Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Petr

O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 69 (1940), No. 2, 9--22

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121982`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

# ČÁST MATEMATICKÁ

## O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce.

K. Petr, Praha.

(Došlo dne 24. září 1939.)

V následujícím budu uvažovati lineární substituci (resp. lineární vztahy mezi proměnnými $x_i$, $X_i$) tvaru

$$X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Pro tuto substituci byl podán racionálný kanonický tvar; jednoduchým způsobem odvodil jej v posledních letech L. E. Dickson. Výklad o tom najde čtenář v jeho „Modern Algebraic theories", které pod titulem „Höhere Algebra" vyšly v německém překladě (r. 1929); viz str. 80 a násl. tohoto překladu. Než postup Dicksonův lze ještě velmi podstatně zjednodušiti; ve tvaru, ve kterém na cit. místě byl podán, není tak snadno přístupný porozumění; obtíže zejména při jeho postupu vznikající nutí autora myšlenkový pochod z velké části pouze naznačovati. Zavedením operačního symbolu, který níže označuji písmenem $\Delta$, stávají se veškeré úvahy jasné, zcela elementární a získávají na stručnosti.

### I.

Nejprve zavedu některé předpoklady a označení. Čísla $a_{ik}$ v (1) nechť jsou prvky tělesa (komutativního) $K$. Obecně budou všecka čísla v následujícím užívaná a značená pomocí písmen $a, b, c, d$ prvky tělesa $K$. Písmena pak $x, y, z$ budou znaky pro proměnné lineárních forem v násl. se vyskytujících.

Matici čísel $a_{ik}$ v (1) označíme $A$; jednotkovou matici $n$-tého stupně $E$.*) Determinanty $n$-tého stupně z matice $A$ resp. matice $A - \lambda E$ značeny budou $|A|$, $|A - \lambda E|$. Obdobná označení nebudou v následujícím zevrubněji vysvětlována. Dále nechť značí $[x]$ matici o jednom sloupci a $n$ řádcích; v řádku $i$-tém nechť se

*) $E$ bude v pozdějších odstavcích značiti jednotkovou matici i jiných stupňů; o který stupeň při tom jde, snadno se pozná z výrazu, ve kterém jest označení to použito.

nachází $x_i$; obdobný význam mají $[X]$, $[y]$ atd. Pak vztahy (1) lze psáti ve tvaru

$$[X] = A[x]. \tag{1'}$$

Transformace proměnných, jež v (1) budeme prováděti, jsou pro $x$ a $X$ kogredientní; t. j. obě řady $x$, $X$ se transformují touž lineární substitucí. Na př. klademe

$$[x] = C[y] \text{ a současně } [X] = C[Y], \tag{2}$$

kde $C$ jest matice čísel $c_{ik}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ a $|C| \neq 0$. Touto substitucí se změní (1) ve vztahy

$$[Y] = B[y], \text{ kde } B = C^{-1}AC. \tag{2'}$$

Determinant $|A - \lambda E|$ jest polynom $n$-tého stupně v parametru $\lambda$. Explicitně jej budeme vypisovati a značiti ve tvaru

$$(-1)^n [\lambda^n - a_n\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \ldots - a_2\lambda - a_1\lambda^0] = (-1)^n f(\lambda). \tag{3}$$

Obyčejně se ve členu posledním závorky na levé straně (t. j. v $-a_1\lambda^0$) činitel $\lambda^0$ potlačuje tím, že se klade $\lambda^0 = 1$; k vůli zjednodušení výkladu násl. to však nebudu činiti.

Největší společná míra všech subdeterminantů stupně $n - 1$ v determinantu $|A - \lambda E|$ budiž polynom stupně $n - s'$ v parametru $\lambda$, označíme ji $f_1(\lambda)$ stanovíce součinitel při $\lambda^{n-s'}$ rovný 1. Polynom tento jest dělitelem mnohočlenu $f(\lambda)$ a lze tedy psáti

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)\, g'(\lambda), \text{ kde } g'(\lambda) = \lambda^{s'} - b_{s'}\lambda^{s'-1} - \ldots - b_2\lambda - b_1\lambda^0; \tag{4}$$

při tom ovšem jest $s'$ číslo celé $> 0$. Jestliže $n = s'$, klademe $f_1(\lambda) = \lambda^0 = 1$ a jest $f(\lambda) = g'(\lambda)$.

Netřeba snad ani podotýkati, že mnohočlen $f(\lambda)$ jest invariantní vůči lineární transformaci (2), neboť z rovnice (2′) následuje též

$$B - \lambda E = C^{-1}(A - \lambda E)\, C \text{ a tedy } |B - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Rovněž $f_1(\lambda)$ jest invariantem; to vyplývá ze vztahů

$$B - \lambda E = C^{-1}(A - \lambda E)\, C, \quad A - \lambda E = C\,(B - \lambda E)\, C^{-1},$$

ze kterých následuje na podkladě známých vět o determinantech, že determinant $r$-tého stupně utvořený z prvků matice $B - \lambda E$ jest lineární formou determinantů $r$-tého stupně utvořených z prvků matice $A - \lambda E$, a naopak. Jsou tudíž také invarianty polynomy $f_r(\lambda)$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, kde $f_r(\lambda)$ jest největší společná míra subdeterminantů v $|A - \lambda E|$ stupně $n - r$.

Operace $\Delta$, o kterou v následujícím se budu opírati, vztahuje se na lineární formy proměnných $x_i$; jest definována rovnicemi

$$\Delta x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$
$$\Delta(cx_i) = c\,\Delta x_i,$$

$$\Delta(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) = c_1\,\Delta x_1 + c_2\,\Delta x_2 + \ldots + c_n\,\Delta x_n.$$

Na $\Delta x_i$ lze opět provésti operaci $\Delta$; obdržíme $\Delta(\Delta x_i) = \Delta^2 x_i$. Obdobně jasný význam mají operace $\Delta^3 x_i, \Delta^4 x_i, \ldots$; $\Delta^0$ značiti bude operaci identickou, pro kterou tedy $\Delta^0 x_i = x_i$; $\Delta^0$ můžeme bez závady nahrazovati 1 a jakožto činitel vynechávati. Dále budiž, značíme-li při proměnném $\lambda$ mnohočlen

$$d_0\lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + \ldots + d_m\lambda^0 \text{ znakem } \varphi(\lambda),$$

$$\varphi(\Delta)\,L = d_0\,\Delta^m L + d_1\,\Delta^{m-1}L + \ldots + d_m L,\ L \text{ lineární forma v } x_i.$$

V důsledku předcházejícího jest, je-li $\psi(\lambda)$ jiný polynóm v proměnné $\lambda$ a $\chi_1(\lambda) = \varphi(\lambda)\,\psi(\lambda) = \psi(\lambda)\,\varphi(\lambda)$, $\chi_2(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda)$,

$\psi(\Delta)\,[\varphi(\Delta)\,L] = \chi_1(\Delta)\,L = \varphi(\Delta)\,[\psi(\Delta)]\,L$,

definice součinu operací $\varphi(\Delta), \psi(\Delta)$;

$\varphi(\Delta)\,L + \psi(\Delta)\,L = \chi_2(\Delta)\,L$,

definice součtu operací $\varphi(\Delta), \psi(\Delta)$.

Pro operace vyznačené symboly $\varphi(\Delta), \psi(\Delta)$ jest tedy definováno sčítání a násobení a jsou platny pro tyto dva úkony tatáž pravidla jako pro sčítání a násobení polynomů o jedné proměnné s koeficienty v $K$. Násobení dvou operací $\varphi(\Delta), \psi(\Delta)$ značí tady ovšem sled těch operací v libovolném pořádku po sobě prováděných na lineární formy v $x_i$.

Na základě symbolu $\Delta$ lze psáti (1) ve tvaru

$$X_i = \Delta x_i,\quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Spočívá tedy operace $\Delta$ provedená na formu $L$ v podstatě v tom, že se ve formě $L$ proměnné $x_i$ nahradí proměnnými $X_i$ vztahy (1) definovanými.

Rovnici (1′) lze dále dáti tvar

$$[\Delta x] = A[x], \tag{7}$$

ze které, nahradíme-li v ní $x$ výrazem $\Delta x$, následuje ihned

$$[\Delta^2 x] = A^2[x] \text{ a stejně } [\Delta^3 x] = A^3[x];\ \text{obecně } [\Delta^r x] = A^r[x]. \tag{7′}$$

Jelikož proměnné $y$ definované rovnicemi (2) jsou lineární formy proměnných $x_i$, podržuje operace $\Delta$ i vzhledem k proměnným $y$ svůj význam a jest očividně

$$\Delta y_i = Y_i,\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

aneb v označení maticovém

$$[\Delta y] = B[y],\ \text{kde } B = C^{-1}AC.$$

## II.

Rovnici (1) můžeme (se zřetelem k (6)) psáti ve tvaru

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + (a_{ii} - \Delta)\, x_i + \ldots + a_{in}x_n = 0, \quad (1'')$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Označme v determinantu $| A - \Delta E |$, který jest mnohočlenem v $\Delta$ stupně $n$-tého a rovným $(-1)^n f(\Delta)$ — viz (3) —, minory, jež patří k prvkům prvého sloupce po řadě $\varphi_{11}(\Delta), \varphi_{21}(\Delta), \ldots, \varphi_{n1}(\Delta)$. Proveďme pak na (1″) operaci $\varphi_{i1}(\Delta)$; obdržíme

$$a_{i1}\, \varphi_{i1}(\Delta)\, x_1 + a_{i2}\, \varphi_{i1}(\Delta)\, x_2 + \ldots + (a_{ii} - \Delta)\, \varphi_{i1}(\Delta)\, x_i + \ldots +$$
$$+ a_{in}\, \varphi_{i1}(\Delta)\, x_n = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sčítáme-li tyto rovnice počtem $n$. dostaneme v důsledku elementárních vět o determinantech

$$(-1)^n f(\Delta)\, x_1 = 0 \text{ aneb } f(\Delta)\, x_1 = 0.$$

Stejně dostáváme

$$f(\Delta)\, x_i = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (8)$$

Koeficienty, jež při provádění operace $\Delta$ na proměnné $x_i$ se vyskytují, tvoří matici $A$. Stejně koeficienty, jež se při provádění operace $f(\Delta)$ na $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ vyskytují, tvoří matici; tato matice jest patrně $f(A)$*) — klademe při tom $A^0 = E$. Má-li však býti splněno (8), musí tato matice býti maticí nulovou a jest tedy

$$f(A) = 0, \quad (8')$$

při čemž 0 na pravé straně této rovnice značí matici nulovou (kvadratickou, $n$-tého stupně).

Kdybychom svrchu místo, abychom násobili rovnice (1″) minory $\varphi_{i1}(\Delta)$, násobili těmito minory dělenými největší společnou mírou všech minorů příslušných k elementům determinantu $| A - \Delta E |$ — kteroužto společnou míru jsme označili svrchu $f_1(\Delta)$ — byli bychom dostali obdobně

$$g'(\Delta)\, x_i = 0, \text{ při tom } f(\Delta) = f_1(\Delta) \,.\, g'(\Delta), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (9)$$

ze které následuje stejně

$$g'(A) = 0. \quad (9')$$

Dokážeme pak, že existuje polynom stupně $s$-tého $g(\lambda)$ takový, že jsou splněny rovnice

$$g(\Delta)\, x_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad (10)$$

při čemž není žádný polynom stupně nižšího než $s$, který by měl tuto vlastnost. Dále, že k tomuto polynomu lze sestrojiti lineární

*) Viz rovnice (7′).

formu $L(x)$ proměnných $x_i$, pro kterou sice již v důsledku (10) jest platna rovnice $g(\varDelta)\,L(x) = 0$, avšak není žádný polynom stupně nižšího než $g$, pro který by byla platna obdobná rovnice.

Nejprve jest patrno, že — je-li $L_1(x)$ libovolná lineární forma proměnných $x_i$ s koeficienty z tělesa $K$ — v řadě forem

$$L_1(x),\ \varDelta L_1(x),\ \varDelta^2 L_1(x), \ldots, \varDelta^k L_1(x), \ldots,$$

jest jenom konečný počet na sobě lineárně nezávislých (nejvýše $n$). Buďtež tedy formy

$$L_1(x),\ \varDelta L_1(x),\ \varDelta^2 L_1(x), \ldots, \varDelta^{r-1} L_1(x)$$

na sobě lineárně nezávisly; forma však $\varDelta^r L(x)$ na vypsaných lineárně závislá, takže jest

$$\varDelta^r L_1(x) = c_r\,\varDelta^{r-1} L_1(x) + c_{r-1}\,\varDelta^{r-2} L_1(x) + \ldots + \\ + c_2\,\varDelta_1 L_1(x) + c_1\,L_1(x).$$

Pak jest platný vztah

$$h_1(\varDelta)\,L_1(x) = 0,\ \text{kde}\ h_1(\varDelta) = \varDelta^r - c_r \varDelta^{r-1} - \ldots - c_2 \varDelta - c_1 \quad (11)$$

a není polynom stupně nižšího než $r$, pro který obdobný vztah byl splněn.

Polynom $h_1(\lambda)$ jest polynom nejnižšího stupně, pro nějž vlastnost (11) jest platna, a budeme říkati, že $h_1(\lambda)$ přísluší k $L_1(x)$ aneb též, že $L_1(x)$ přísluší k $h_1(\lambda)$.*) Každý jiný polynom $h(\lambda)$, pro který $h(\varDelta)\,L_1(x) = 0$, jest očividně dělitelný $h_1(\lambda)$.

Že $h_1(\lambda)$ příslušný k $L_1(x)$ má současně s $L_1(x)$ součinitele z tělesa $K$, jak označením bylo vytknuto, jest v důsledku známých vět o determinantech bezprostředně patrno. O koeficientech lineárních forem (a tudíž i příslušných k nim polynomů) v tomto odstavci dále v úvahu braných činím rovněž předpoklad, že jsou vesměs v tělese $K$.

Dále lze tvrditi: Přísluší-li $L_1(x)$ ku $h_1(\lambda)$ a $L_2(x)$ ku $h_2(\lambda)$, kde $h_1(\lambda)$ a $h_2(\lambda)$ jsou bez společné míry, pak $L_1(x) + L_2(x)$ přísluší k $h_1(\lambda) \,.\, h_2(\lambda)$. Neboť z předpokladu následuje, že $h_1(\varDelta) \,.\, h_2(\varDelta) \,.$ $.\, (L_1(x) + L_2(x)) = 0$; přísluší-li tedy $L_1(x) + L_2(x)$ ku $h(\lambda)$, jest $h(\lambda)$ dělitelem součinu $h_1(\lambda)\,h_2(\lambda)$; t. j. $h(\lambda) = h'_1(\lambda)\,h'_2(\lambda)$, kde $h'_1(\lambda)$ resp. $h'_2(\lambda)$ jest dělitelem polynomu $h_1(\lambda)$ resp. $h_2(\lambda)$ a jest tedy $h'_1(\varDelta)\,h'_2(\varDelta)\,[L_1(x) + L_2(x)] = 0$ a též $h_1(\varDelta)\,h'_2(\varDelta)\,[L_1(x) + L_2(x)] =$ $= h_1(\varDelta)\,h'_2(\varDelta)\,L_2(x) = 0$; jelikož pak dle poslední rovnice $h_1(\lambda) \,.$ $.\, h'_2(\lambda)$ jest dělitelno $h_2(\lambda)$, jest nutně $h'_2(\lambda) = h_2(\lambda)$ a obdobně $h'_1(\lambda) = h_1(\lambda)$, čímž věta dokázána.

Avšak i když polynomy $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$ příslušící k lineárním formám $L_1(x)$, $L_2(x)$ mají společnou míru, lze na základě $L_1(x)$, $L_2(x)$ sestro-

*) Budeme, aby polynom $h_1(\lambda)$ příslušný k $L_1(x)$ byl jednoznačně stanoven předpokládati, že koeficient při nejvyšší mocnině parametru $\lambda$ jest 1.

jiti lineární formu $L_3(x)$, jež patří k nejmenšímu společnému násobku polynomů $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$. Budiž nejv. sp. míra těch polynomů $m(\lambda)$; pak $h_1(\lambda) = \overline{h_1(\lambda)}\, m(\lambda)$, $h_2(\lambda) = \overline{h_2(\lambda)}\, m(\lambda)$; $\overline{h_1(\lambda)}$ a $h_2(\lambda)$ jsou bez společné míry. Rozložme $m(\lambda)$ operacemi shodnými s těmi, jež se používají při hledání společné míry dvou polynomů, ve dva faktory $m_1(\lambda)$, $m_2(\lambda)$. V prvém nechť se nacházejí všecky v $K$ irreducibilní faktory z $m(\lambda)$, jež dělí též $\overline{h_1(\lambda)}$; v druhém pak všecky irr. fakt., jež jsou též v $\overline{h_2(\lambda)}$. Ty irreducibilní faktory z $m(\lambda)$, jež nedělí ani $\overline{h_1(\lambda)}$, ani $\overline{h_2(\lambda)}$, buďtež na př. vesměs v $m_1(\lambda)$. Utvoříme potom tyto dvě lineární formy

$$\overline{L_1(x)} = m_2(\Delta)\, L_1(x), \quad \overline{L_2(x)} = m_1(\Delta)\, L_2(x);$$

první patří k polynomu $\overline{h_1(\lambda)}\, m_1(\lambda)$, druhá k $\overline{h_2(\lambda)}\, m_2(\lambda)$. Oba tyto polynomy jsou bez společné míry a patří tudíž $\overline{L_1(x)} + \overline{L_2(x)}$ k polynomu $\overline{h_1(\lambda)}\,\overline{h_2(\lambda)}\, m_1(\lambda)\, m_2(\lambda) = \overline{h_1(\lambda)}\, h_2(\lambda)\, m(\lambda)$, což jest nejmenší společný násobek polynomů $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$; označme ten násobek $h_3(\lambda)$. Jest tedy $h_3(\lambda)$ polynom co nejnižšího stupně, pro nějž současně platí

$$h_3(\Delta)\, L_1(x) = 0, \quad h_3(\Delta)\, L_2(x) = 0$$

a k němuž příslušná lineární forma existuje a jest $L_3(x) = \overline{L_1}(x) + \overline{L_2}(x)$.

Tímto způsobem postupujíce vycházíme od nejjednodušších lineárních forem $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, k nimž nechť postupně patří polynomy $g^{(1)}(\lambda), g^{(2)}(\lambda), g^{(3)}(\lambda), \ldots, g^{(n)}(\lambda)$; dospějeme tak k polynomu $g(\lambda)$,*) pro nějž platí (10) a k lineární formě $L(x)$, jež patří ku $g(\lambda)$; polynom $g(\lambda)$ jest polynom nejnižšího stupně, pro něž jsou splněny (10) a jest $g(\lambda)$ nejmenší společný násobek mnohočlenů $g^{(1)}(\lambda), g^{(2)}(\lambda), \ldots, g^{(n)}(\lambda)$.

Během vývodů vlastních dospějeme k výsledku, že polynom $g(\lambda)$ se shoduje s polynomem $g'(\lambda)$ ve (4) definovaným.

Polynom $g(\lambda)$, k němuž jsme dospěli, vypisovati budeme explicitně ve tvaru

$$g(\lambda) = \lambda^s - b_s\lambda^{s-1} - b_{s-1}\lambda^{s-2} - \ldots - b_2\lambda - b_1\lambda^0. \tag{12}$$

## III.

Obrátíme se nyní, když jsem vyložil potřebné pomůcky, k transformaci lineárních vztahů (1) kogredientní lineární substi-

*) Napřed sestrojíme na podkladě $x_1, x_2$ lineární formu, jež patří k nejm. sp. nás. polynomů $g^{(1)}(\lambda), g^{(2)}(\lambda)$. K této lineární formě přibereme $x_3$ a sestrojíme lineární formu, jež patří k nejm. sp. nás. $g^{(1)}(\lambda), g^{(2)}(\lambda), g^{(3)}(\lambda)$. K poslední lineární formě přibereme $x_4$ atd. Zpravidla postup se značně zjednoduší. Je-li na př. $g^{(1)}(\lambda) = g^{(2)}(\lambda) = \ldots = g^{(n)}(\lambda)$, lze za lineární formu $L(x)$ zvoliti na př. $x_1$ anebo jinou proměnnou.

tucí za proměnné $x$ resp. $X$. Použijeme k tomu cíli lineární formu $L(x)$ sestrojenou ke konci předchozího odstavce a patřící k polynomu $g(\lambda)$. Zavedeme těchto $s$ nových proměnných $y$:

$$y_1 = L(x),\ y_2 = \Delta L(x),\ y_3 = \Delta^2 L(x), \ldots, y_s = \Delta^{s-1} L(x). \quad (13)$$

Proměnné $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ dostaneme z výrazů pro $y_1, y_2, \ldots, y_s$, když v nich místo $x_i$ zavedeme $X_i$; t. j. když na tyto výrazy provedeme operaci $\Delta$; obdržíme

$$Y_1 = \Delta L(x), Y_2 = \Delta^2 L(x),\ Y_3 = \Delta^3 L(x), \ldots, Y_s = \Delta^s L(x).$$

Tím získáme mezi $Y_1, \ldots, Y_s$ a $y_1, \ldots, y_s$ tyto vztahy

$$Y_1 = y_2,\ Y_2 = y_3,\ Y_3 = y_4, \ldots, Y_{s-1} = y_s,$$
$$Y_s = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_s y_s. \quad (14)$$

Poslední vztah jest vypsání vztahu $g(\Delta)\, L(x) = 0$ v jiném tvaru.

Lineární formy proměnných $x_i$ v (13) pro $y_1, y_2, \ldots, y_s$ jsou na sobě lineárně nezávisly v důsledku předpokladu, že $g(\lambda)$ přísluší k $L(x)$, a jest tedy aspoň jeden determinant $s$-tého stupně z matice součinitelů těch lineárních forem různý od nuly; nechť to jest determinant obsahující součinitele při $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Následkem toho můžeme $x_1, x_2, \ldots, x_s$ vyjádřiti pomocí $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_s$. Ze vztahů pak (1) můžeme proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_s$ a rovněž proměnné $X_1, X_2, \ldots, X_s$, pro něž jest platno stejné vyjádření pomocí $X_{s+1}, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_s$ eliminovati a obdržíme touto transformací nový tvar pro rovnice (1). Prvých $s$ rovnic tohoto tvaru jest vypsáno ve (14). Zbývajících $n - s$ rovnic (jež dostaneme, dosadíme-li do posledních $n - s$ rovnic (1) za $x_1, x_2, \ldots, x_s$ výrazy v $x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s$) má pak tento tvar

$$X_{s+j} = c'_{j1} y_1 + c'_{j2} y_2 + \ldots + c'_{js} y_s + b_{j1} x_{s+1} + b_{j2} x_{s+2} + \ldots +$$
$$+ b_{j,n-s} x_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n - s. \quad (15')$$

Příslušné výrazy pro $\Delta y_1, \ldots, \Delta y_s, \Delta x_{s+1}, \ldots, \Delta x_n$ dostaneme z (14) a (15'), píšeme-li tam místo $Y_1, \ldots, Y_s, X_{s+j}$ po řadě právě $\Delta y_1, \ldots, \Delta y_s, \Delta x_{s+j}$.

Rovnice (15') lze však dále transformacemi lineárními zjednodušovati. Klaďme nejprve

$$x_{s+j} = x'_{s+j} + c'_{js} y_{s-1} \text{ a tedy } X_{s+j} = X'_{s+j} + c'_{js} Y_{s-1} =$$
$$= X'_{s+j} + c'_{js} y_s, \quad j = 1, 2, \ldots, n - s;$$

rovnice (15') získají ihned tvar ($j = 1, 2, \ldots, n$)

$$X'_{s+j} = c''_{j1} y_1 + c''_{j2} y_2 + \ldots +$$
$$+ c''_{j,s-1} y_{s-1} + b_{j1} x'_{s+1} + b_{j2} x'_{j+2} + \ldots + b_{j,n-s} x'_n,$$

v nichž se nevyskytuje již $y_s$. Zcela stejně odstraníme po řadě $y_{s-1}, y_{s-2}, \ldots, y_3, y_2$. Tak dospějeme konečně k proměnným, jež označíme $y_{s+j}$ resp. $Y_{s+j}$, $j = 1, 2, \ldots, n - s$, které jsou vázány rovnicemi tvaru

$$Y_{s+j} = c_{s+j} y_1 + b_{j1} y_{s+1} + b_{j2} y_{s+2} + \ldots + b_{j,n-s} y_n; \qquad (15'')$$
$$j = 1, 2, \ldots, n - s.$$

Avšak součinitel $c_{s+j}$ při $y_1$ v této rovnici jest nutně rovný nule; neboť $y_{s+j}$ jakožto lineární forma $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hoví rovnici $g(\Delta)\, y_{s+j} = 0$ a

$$\Delta y_{s+j} = Y_{s+j} = c_{s+j} y_1 + (y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_n),$$
$$\Delta^2 y_{s+j} = c_{s+j} y_2 + (y_1, y_{s+1}, \ldots, y_n), \ldots,$$
$$\Delta^{s-1} y_{s+1} = c_{s+j} y_{s-1} + (y_1, y_2, \ldots, y_{s-2}, y_{s+1}, \ldots, y_n),$$
$$\Delta^s y_{s+j} = c_{s+j} y_s + (y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}, y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_n).$$

Dosadíme-li pak tyto výrazy do rovnice $g(\Delta)\, y_{s+j} = 0$, dostaneme vztah

$$c_{s+j} y_s + (y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}, y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_n) = 0.$$

Při tom kulaté závorky znamenají lineární formy proměnných v nich se nacházejících. Jelikož však $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jest $n$ proměnných na sobě lineárně nezávislých, jsou součinitelé při jednotlivých proměnných v poslední rovnici vesměs rovny nule a tak jest

$$c_{s+j} = 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n - s,$$

čímž dostáváme konečný tvar rovnice (15″)

$$Y_{s+j} = b_{j1} y_{s+1} + b_{j2} y_{s+2} + \ldots + b_{j,n-s} y_n, \; j = 1, 2, \ldots, n - s. \qquad (15)$$

Tak jest proveden lineární substitucí rozklad základních rovnic počtem $n$ ve dvě skupiny rovnic. V první (14) vyskytují se na levé i pravé straně proměnné $y$, $Y$ o indexech $1, 2, \ldots, s$. V druhé (15) jsou pak na obou stranách proměnné o indexech $s + 1, s + 2, \ldots, n$. Prvá skupina (14) má pro nás tvar definitivní, rovněž i druhá (15), jestliže matice čísel $b_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n - s$ jest tvaru $cE$ (kde $E$ jest jednotk. matice st. $n - s$); není-li však matice ta toho tvaru, pak se zřetelem k tomu, že systém (15) se liší od (1) pouze tím (nehledě k označení), že místo $n$ nastupuje jakožto počet rovnic číslo $n - s$, lze na (15) užíti výsledku právě docíleného a takovýmto způsobem tak dlouho postupovati, až buď dospějeme k matici tvaru $cE_t$ aneb převedeme všech $n$ proměnných na definitivní tvar, ve kterém se soustava rovnic rozpadá na několik skupin, v nichž závislosti na obou stranách jsou upraveny dle vzoru skupiny ve (14).

K tomu jest jenom přičiniti jednu poznámku. K transformaci systému (15) jest především nutno nalézti mnohočlen $g_1(\lambda)$ splňující

$n - s$ rovnic

$$g_1(\Delta)\, y_{s+j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n - s \tag{16}$$

co nejnižšího stupně. Mnohočlen $g(\lambda)$ svrchu použitý splňuje rovnice

$$g(\Delta)\, y_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

tedy též i rovnice (16), kdybychom v nich místo $g_1(\Delta)$ psali $g(\Delta)$; musí tudíž $g_1(\lambda)$ býti dělitelem mnohočlenu $g(\lambda)$.

Vedle toho než vyslovím konečný výsledek, zavedu pro stručnost některá označení. Matici soustavy rovnic (14) označím $M_0$; má tento tvar (vypisuji je k vůli zřetelnosti pro případ $s = 5$)

$$M_0 = \left\{\begin{array}{ccccc} 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5 \end{array}\right\}.$$

Determinant $s$-tého stupně příslušný k této matici jest $(-1)^{s-1} b_1$. Matice jest hodnosti $s$-té, je-li $b_1 \neq 0$. Je-li $b_1 = 0$, jest hodnosti $s - 1$. Charakteristický determinant k této matici příslušný (t. j. determinant $| M_0 - \lambda E |$) jest $(-1)^s g(\lambda)$. Největší společná míra minorů patřících k jednotlivým prvkům determinantu $| M_0 - \lambda E |$ jest 1.

Matice $M_k$ nechť liší se od $M_0$ tím, že počet sloupců i řádků jest $s_k$ (místo $s$) a že prvky v posledním řádku jsou $b_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, s_k$. K vůli stručnosti i při $M_0$ místo $b_i$, $s$, $g(\lambda)$ budu obšírněji psáti $b_i^{(0)}$, $s_0$, $g_0(\lambda)$. Jestliže $s_k = 1$, pak matice se redukuje na jediný prvek $b_1^{(k)}$; $M_k = \{b_1^{(k)}\}$.

Máme tak tento výsledek (výsledné proměnné označím $z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$): Lineární transformaci (kogredientní) lze vztahy (1) mezi proměnnými $X_i$, $x_i$ převésti na vztahy mezi $Z_i$, $z_i$, při nichž matice součinitelů má tento tvar

$$B = \left\{\begin{array}{ccccc} M_0, & \bullet, & \bullet, & \ldots, & \bullet \\ \bullet, & M_1, & \bullet, & \ldots, & \bullet \\ \bullet, & \bullet, & M_2, & \ldots, & \bullet \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bullet, & \bullet, & \bullet, & \ldots, & M_r \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Matice $M_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r$, nacházející se v diagonále jsou matice kvadratické o $s_k$ řádcích, jichž význam byl svrchu vyložen; silné tečky jsou matice nulové pravoúhelníkové, na př. tečka v třetím sloupci druhém řádku zastupuje matici nulovou o $s_1$ řádcích a $s_2$ sloupcích. Celkem má matice $B$ řádků (a sloupců) $s_0 + s_1 + \ldots + s_r = n$.

Jelikož

$$| M_k | = \pm b_1^{(k)}, \; | M_k - \lambda E | = \pm g_k(\lambda),$$

jest

$$| B | = \pm b_1^{(0)} b_1^{(1)} b_1^{(2)} \ldots b_1^{(r)}, \; | B - \lambda E | = \pm g_0(\lambda)\, g_1(\lambda) \ldots g_r(\lambda).$$

Při tom jest $g_k(\lambda)$ dělitelno $g_{k+1}(\lambda)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$. V důsledku toho jest největší společná míra všech minorů příslušných k prvkům determinantu $| B - \lambda E |$ rovna součinu $g_1(\lambda) \cdot g_2(\lambda) \ldots g_r(\lambda)$ a $g_0(\lambda)$ (jež jsme dříve značili $g(\lambda)$) vskutku rovno (nehledě k znaménku) determinantu $| B - \lambda E |$ dělenému tou největší společnou mírou, čímž dokázán výrok ke konci odst. II. uvedený. Stejně vyplývá, že $g_1(\lambda)$ jest rovno podílu největší společné míry všech minorů příslušných v $| B - \lambda E |$ k jednotlivým prvkům a největší společné míry všech minorů toho determinantu příslušných k jednotlivým subdeterminantům druhého stupně. Obdobné věty plynou pro $g_2(\lambda), g_3(\lambda), \ldots$

Výsledek uvedený jest platný v obou možných případech svrchu vytknutých. Především, když postupným prováděním dokázané transformace nedospějeme nikdy k matici tvaru $bE_t$. Avšak i v tom případě, když dospívám k matici $bE_t$, zachovává platnost. Předpokládejme k vůli jednoduchosti, že dospějeme k matici $bE_3$ o třech řádcích a sloupcích. Pak v (17) jsou poslední tři matice $M_{r-2}, M_{r-1}, M_r$ matice o jediném prvku rovném $b$, $M_{r-2} = M_{r-1} = M_r = \{b\}$, $| M_r - \lambda E | = b - \lambda$, atd.

Polynomy $g_0, g_1, \ldots$ jakožto invarianty vzhledem k lineární transformaci (viz přísl. pozn. v odst. I) můžeme přímo počítati z matice $A - \lambda E$, kde $A$ jest matice patřící ke vztahům (1).

Předcházejícími vývody úkol, který jsem si předsevzal, jest splněn. Připojím jenom ještě několik úvah, abych naznačil užitečnost symbolu $\Delta$.

## IV.

Vztahy (1) jsme racionálnými operacemi a lineární transformací s koeficienty v $K$ převedli na vztahy mezi $z_i$, $Z_i$, při čemž matice $B$ z koeficientů v těchto posledních vztazích jest vypsána ve (17). Avšak vztahy tyto racionálnými prostředky lze ještě dále zjednodušovati, jsou-li některé z polynomů $g_k(\lambda)$ reducibilní v $K$.

Uvažujme na př. vztahy z počátku odst. III

$$Y_1 = y_2, Y_2 = y_3, \ldots, Y_{s-1} = y_s, Y_s = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_s y_s, \quad (18)$$

k nimž přísluší charakteristický mnohočlen $g(\lambda) = \lambda^s - b_s \lambda^{s-1} - \ldots - b_2 \lambda - b_1 \lambda^0$, a budiž $g(\lambda)$ reducibilní. Nechť jest $g(\lambda) = h_1(\lambda)\, h_2(\lambda)$, kde $h_1(\lambda)$ a $h_2(\lambda)$ jsou bez společné míry a kde jest

$$h_1(\lambda) = \lambda^{t_1} - d_{t_1} \lambda^{t_1 - 1} - \ldots - d_1 \lambda^0,$$
$$h_2(\lambda) = \lambda^{t_2} - d'_{t_2} \lambda^{t_2 - 1} - \ldots - d'_1 \lambda^0,$$

$t_1 + t_2 = s$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$. Uvažujme tyto lineární výrazy v $y_1, y_2, \ldots, y_s$ (a také v $x_1, x_2, \ldots, x_n$):

$$\begin{array}{l} h_1(\Delta)\, y_1,\ \Delta h_1(\Delta)\, y_1,\ \Delta^2 h_1(\Delta)\, y_1,\ \ldots,\ \Delta^{t_2-1} h_1(\Delta)\, y_1; \\ h_2(\Delta)\, y_1,\ \Delta h_2(\Delta)\, y_1,\ \Delta^2 h_2(\Delta)\, y_1,\ \ldots,\ \Delta^{t_1-1} h_2(\Delta)\, y_1. \end{array} \quad (19)$$

Jak očividno, jsou na sobě lineárně nezávisly; můžeme je tedy místo $y_1, y_2, \ldots, y_s$ zavésti jakožto nové proměnné a označiti po řadě $z_1, z_2, \ldots, z_{t_2}; z_{t_2+1}, \ldots, z_s$. Mezi novými proměnnými $z$ a příslušnými $Z$ jsou pak tyto relace

$$\begin{array}{l} Z_1 = z_2,\ Z_2 = z_3, \ldots, Z_{t_2-1} = z_{t_2},\ Z_{t_2} = d'_1 z_1 + d'_2 z_2 + \ldots + d'_{t_2} z_{t_2}, \\ Z_{t_2+1} = z_{t_2+2}, \ldots, Z_{s-1} = z_s,\ Z_s = d_1 z_{t_2+1} + \ldots + d_{t_1} z_s. \end{array} \quad (20)$$

Speciálně, kdyby $h_2(\lambda) = (\lambda - b)^t$ (tudíž $h_1(b) \neq 0$, $t_2 = t$), mohli bychom místo první řádky ve (19) voliti za nové proměnné tyto lineární výrazy

$$h_1(\Delta)\, y_1,\ (\Delta - b)\, h_1(\Delta)\, y_1,\ (\Delta - b)^2\, h_1(\Delta)\, y_1, \ldots, (\Delta - b)^{t-1}\, h_1(\Delta)\, y_1 \quad (19')$$

a obdrželi bychom (značíme-li je opětně $z_1, z_2, \ldots, z_t$) tyto vztahy

$$Z_1 = bz_1 + z_2,\ Z_2 = bz_2 + z_3, \ldots, Z_{t-1} = bz_{t-1} + z_t,\ Z_t = bz_t. \quad (21)$$

Poslední z těchto vztahů jest přepis rovnice $(\Delta - b)^t\, h_1(\Delta)\, y_1 = 0$, jiź lze psáti patrně ve tvaru

$$\Delta\, (\Delta - b)^{t-1}\, h_1(\Delta)\, y_1 - b\, (\Delta - b)^{t-1}\, h_1(\Delta)\, y_1 = 0.$$

Jsou-li nulové body polynomu $g(\lambda)$ vesměs v tělese $K$, rozpadají se vztahy (18) vesměs ve vztahy tvaru (21); při tom jsou $z_1, z_2, \ldots, z_s$ lineární formy (na sobě nezávislé) proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Soustav tvaru (21) bude pak tolik, kolik jest nulových bodů mnohočlenu $g(\lambda)$ mezi sebou různých.

Takovýto rozpad základních vztahů (1) v soustavy vztahové tvaru (21) nastane ovšem i tenkráte, když k tělesu $K$ adjungujeme nulové body mnohočlenu $g(\lambda)$ (který jsme ve III také značili $g_0(\lambda)$). Soustava (21) se obyčejně pak nazývá **elementární dělitel** soustavy (1). Číslo $b$ sluje v následujícím multiplikátor elementárního dělitele (21); $t$ stupeň el. děl.; $z_t$ lineární to forma proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ základ elem. dělitele. Pojmenování tato zavádím tu pouze z té příčiny, abych mohl, pokud možno stručně, uvésti ještě několik vět, které na základě úvah předcházejících téměř bezprostředně vyplývají. **Těleso číselné**, jehož prvky nyní budu označovati písmeny $a, b, c, d$, nechť jest v následujícím těleso $K$ rozšířené adjunkcí nulových bodů polynomu $g_0(\lambda)$.

Chci totiž vedle vztahů (1), k nimž patří matice $A$ a operace $\Delta$, uvažovati vztahy, k nimž patří matice $A_1$, kde

$$A_1 = a_1 A^{s-1} + a_2 A^{s-2} + \ldots + a_s A^0.$$

Vztahům těmto můžeme užívajíce označení odstavce I užitého na př. v rovnici (1') dáti tvar

$$[X'] = A_1[x], \tag{22}$$

ponechávajíce pro základní proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tytéž znaky jako jsou v rovnicích (1). Pro proměnné ze základních odvozené na základě vztahů (22) — kteréžto proměnné nejsou na sobě nezávislé, není-li $A_1$ hodnosti $n$-té — užili jsme označení $X'_i$, $i = 1, 2; \ldots, n$, abychom je i označením rozlišili od proměnných $X_i$ vyplývajících z (1).

Operace $\Delta_1$ příslušná k $A_1$ jest v důsledku (7') z I

$$\Delta_1 = a_1\Delta^{s-1} + a_2\Delta^{s-2} + \ldots + a_s;$$

neboť jest

$$[\Delta_1 x] = [(a_1\Delta^{s-1} + a_2\Delta^{s-2} + \ldots + a_s)x] = a_1[\Delta^{s-1}x] + a_2[\Delta^{s-2}x] + \\ + \ldots + a_s[x] = (a_1\Delta^{s-1} + a_2\Delta^{s-2} + \ldots + a_s)[x] = A_1[x].$$

Užívati budu v následujícím označení

$$a_1\lambda^{s-1} + a_2\lambda^{s-2} + \ldots + a_s\lambda^0 = \psi(\lambda);$$

pak jest $A_1 = \psi(A)$, $\Delta_1 = \psi(\Delta)$.

Zavedeme nyní místo proměnných $x_i$ proměnné $z_i$ tak, aby se soustava (1) rozpadla v elementární dělitele tvaru (21), a budeme vyšetřovat, jak závisí na $z_i$ jim na základě vztahů (22) přiřazené výrazy $Z'_i$. Jest nejprve

$$Z'_i = \Delta_1 z_i. \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dále jest v důsledku toho, jak byly definovány $z_1, z_2, \ldots, z_t$ vyskytující se v elementárním děliteli (21)

$$(\Delta - b)\, z_1 = z_2,\ (\Delta - b)\, z_2 = (\Delta - b)^2 z_1 = z_3, \ldots, (\Delta - b)^{t-1} z_1 = z_t,$$
$$(\Delta - b)^t z_1 = 0$$

a tedy

$$Z'_1 = \Delta_1 z_1 = \psi(\Delta)\, z_1 =$$
$$= \psi(b)\, z_1 + [\psi(\Delta) - \psi(b)]\, z_1 = \psi(b)\, z_1 + d_2 z_2 + d_3 z_3 + \ldots + d_t z_t,$$

neboť dle známé identity jest

$$\psi(\Delta) - \psi(b) =$$
$$= (\Delta - b)\,\psi'(b) + \frac{1}{2!}(\Delta - b)^2\,\psi''(b) + \frac{1}{3!}(\Delta - b)^3 \,.\, \psi'''(b) + \ldots,$$

kde $\psi'(\lambda), \psi''(\lambda), \ldots$ jsou prvá, druhá, ... derivace polynomu $\psi(\lambda)$; $d_2, d_3, \ldots$ pak se rovnají $\psi'(b), \frac{1}{2}\psi''(b), \ldots$ Obdobné vztahy vyplývají pro $Z'_2, Z'_3, \ldots$, takže vcelku máme tento výsledek

$$
\begin{aligned}
Z'_1 &= \psi(b)\, z_1 + d_2 z_2 + d_3 z_3 + \ldots + d_t z_t, \\
Z'_2 &= \psi(b)\, z_2 + d_2 z_3 + \ldots + d_{t-1} z_t, \\
Z'_3 &= \psi(b)\, z_3 + \ldots + d_{t-2} z_t, \qquad\qquad (23) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z'_t &= \psi(b)\, z_t.
\end{aligned}
$$

Závisí tedy $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_t$ výhradně na $z_1, z_2, \ldots, z_t$ a stejně je tomu tak i u ostatních $z_i$ (a jim příslušných $Z'_i$) v jiných elementárních dělitelech se nacházejících. Označíme-li matici z koeficientů lineárních výrazů na pravé straně rovnic (23) znakem $D$, jest

$$| D - \lambda E | = (-1)^t (\lambda - \psi(b))^t.$$

Jestliže $d_2 = \psi'(b) \neq 0$, jest největší společná míra subdeterminantů stupně $t - 1$ v determinantu $| D - \lambda E |$ rovna 1. V důsledku toho soustava (23), zavedeme-li vhodné lineární formy proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_t$, se dá změniti na tvar (21)*) a jest přiřazen v tomto případě elementárnímu děliteli (21) příslušnému k (1) elementární dělitel téhož stupně, očividně téhož základu $z_t$ a o multiplikátoru $\psi(b)$.

Jestliže však $d_2 = \psi'(b) = 0$, $\psi''(b) \neq 0$ a $t > 1$, jsou dva lineární výrazy a to $z_t$, $z_{t-1}$, pro které jest

$$(\Delta_1 - \psi(b))\, z_t = 0, \quad (\Delta_1 - \psi(b))\, z_{t-1} = 0$$

a tedy

$$Z'_t = \psi(b)\, z_t, \quad Z'_{t-1} = \psi(b)\, z_{t-1}$$

a jsou tudíž $z_{t-1}$, $z_t$ dva základy pro elementární dělitele soustavy (23) a snadným vyšetřením matice $D - \lambda E$ zjistíme, že soustava (23) se rozpadá ve dva elementární dělitele oba o multiplikátoru $\psi(b)$, o stupních $\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{2}t$ resp. $\frac{1}{2}(t + 1)$, $\frac{1}{2}(t - 1)$, je-li $t$ sudé resp. liché, a o vytknutých základech.

Obdobné výsledky jsou platny pro případ $d_2 = 0$, $d_3 = 0$, $d_4 \neq 0$ a $t > 2$. Tu lze převésti soustavu (23) ve tři elementární dělitele, vesměs o multiplikátoru $\psi(b)$, o základech $z_t$, $z_{t-1}$, $z_{t-2}$ atd.


## Resumé.

Autor podává převedení vztahů (1) na racionální kanonický tvar. Při tom užívá s výhodou operace $\Delta$ definované v rovnici (5):


*) Je-li na př. $t = 4$, stačí na př., je-li $d_2 \neq 0$, voliti místo $z_1, z_2, z_3, z_4$ lineární formy $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4}$ dané na př. vztahy

$$d_2^3 \overline{z_1} = z_1, \quad d_2^3 \overline{z_2} = d_2 z_2 + d_3 z_3 + d_4 z_4, \quad d_2^2 \overline{z_3} = d_2 z_3 + 2 d_3 z_4, \quad \overline{z_4} = z_4,$$

abychom místo (23) získali tvar

$$\overline{Z'}_1 = \psi(b)\, \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{Z'}_2 = \psi(b)\, \overline{z}_2 + \overline{z}_3, \quad \overline{Z'}_3 = \psi(b)\, \overline{z}_3 + \overline{z}_4, \quad \overline{Z'}_4 = \psi(b)\, \overline{z}_4$$

shodný s tvarem (21), normálním to tvarem elem. děl. Že jsem volil $t = 4$, činil jsem jenom k vůli úspoře místa a větší přehlednosti; pro obecné $t$ výpočet příslušných výrazů naznačiti nečiní pražádné obtíže.

## Rationale kanonische Form einer linearen Substitution.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Der Verfasser gibt in der Abhandlung eine Überführung der linearen Substitution (1) in ihre rationale kanonische Form an. Er benützt dazu im wesentlichen den Weg, den L. E. Dickson in seinem Buche „Modern Algebraic Theories“ angegeben hat. (Siehe S. 80 der deutschen Übersetzung des Buches, die unter dem Titel: „Höhere Algebra“ erschienen ist.) Er führt dabei den Operator $\Delta$ ein, der durch (5) definiert ist. Die Ableitung der kanonischen Form aus der ursprünglichen Substitution gewinnt dadurch sehr an Einfachheit, Verständlichkeit und rechnerischer Schönheit.

*R.*