathfrak{A}_\eta$, also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, $A \in \mathfrak{B}_\xi$, $B \in \mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{A}_\xi \subset \mathfrak{S}$.

Ad $\alpha 4$. Sind $A_i \in \mathfrak{S}$ $(i = 1, \ldots, m)$, so wähle man die kleinste ξ mit $A_i \in \mathfrak{A}_\xi$ $(i = 1, \ldots, m)$. Ist $\xi = 0$, so ist $A_i \in \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ $(i = 1, \ldots, m)$, also $\prod\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$. Ist $\xi > 0$, so ist offenbar $\mathfrak{A}_\xi \neq \sum\limits_{\eta<\xi} \mathfrak{A}_\eta$, also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, $A_i \in \mathfrak{B}_\xi$, $\prod\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{A}_\xi \subset \mathfrak{S}$.

$\mathfrak{S}$ ist also ein α-System. Ist $\mathfrak{B}$ ein α-System, $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{S}$, so gilt für eine geeignete $\xi < \gamma$ $\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{B} \supset \mathfrak{S} \supset \sum\limits_{\eta<\xi} \mathfrak{A}_\eta$; nach der Definition von $\mathfrak{A}_\xi$ ist also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$. Daher ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}$ und somit $\mathfrak{S}$ ein β-System.

III. Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ verschiedene β-Systeme, so kann offenbar nicht $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2$ sein. Es sei also $G \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1$. Mit $\mathfrak{A}'$ bezeichne man das System aller A, für die mit geeigneter $B \in \mathfrak{A}_1$ $A \supset BG$ gilt. Dann ist $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{A}'$ ist also kein α-System. $\mathfrak{A}'$ besitzt aber offenbar die Eigenschaften $\alpha 1$ und $\alpha 3$ — $\alpha 5$ und kann daher die Eigenschaft $\alpha 2$ nicht besitzen; also $\emptyset \in \mathfrak{A}'$, folglich gibt es $A \in \mathfrak{A}_1$ mit $AG = \emptyset$.

IV. Jedem β-System $\mathfrak{A}$ sei jetzt ein in R nicht liegender Gegenstand $\tau(\mathfrak{A})$ zugeordnet und zwar verschiedenen $\mathfrak{A}$ verschiedene $\tau(\mathfrak{A})$. Mit T bezeichnen wir die Menge aller $\tau(\mathfrak{A})$; nach I und II ist T nichtleer. Wir setzen $S = R + T$ und definieren eine Topologie u auf S wie folgt; für $\tau(\mathfrak{A}) = x \in S$ sollen alle $(x) + A$ mit $A \in \mathfrak{A}$, für $x \in R$ alle A mit $x \in A$ als Umgebungen von x gelten. Man beweist leicht, daß (S, u) ein H-Raum ist (z. B. das Trennungsaxiom folgt aus III und der Eigenschaft $\alpha 5$ der

β-Systeme). Ferner ist klar, daß R in (S, u) eingebettet und $uR = S$ ist.

V. Man nehme an, S sei kein H-abgeschlossener Raum. Dann gibt es einen S umfassenden H-Raum V so, daß S in V nicht abgeschlossen ist. Man wähle $x \in \overline{S} - S$ und bezeichne mit $\mathfrak{A}$ das System aller RU, wo U eine offene Umgebung von x in V ist. $\mathfrak{A}$ ist, wie man leicht zeigen kann, ein α-System; also gibt es nach II ein β-System $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. Da V ein H-Raum ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen U und U' von x bzw. $y = \tau(\mathfrak{B})$. Wegen $UR \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ist nach der Definition von (S, u) $UR + (y)$, also auch $(UR + (y)) \,.\, U'S = (y)$ eine Umgebung von y in S. Das ist aber ein Widerspruch, da $y \in \overline{R} - R$, also kein isolierter Punkt ist. Daher ist S H-abgeschlossen.

VI. f sei eine stetige Abbildung von R in einen H-Raum Q, $\overline{f(R)} = Q$. Für $y \in Q$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(y)$ das System aller A, welche das Urbild einer Umgebung von y (in Q) enthalten, und mit $\Phi(y)$ die Menge aller $\tau(\mathfrak{A})$, wo $\mathfrak{A}$ alle $\mathfrak{A}(y)$ umfassende β-Systeme durchläuft. Sind y_1, y_2 verschiedene Punkte aus Q, so seien U_1 bzw. U_2 disjunkte offene Umgebungen von y_1 bzw. y_2. Dann gilt $f^{-1}(U_1) \in \mathfrak{A}(y_1)$, $f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{A}(y_2)$. Gäbe es ein β-System $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}(y_1)$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}(y_2)$, so wäre $f^{-1}(U_1) \in \mathfrak{A}$, $f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{A}$, also $\emptyset \in \mathfrak{A}$; das ist aber nicht möglich. Daher sind $\Phi(y_1)$ und $\Phi(y_2)$ disjunkt. Ist ferner $y \in Q - f(R)$, so kann man zu jedem $x \in R$ eine offene Umgebung U von y so finden, daß $f(x)$ non $\in \overline{U}$, also x non $\in \overline{f^{-1}(U)} \subset f^{-1}(\overline{U})$; daher ist dann, da $\mathfrak{A}(y)$ offenbar auch die Eigenschaften $\alpha 1 - \alpha 4$ besitzt, $\mathfrak{A}(y)$ ein α-System, also nach II $\Phi(y) \neq \emptyset$.

Demzufolge ist, wenn $M = R + \sum_{y \in Q} \Phi(y)$, für $x \in R$ $F(x) = f(x)$ und für $x \in \Phi(y)$ $F(x) = y$ gesetzt wird, F eine Abbildung von M auf Q. Dabei ist $R \subset M \subset S$ und $F_R = f$.

Bleibt zu zeigen, daß F stetig ist. Ist $x \in R$, U eine offene Umgebung von $F(x) = f(x)$ in Q, so ist $F^{-1}(U) \supset F^{-1}(U) \,.\, R = f^{-1}(U)$ eine offene (infolge der Stetigkeit von f) x enthaltende Teilmenge von R, also nach der Definition von S (siehe IV) eine Umgebung von x in S, also auch in M.

Ist $\tau(\mathfrak{A}) = x \in M - R$ und U eine offene Umgebung von $y = F(x)$, so ist $F^{-1}(U) \supset (x) + F^{-1}(U) \,.\, R = (x) + f^{-1}(U)$; $(x) + f^{-1}(U)$ ist aber eine Umgebung von x in S, da $f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}(y) \subset \mathfrak{A}$ ist. Daraus folgt die Stetigkeit von F.

VII. f sei jetzt eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten H-Raum Q, $\overline{f(R)} = Q$. Für jeden Punkt $x = \tau(\mathfrak{A}) \in S - R$ wähle man ein $y \in \prod_{A \in \mathfrak{A}} \overline{f(A)}$ (das geht, da dieser Durchschnitt nach **0**.3 nichtleer ist). Ist U eine offene Umgebung von y, so ist für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ $f(A) . U \neq \emptyset$, also $A . f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Das System $\mathfrak{A}'$ aller B, für die mit geeigneter $A \in \mathfrak{A}$ $B \supset A f^{-1}(U)$ gilt, ist offenbar ein $\mathfrak{A}$ umfassendes α-System; also $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ und daher $f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}$. Also gilt (mit den Bezeichnungen von VI) $\mathfrak{A}(y) \subset \mathfrak{A}$, $x = \tau(\mathfrak{A}) \in \Phi(y)$. Daraus folgt, daß die in VI definierte Menge M gleich S ist, w. z. b. w.

VIII. Nun gehen wir zum Beweis der letzten Behauptung des Satzes über. Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz:

Sind R, Q H-Räume, $M \subset R$, $\overline{M} = R$, f und g stetige Abbildungen von R in Q, $f_M = g_M$, so ist $f = g$.

Beweis des Hilfssatzes. Gäbe es $x \in R$ mit $f(x) \neq g(x)$, so wären für beliebige Umgebungen U von $f(x)$ und V von $g(x)$ $f^{-1}(U)$ und $g^{-1}(V)$, also auch $f^{-1}(U) . g^{-1}(V)$ Umgebungen von x und daher $f^{-1}(U) . g^{-1}(V) M = f_M^{-1}(U) . g_M^{-1}(V) = f_M^{-1}(UV) \neq \emptyset$, also $UV \neq \emptyset$, was aber dem Hausdorffschen Trennungsaxiom widerspricht.

R, R', S, S' seien jetzt Räume mit den in der letzten Behauptung des Satzes vorausgesetzten Eigenschaften. Es sei f eine topologische Abbildung von R auf R', φ die Umkehrung von f.

Es sei $R \subset M \subset S$, F eine stetige Abbildung von M auf S', $F_R = f$; ferner $R' \subset M' \subset S'$, Φ eine stetige Abbildung von M' auf S, $\Phi_{R'} = \varphi$. Setzt man für $x \in M_1 = F^{-1}(M')$ $g(x) = \Phi(F(x))$, so ist g eine stetige Abbildung von M_1 auf S und g_R eine identische Abbildung. Nun folgt aus dem Hilfssatz, daß g eine identische Abbildung und daher $M_1 = S$, $M = S$, F schlicht und Φ eine Umkehrung von F, also F eine Homöomorphie ist. Hiermit ist der Beweis des Satzes **2.1** vollendet.

2.2. *Ist S eine H-abgeschlossene Hülle eines H-Raumes R, so gilt:* (1) *R ist in S offen*; (2) *der Relativraum $S - R$ ist isoliert*; (3) *ist $G \subset R$ offen, $a \in \overline{G} - R$, so ist $(a) + G$ eine Umgebung von a*; (4) *ist $A \subset R$ in R nirgendsdicht, so ist $\overline{A} \subset R$.*

Beweis. Da (4) aus (3) und (1), (2) aus der Konstruktion des Raumes S in **2.1**, IV unmittelbar folgen, brauchen wir nur (3) zu beweisen. Ist $G \subset R$ offen, $a \in \overline{G}$, a non $\in R$, so ist für jede Umgebung U von a $URG \neq \emptyset$. Daher ist, wenn man mit $\mathfrak{A}$ das System aller UR, mit $\mathfrak{A}'$ das System aller B bezeichnet, wobei B alle URG enthaltende offene Mengen, U alle offene Umgebungen von a durchläuft, $\mathfrak{A}$ ein β-System, $\mathfrak{A}'$ ein α-System (siehe **2.1**, I) und $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, $G \in \mathfrak{A}$, also $(a) + G$ eine Umgebung von a ist (siehe **2.1**, IV).

2.3. *(R, u) und (S, v) seien H-Räume, R in S eingebettet, $vR = S$. Für die Existenz einer S umfassenden H-abgeschlossenen*

Hülle von R ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

(1) *R ist in S offen; ist $G \subset R$ offen, $x \in \overline{G} - R$, so ist $(x) + G$ eine Umgebung von x;*

(2) *ist w eine H-Topologie auf S, die schwächer als v ist, und ist dabei $wR = S$, $w_R = v_R = u$, so ist $w = v$.*

Beweis. I. Kann man S in eine H-abgeschlossene Hülle von R einbetten, so folgt aus **2.2**, Behauptung (3), daß die Bedingung (1) erfüllt ist.

II. Ist diese Bedingung erfüllt, so sei w eine H-Topologie auf S, w schwächer als v, $wR = S$, $w_R = v_R = u$. Es sei $a \in S - R$ und U eine w-offene Umgebung von a; dann ist offenbar $a \in w(UR) \subset \subset v(UR)$. Da UR in (R, w_R), also in (R, v_R) offen ist, folgt aus (1), daß $(a) + UR$, also auch U, eine v-Umgebung von a ist. Daher ist $w = v$, also die Bedingung (2) erfüllt.

III. Ist diese Bedingung erfüllt, so sei T eine H-abgeschlossene Hülle von R. Nach **2.1** gibt es eine Menge $M \subset T$ und eine stetige Abbildung F von M auf S, so daß $R \subset M$ und für $x \in R$ $F(x) = x$ ist. Für jedes $y \in S - R$ wähle man einen Punkt $x = = \varphi(y) \in M$ mit $F(x) = y$, bezeichne ferner mit P die Menge aller $\varphi(y)$ und setze $Q = R + P$. Dann ist $g = F_Q$ eine schlichte stetige Abbildung von Q auf S. Nun folgt aus (2), daß g eine topologische Abbildung ist. Hiermit ist der ganze Satz bewiesen.

2.4. *Für $i = 1, 2$ sei R_i ein H-Raum mit folgender Eigenschaft: ist $a \in R_i$ nicht isoliert, so gibt es eine offene Menge $G \subset R_i$, so daß $a \in \overline{G}$, aber $(a) + G$ keine Umgebung von a ist.*

Unter diesen Voraussetzungen sind R_1 und R_2 dann und nur dann homöomorph, wenn ihre H-abgeschlossene Hüllen homöomorph sind.

Beweis. Ist R_1 mit R_2 homöomorph, so wende man **2.1**, letzte Behauptung, an. Sind ihre H-abgeschlossene Hüllen S_1 bzw. S_2 miteinander homöomorph, so sei f eine topologische Abbildung von S_1 auf S_2. Ist $a \in R_1$ isoliert, so ist a auch in S_1 isoliert, also $f(a)$ in S_2 isoliert und daher, da $S_2 = \overline{R}_2$, $f(a) \in R_2$. Ist $a \in R_1$ nicht isoliert, so sei $G \subset R_1$ offen, $a \in \overline{G}$, $(a) + G$ keine Umgebung von a. Dann ist $f(G)$ in S_2 offen, $b = f(a) \in \overline{f(G)}$, also nach **0.1** $b \in \overline{R_2 f(G)}$, aber $(b) + R_2 f(G)$ keine Umgebung von b, also nach **2.3** $b \in R_2$. Daher ist $f(R_1) \subset R_2$ und, da analog $f^{-1}(R_2) \subset R_1$ ist, $f(R_1) = R_2$, also R_1 mit R_2 homöomorph.

Bemerkungen zu dem Satz **2.4**. 1. Nach **2.1** ist jedem H-Raum bis auf Homöomorphie eindeutig seine H-abgeschlossene Hülle zugeordnet. Der Satz **2.4** zeigt, daß diese Zuordnung bei gewissen Voraussetzungen eineindeutig ist. Die Voraussetzungen des Satzes sind dafür nicht nur hinreichend, sondern auch in einem gewissen Sinne notwendig: aus **2.3** folgt nämlich, daß, falls sie in einem H-Raum R nicht erfüllt sind, kann man seinen echten Teilraum finden, welcher mit R gemeinsame H-abgeschlossene Hülle besitzt.

2. Die Voraussetzungen des Satzes **2.4** sind insbesondere in folgenden Fällen, wie man leicht zeigen kann, erfüllt:

a) wenn R ein geordneter Raum ist;

b) wenn man zu jedem nichtisolierten $a \in R$ eine unendliche abzählbare $M \subset R$ so finden kann, daß jede Umgebung von a höchstens endlichviele $x \in M$ nicht enthält.

§ 3.

3.1. *Zu jedem vollständig regulären H-Raum R gibt es einen H-Raum S mit folgenden Eigenschaften:* (1) *R ist in S eingebettet, $\overline{R} = S$;* (2) *S ist bikompakt;* (3) *ist f eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten Raum Q, $\overline{f(R)} = Q$, so gibt es eine stetige Abbildung von S auf Q, die auf R mit f zusammenfällt.*

Besitzt ein H-Raum S' die Eigenschaften (1)—(3) *in bezug auf einen H-Raum R', so existiert zu jeder Homöomorphie f zwischen R und R' eine Homöomorphie zwischen S und S', die auf R mit f zusammenfällt.*

Definition. Ein H-Raum S, welcher die erwähnten Eigenschaften (1)—(3) besitzt, heißt eine *bikompakte Hülle* von R.

Beweis des Satzes. I. P sei eine H-abgeschlossene Hülle von R. Jedem $x \in P$ sei ein Gegenstand $\sigma(x)$ zugeordnet und zwar so, daß für $x \in R$ $\sigma(x) = x$, für $x \in P - R$ $\sigma(x)$ non $\in R$ ist und für $x \in P - R$, $y \in P - R$ $\sigma(x) = \sigma(y)$ dann und nur dann gilt, wenn für jede stetige Abbildung f von P in einen bikompakten H-Raum $f(x) = f(y)$ ist. Mit S bezeichnen wir die Menge aller $\sigma(x)$; dann ist $R \subset S$ und σ eine Abbildung von P auf S. Wir definieren eine Topologie u auf S wie folgt: $M \subset S$ soll dann und nur dann als u-abgeschlossen gelten, wenn $\sigma^{-1}(M)$ in P abgeschlossen ist. Offenbar ist dann R in (S, u) eingebettet, $uR = S$, σ eine stetige Abbildung.

II. Ist φ eine stetige Abbildung von P in einen bikompakten H-Raum Q, so setzen wir für $x \in P$ $f(\sigma(x)) = \varphi(x)$. Da aus $\sigma(x) = \sigma(y)$ stets $\varphi(x) = \varphi(y)$ folgt, ist dadurch eine Abbildung f von S in Q definiert. Ist $A \subset Q$ abgeschlossen, so ist $\sigma^{-1}(f^{-1}(A)) = \varphi^{-1}(A)$ in P, also $f^{-1}(A)$ in (S, u) abgeschlossen. Daher ist f stetig; offenbar $f(S) = \varphi(P)$, $f_R = \varphi_R$.

III. Zum Beweis, daß (S, u) ein H-Raum ist, genügt es zu zeigen, daß das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt ist, da

(S, u) offenbar den übrigen Axiomen genügt. Es sei also $x \in S$, $y \in S$, $x \neq y$. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Ist $x \in R$, $y \in R$, so folgt aus der vollständigen Regularität von R, indem man den Satz **2.1** anwendet, daß es eine stetige Abbildung φ von P in das Intervall $[0, 1]$ gibt, für die $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = 1$ gilt.

b) Ist $x \in R$, $\sigma(b) = y \in S - R$, so sei U eine Umgebung von b in P, x non $\in \overline{U}$. Man kann, da R vollständig regulär ist, eine Abbildung ψ von R in das Intervall $[0, 1]$ so finden, daß $\psi(x) = 0$, $\psi(\overline{U}R) = (1)$ ist. Es gibt dann nach **2.1** eine stetige Abbildung φ von P in $[0, 1]$ mit $\varphi_R = \psi$ und daher $\varphi(x) = 0$, $\varphi(b) = 1$.

c) Ist $\sigma(a) = x \in S - R$, $\sigma(b) = y \in S - R$, so gibt es nach der Definition von σ eine stetige Abbildung φ von P in einen bikompakten Raum, für die $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ ist.

In jedem der drei Fälle bestimme man f wie in II; f ist dann eine stetige Abbildung von (S, u) in einen bikompakten H-Raum, $f(x) \neq f(y)$. Daraus folgt, daß in (S, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte a b g e s c h l o s s e n e Umgebungen besitzen.

IV. Nach I, III und **1.1** ist (S, u) ein H-abgeschlossener Raum und R ist in (S, u) eingebettet. Konstruiert man die H-Topologie v wie in **1.3**, so ist (S, v) nach III und **1.3**, Behauptung (2), regulär, also, da v stärker als u ist, nach **1.1** und **0.6** bikompakt. Aus der Behauptung (1) des erwähnten Satzes folgt ferner, daß R in (S, v) eingebettet ist; offenbar ist $vR = S$.

V. Ist ψ eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten Raum Q, $\overline{\psi(R)} = Q$, so sei φ eine stetige Abbildung von P auf Q, $\varphi_R = \psi$ (siehe **2.1**). Konstruiert man f wie in II, so ist $f_R = \psi$ und f nach **1.3**, Behauptung (3), eine stetige Abbildung von (S, v) auf Q.

VI. Bleibt noch die letzte Behauptung des Satzes zu beweisen. Haben R', S' und f die in dieser Behauptung erwähnten Eigenschaften, und bezeichnet φ die Umkehrung von f, so gibt es stetige Abbildungen F von S auf S' und Φ von S' auf S so, daß gilt: $F_R = f$, $\Phi_{R'} = \varphi$. Setzt man für $x \in S$ $g(x) = \Phi(F(x))$, so ist g eine stetige Abbildung von S auf S und g_R eine identische Abbildung. Daher ist nach dem Hilfssatz aus **2.1**, VIII, auch g eine identische Abbildung, also F schlicht und daher eine Homöomorphie.

3.2. *(R, u) und (S, v) seien vollständig reguläre H-Räume, R in S eingebettet, $vR = S$. Dann ist jede der folgenden Bedingungen für die Existenz einer S umfassenden bikompakten Hülle von R notwendig und hinreichend:*

(1) *Ist f eine in R definierte stetige beschränkte Funktion, so*

kann man eine in dem Raum S definierte stetige beschränkte Funktion F so finden, daß $F_R = f$ gilt.

(2) *Ist w eine H-Topologie auf S, (S, w) vollständig regulär, $wR = S$, w schwächer als v, $w_R = v_R = u$, so ist $w = v$.*

Beweis. I. Kann man S in eine bikompakte Hülle von R einbetten, so ist (1) offenbar erfüllt.

II. Ist (1) erfüllt, so sei w eine H-Topologie auf S mit den in (2) vorausgesetzten Eigenschaften. Ist $M \subset S$ w-abgeschlossen und nichtleer, $x \in S - M$, so sei die Funktion f in S definiert, in bezug auf (S, w) stetig und beschränkt, $f(x) = 0$, $f(M) = (1)$. Es gibt dann eine in S definierte beschränkte, in bezug auf (S, v) stetige Funktion g mit $g_R = f_R$. Nach dem Hilfssatz aus **2.1**, VIII ist dann $g = f$, woraus x non $\in vM$ folgt. Also ist M auch v-abgeschlossen und daher $w = v$, also (2) erfüllt.

III. Gilt (2), so sei S in einen bikompakten H-Raum T eingebettet, $\overline{S} = T$, ferner P eine bikompakte Hülle von R. Nach **3.1** gibt es eine stetige Abbildung f von P auf T so, daß f_R die identische Abbildung ist. Wählt man für jedes $y \in S - R$ einen Punkt $x = \varphi(y) \in f^{-1}(y)$, bezeichnet mit M die Menge aller $\varphi(y)$ und setzt $Q = R + M$, so ist f_Q eine stetige schlichte Abbildung von Q auf S. Nun folgt aus (2), daß f_Q eine Homöomorphie ist. Hiermit ist der Satz bewiesen.

*

O absolutně uzavřených a bikompaktních prostorech.

(Obsah předešlého článku.)

V § 1 se dokazují m. j. tyto věty:

K tomu, aby AHU-prostor, jehož každé dva různé body jsou $\overline{\overline{O}}$-oddělené, byl bikompaktní, je nutno a stačí, aby každé jeho prosté spojité zobrazení na AHU-prostor bylo homeomorfní.

AHU-prostor je bikompaktní, když a jen když každá jeho uzavřená část je absolutně uzavřená.

Hlavním výsledkem § 2 je tato věta: ke každému AHU-prostoru R existuje AHU-prostor S s těmito vlastnostmi: (1) R je vnořen do S, $\overline{R} = S$; (2) S je absolutně uzavřený prostor; (3) je-li f spojité zobrazení R do AHU-prostoru Q, $\overline{f(R)} = Q$, pak existuje $M \subset S$ a spojité zobrazení F M na Q tak, že $R \subset M$, $F_R = f$. Je-li Q bikompaktní, lze klást $M = S$.

V § 3 se používá výsledků § 1 a § 2 k důkazu známé věty o bikompaktním obalu.