František Velísek

Proudění elektřiny ve vrchlíku kulovém omezeném sférickou ellipsou I.

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 4, 404--414

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121977`

Proudění elektřiny ve vrchlíku kulovém omezeném sférickou ellipsou.

Napsal Dr. **Frant. Velísek**, assistent čes. techniky v Praze.

Veďeme-li konstantní elektrický proud vodivou plochou, rozdělí se elektřina na ní určitým způsobem, a rozdělení to po jistém čase bude stationárním. Stav proudění možno pro každé místo vodivé plochy udati, známe-li na onom místě elektrický potenciál. K tomu cíli použijeme věty Kirchhoffovy (Poggendorff's Annalen für Physik und Chemie, sv. 64.): Je-li U na jistém místě plochy panující potenciál, ds lineární element oblouku, n jeho normála, ϱ vodivost, ε limitní tloušťka plochy, proudí v čase dt průřezem $\varepsilon\, ds$ množství elektřiny.

$$M = -\varrho\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} ds\, dt. \tag{1}$$

Vyjádříme zisk na elektrickém množství v plošném elementu vrchlíku v čase dt, jsou-li místa přítoku $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_4$. K tomu cíli zavedeme souřadnice, jimiž se vrchlík omezený sférickou ellipsou dělí na infinitesimální pravoúhelníky.

Sférická ellipsa dána jest průsekem koule jedničkové

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{2}$$

s koncentrickým elliptickým kuželem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \text{kde } a > b.$$

Roviny souřadnicové jsou hlavními rovinami kužele. Kuželosečka sestává ze 2 kongruentních sférických ellips, nad a pod rovinou (xy), o elliptických středech Z a Z' na ose z, a hyperbolických středech X, X' a Y, Y' na druhých 2 osách. Poněvadž

$$\frac{a^2}{a^2 + c^2} < 1, \quad \frac{c^2}{a^2 + c^2} < 1,$$

a součet obou výrazů rovná se 1, položíme

$$\frac{a^2}{a^2 + c^2} = \sin^2 \alpha, \quad \frac{c^2}{a^2 + c^2} = \cos^2 \alpha,$$

tedy

$$\frac{a}{c} = tg\, \alpha, \; 0^0 < \alpha < 90^0.$$

Dále klademe:

$$\frac{b^2}{a^2+c^2} = sin^2 \alpha - sin^2 \alpha_1, \quad \text{kde } \alpha > \alpha_1.$$

Z toho plyne:

$$sin^2 \alpha_1 = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}, \quad cos^2 \alpha_1 = \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}, \quad tg\, \alpha_1 = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}.$$

Rovnice kužele dá se pak psáti:

$$\frac{x^2}{sin^2 \alpha} + \frac{y^2}{sin^2 \alpha - sin^2 \alpha_1} - \frac{z^2}{cos^2 \alpha} = 0. \tag{3}$$

Eliminací y z rovnic 2) a 3) obdržíme projekci kuželosečky na rovinu (xz)

$$\left(\frac{sin\, \alpha_1}{sin\, \alpha}\right)^2 x^2 + \left(\frac{cos\, \alpha_1}{cos\, \alpha}\right)^2 z^2 = 1.$$

Za daných předpokladů možno klásti

$$sin\, \varphi = \frac{sin\, \alpha_1}{sin\, \alpha} x, \quad \text{a tedy } \frac{cos\, \alpha_1}{cos\, \alpha} z = cos\, \varphi.$$

Pro souřadnice sférické kuželosečky plynou pak výrazy:

$$x = \frac{sin\, \alpha}{sin\, \alpha_1} sin\, \varphi,$$

$$y = \frac{1}{sin\, \alpha_1\, cos\, \alpha_1} \sqrt{sin^2 \alpha - sin^2 \alpha_1} \sqrt{sin^2 \alpha_1 - sin^2 \varphi},$$

$$z = \frac{cos\, \alpha}{cos\, \alpha_1} cos\, \varphi. \tag{4}$$

Musí tedy býti

$$sin^2 \varphi < sin^2 \alpha_1.$$

Rovnice reelních, v rovině (xz) ležících fokálních přímek kužele jsou:

$$x = \pm z\, tg\, \alpha_1$$

a tyto sekou kouli 2) ve 4 ohniscích sférické kuželosečky

$$x = \pm sin\, \alpha_1, \quad y = 0, \quad z = \pm cos\, \alpha_1,$$

t. j. α_1 jest excentricita sférické kuželosečky.

Zavedeme funkce elliptické v označení Gudermannově. Za modul k volíme

$$k = sin\, \alpha_1, \quad k' = cos\, \alpha_1.$$

$$\left.\begin{aligned} sin\, \varphi = k\, snu, \quad cos\, \varphi = \sqrt{1 - k^2 sn^2 u} = dnu, \\ \sqrt{sin^2 \alpha_1 - sin^2 \varphi} = k\, cnu. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Při témž modulu klademe

$$sin\,\alpha = k\,snt, \quad cos\,\alpha = dnt, \quad \sqrt{sin^2\alpha - sin^2\alpha_1} = i\,k\,cnt. \quad (6)$$

Úhel α pohybuje se v intervallu $\alpha_1 \ldots \frac{\pi}{2}$. Pro $\alpha = \alpha_1$ jest $k\,snt = k$, tedy $t = K$. Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jest $snt = \frac{1}{k}$, $t = K + i\,K'$. Leží tedy t mezi K a $K + i\,K'$.

Rovnice sférické kuželosečky jsou tudíž jako funkce u dány:

$$x = k\,snt\,snu, \quad y = \frac{i\,k}{k'}\,cnt\,cnu, \quad z = \frac{1}{k'}\,dnt\,dnu, \quad (7)$$

kde pro křivku nad rovinou (xy) jest u v mezích $o \ldots 4\,K$.

Myslíme-li si v rovnicích 7) u konstantním v mezích o a K a t proměnným, obdržíme sférické kuželosečky o středech na ose t. Obě kuželosečky $u = konst$, $t = konst$ jsou konfokálními a sekou se kolmo.

Poněvadž

$$\frac{\partial x}{\partial u} = k\,snt\;cnu\,dnu, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\,i\,\frac{k}{k'}\,cnt\,snu\,dnu,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\,\frac{k^2}{k'}\,dnt\,snu\,cnu,$$

a podobně pro t obdržíme pro lineární element výraz:

$$ds^2 = k^2\,(sn^2 t - sn^2 u)\,(du^2 - dt^2).$$

Klademe-li

$$t = K + i\,v, \quad dt = i\,dv,$$

$$ds^2 = k^2\,\bigl(sn^2\,(K + i\,v) - sn^2 u\bigr)\,(du^2 + dv^2)$$

$$= k^2 \left(\frac{cn^2\,iv}{dn^2\,iv} - sn^2 u\right)(du^2 + dv^2).$$

Místo $\frac{cniv}{dniv}$ možno pak psáti $\frac{1}{dn\,(v,\,k')}$.

Budiž element plošný $ABCD$ omezen soustavou křivek u, $u + du$, v, $v + dv$. Dle vzorce 1) jde tedy stranou AB množství elektřiny

$$-\,\varrho\varepsilon\,\frac{\partial U}{\overline{AD}}\,.\,\overline{AB}\,.\,dt = -\,\varrho\varepsilon\,\frac{\partial U}{\partial v}\,\frac{k\sqrt{sn^2\,(K + iv) - sn^2\,u}}{k\sqrt{sn^2\,(K + iv) - sn^2\,u}}\,du\,dt,$$

tedy

$$-\varrho\varepsilon\frac{\partial U}{\partial v}\,du\,dt.$$

Abychom obdrželi množství jdoucí dále $\overline{CD}$, položíme $v+dv$ místo dv. Použijeme-li rozvoje Taylorova a omezíme se na členy druhého řádu, obdržíme:

$$M'=-\varrho\varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{dv}{1!}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}+\ldots\right)du\,dt.$$

Rozdíl obou množství

$$\varrho\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\,du\,dv\,dt.$$

Zcela obdobně plyne pro rozdíl elektřiny jdoucí v čase dt mezi $\overline{AD}$ a $\overline{BC}$

$$\varrho\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\,du\,dv\,dt.$$

Nabude tudíž $ABCD$ v čase dt množství elektřiny

$$\varrho\varepsilon\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right)du\,dv\,dt.$$

Po jistém čase nastoupí stav stacionární, což vyžaduje, aby

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}=0.$$

Platí tudíž pro potenciál podmínka táž, jako pro desku rovinnou, jsou-li u, v pravoúhlé souřadnice. Známe-li tedy možné proudění elektřiny v rovině, a určíme na ploše křivky, které odpovídají křivkám stejného potenciálu a proudokřivkám v rovině, jsou tyto křivkami stejného potenciálu a proudokřivkami pro možné proudění elektřiny na ploše, jinak řečeno, známe-li problém proudění na ploše F, známe jej i pro každou plochu Φ, která jest s F v nejmenších částech podobnou, předpokládaje, že elektrody obou ploch jsou body odpovídající.

Má pak U vyhovovati těmto podmínkám. Pro stacionární stav pro všechny plošné elementy mimo elektrody musí býti

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}=0.$$

Pro každý element obsahující elektrodu musí se vzrůst množství elektřiny rovnati intensitě I_n příslušné elektrody α_n

$$+ \varrho \varepsilon \, dt \int\int_{\alpha_n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right) du \, dv,$$

kde integrace se vztahuje na všechny elementy plošné v α_n. Předpokládáme-li α_n malým, možno pokládati $\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}$ za konstantní, a pak integrací obdržíme plochu elektrody α_n. Položíme-li pak

$$\frac{I_k}{\varrho \varepsilon \alpha_k} = m_n,$$

jest

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} = m_n.$$

Pro omezení plochy samozřejmě platí

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$

Dále musí býti U funkcí jednoznačnou a spojitou, a algebraický součet intensit $\Sigma^n I_n = 0$. Podmínkami těmi jest U až na přičetnou konstantu určeno.

Pro řešení předloženého úkolu dlužno tedy vrchlík omezený sférickou ellipsou konformně zobraziti na plochu rovinnou, v níž proudění elektřiny jest známo. Pro kružnici podal řešení Kirchhoff. Použijeme však řešení pro kladnou půlrovinu ζ. Potenciál této jest dán reelní částí výrazu

$$V = U + iV = \Sigma I_n \, lg (\zeta - \zeta_n)(\zeta - \zeta'_n),$$

kde ζ_n značí udavatele elektrody, ζ'_n číslo konjugované. U, V splňují rovnici

$$\Delta W = 0,$$

na ose reelní ξ jest

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

V bodech ζ_n jest funkce logarithmicky nekonečnou.

Klademe-li

$$u = x, \qquad v = y,$$

zobrazíme vrchlík konformně do roviny. Meze pro u jsou $0 \dots 4K$, pro v $0 \dots v_0 < K'$. Položme krátce $4K = 2a$, $v_0 = 2b$ a pošiňme pravoúhelník z těchto délek sestrojený o délku a na ose x. Body pravoúhelníku odpovídají bodu vrchlíku. Dle Riemannovy theorie zobrazovací zobrazí se vnitřek pravoúhelníku daného vrcholy a, $a + 2ib$, $-a + 2ib$, $-a$ na positivní $(+\eta)$ půlrovinu ζ výrazem

$$x + iy = z = C\int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + C',$$

kde C, C' jsou konstanty; při tom rohům pravoúhelníka odpovídají body reelní osy 1, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, -1.

Určíme-li konstanty podmínkami

$$a = C\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + C' = CK + C',$$

$$-a = -CK + C', \text{ pak tedy } C' = o,\ a = CK,$$

kde K, K' značí totální integrály při modulu k (obecně různém od dřívějšího významu). Dále máme

$$a + 2bi = C(K + iK'),$$

tedy pro poměr period

$$\frac{K'}{2K} = \frac{b}{a}, \text{ a pro Jacobiho veličinu } q$$

$$q = e^{-\frac{2\pi b}{a}}.$$

Obdržíme tudíž jako funkce zobrazovací výraz

$$\frac{Kz}{a} = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \text{ neb } \zeta = sn\frac{zK}{a}.$$

Týž výraz obdržíme, použijeme-li známého zobrazení půlroviny a pravoúhelníku na kružnici jedničkovou w.

Pravoúhelník zobrazí se na kruh relací

$$w = \frac{1 + i\sqrt{k}\, sn\frac{zK}{a}}{i + \sqrt{k}\, sn\frac{zK}{a}},$$

při čemž vrcholům pravoúhelníku odpovídají body kružnice určené relací

$$\frac{dw}{dz}=0,\quad \text{t. j.}\quad cn\frac{Kz}{a}\,dn\frac{Kz}{a}=0,$$

tedy

$$sn\frac{Kz}{a}=\pm 1,\ \pm\frac{1}{k};$$

z čehož

$$\omega=\frac{1\pm i\sqrt{k}}{i\pm\sqrt{k}},\ \frac{\sqrt{k}\pm i}{i\sqrt{k}\pm 1}.$$

Positivní půlrovina ζ zobrazí se na týž kruh výrazem

$$\zeta=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{w+i}{iw+1}$$

určeným tak, že bodům kružnice pro $\pm a$, $\pm a+2ib$ odpovídají body reelní osy ± 1, $\pm\frac{1}{k}$.

Dosadíme-li za w, obdržíme zobrazovací funkci pro pravoúhelník na positivní půlrovinu

$$\zeta=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{i+\dfrac{1+i\sqrt{k}\,sn\frac{zK}{a}}{i+\sqrt{k}\,sn\frac{zK}{a}}}{1+i\dfrac{1+i\sqrt{k}\,sn\frac{zK}{a}}{i+\sqrt{k}\,sn\frac{zK}{a}}}=sn\frac{zK}{a}.$$

Funkce W dána jest pak tvarem

$$W=\Sigma J_n\,lg\left(sn\frac{Kz}{a}-sn\frac{Kz_n}{a}\right)\left(sn\frac{Kz}{a}-sn\frac{Kz'_n}{a}\right).$$

Pro $\frac{K'}{K}=2$ obdržíme čtverec, tedy $q=e^{-2\pi}$, $k=3-\sqrt{8}$.

Přejde-li kužel v kruhový, t. j. $a=b$, $k=0$, $k'=1$, pravoúhelník se prodlouží směrem osy y do nekonečna, funkce dvojperiodické se změní ve funkce o jedné periodě $K = 2\pi$ $(K' = \infty)$, $sn\,\frac{Kz}{a}$ přejde tedy v $sin\,z$. Odpovídající funkcí

$$W = \Sigma J_n\, lg\,(sin\,z - sin\,z_n)\,(sin\,z - sin\,z'_n)$$

dáno rozdělení elektřiny v nekonečném pásu.

Souřadnice plochy kulové dány jsou pak výrazy

$$x = sin\,\alpha\; sin\,\varphi, \quad y = sin\,\alpha\; cos\,\varphi, \quad z = cos\,\alpha,$$

tedy kuželosečky přejdou v rovnoběžníky α a meridiany φ. Meze pro φ od $o \ldots 2\pi$, pro α od $0 \ldots \alpha_0$. Element lineární koule jest

$$ds^2 = d\alpha^2 + sin^2\alpha\, d\varphi^2 = sin^2\alpha \left[d\varphi^2 + \left(dl\,tg\frac{\alpha}{2}\right)^2\right].$$

Položíme-li

$$\varphi = \xi, \quad l\,tg\frac{\alpha}{2} = \eta,$$

obdržíme zobrazení na pravoúhelník $z = \xi + i\eta$, při čemž ξ jest v mezích $0 \ldots 2\pi$, η v mezích $-\infty \ldots l\,tg\frac{\alpha}{2}$. K vůli jednoduchosti pošineme η o $lg\,tg\frac{\alpha}{2}$, tedy

$$z = \varphi + i\,lg\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\alpha_0}{2}},$$

kde η jest v mezích $-\infty \ldots 0$. Pak výraz pro W možno transformovati do jednoduchého tvaru. Použijeme-li

$$(sin\,z - sin\,z_n)\,(sin\,z - sin\,z'_n)$$
$$= 4\,sin\frac{z - z_n}{2}\,cos\frac{z + z_n}{2}\,sin\frac{z - z'_n}{2}\,cos\frac{z + z'_n}{2},$$

obdržíme snadno z prvních dvou součinitelů

$$2\left[sin\frac{\varphi - \varphi_n}{2}\,cos\frac{i(\eta - \eta_n)}{2} + cos\frac{\varphi - \varphi_n}{2}\,sin\frac{i(\eta - \eta_n)}{2}\right]$$
$$\times\left[cos\frac{\varphi + \varphi_n}{2}\,cos\frac{i(\eta + \eta_n)}{2} - sin\frac{\varphi + \varphi_n}{2}\,sin\frac{i(\eta + \eta_n)}{2}\right].$$

Vyjádříme-li funkce goniometrické pomocí exponenciely, a položíme krátce

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \lambda,\quad tg\,\frac{\alpha_0}{2} = \lambda_0,$$

obdržíme jako reelní část součinu výraz

$$lg\left(\frac{\lambda}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda} - 2\cos(\varphi - \varphi_n)\right)\left(\frac{\lambda\lambda_n}{\lambda_0^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda\lambda_n} + 2\cos(\varphi + \varphi_n)\right)$$
$$\left(\frac{\lambda\lambda_n}{\lambda_0^3} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda\lambda_n} - 2\cos(\varphi - \varphi_n)\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda} + 2\cos(\varphi + \varphi_n)\right),$$

nebo použijeme-li $\Sigma J_n = 0$

$$U = \Sigma J_n\, lg\,(\lambda^2 + \lambda_n^2 - 2\lambda\lambda_n \cos(\varphi - \varphi_n))$$
$$\left(\frac{\lambda^2\lambda_n^2}{\lambda_0^2} + \lambda_0^2 + 2\lambda\lambda_n \cos(\varphi + \varphi_n)\right)\left(\frac{\lambda^2\lambda_n^2}{\lambda_0^2} + \lambda_0^2 - 2\lambda\lambda_n \cos(\varphi - \varphi_n)\right)$$
$$(\lambda^2 + \lambda_n^2 + 2\lambda\lambda_n \cos(\varphi + \varphi_n)).$$

Z výrazu pro U snadno seznáme, že jak členy první a třetí, tak druhý se čtvrtým splňují podmínky pro potenciál. Máme tudíž:

$$U = \Sigma J_n\, lg\,(\lambda^2 + \lambda_n^2 - 2\lambda\lambda_n \cos(\varphi - \varphi_n))$$
$$\times\left(\frac{\lambda^2\lambda_n^2}{\lambda_0^2} + \lambda_0^2 - 2\lambda\lambda_n \cos(\varphi - \varphi_n)\right).$$

Klademe-li $\lambda_0^2 = \lambda_n \lambda'_n$, můžeme při použití

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = tg^2\,\frac{\alpha}{2},\quad \cos(\varphi - \varphi_n) = \frac{xx_n + yy_n}{\sin\alpha\,\sin\alpha_n}$$

psáti

$$U = \Sigma J_n\, lg\left[\frac{1-z}{1+z} + \frac{1-z_n}{1+z_n} - 2\,\frac{xx_n + yy_n}{(1+z)(1+z_n)}\right]$$
$$\times\left[\frac{1-z}{1+z} + \frac{1-z'_n}{1+z'_n} - 2\,\frac{xx'_n + yy'_n}{(1+z)(1+z')}\right]$$
$$= \Sigma J_n\, lg\, 4\,\frac{1 - xx_n - yy_n - zz_n}{(1+z)(1+z_n)}\,\frac{1 - xx'_n - yy'_n - zz'_n}{(1+z)(1+z'_n)}.$$

Poněvadž $xx_n + yy_n + zz_n$, $xx'_n + yy'_n + zz'_n$ značí kosiny vzdáleností ψ_n, ψ'_n bodů (x, y, z), (x_n, y_n, z_n) a (x, y, z), (x'_n, y'_n, z'_n),

$$U = \Sigma J_n lg \frac{1 - cos\,\psi_n}{(1+z)(1+z_n)} \cdot \frac{1 - cos\,\psi'_n}{(1+z)(1+z'_n)}$$

$$= \Sigma J_n lg \frac{sin \frac{\psi_n}{2}\, sin \frac{\psi'_n}{2}}{cos^2 \frac{\alpha}{2}} + konst.$$

neb

$$U\ \Sigma J_n lg\, sin \frac{\psi_n}{2}\, sin \frac{\psi'_n}{2} + konst.$$

Rovnice pro křivky stejného potenciálu v rovině změní se při přechodu na kouli jen tak dalece, že radius vektor v rovině nahradí se sinem poloviční úhlové vzdálenosti na kouli.

Proudokřivky skýtá imaginární část funkce W.

Pro $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ obdržíme proudění v polokouli. Zmizí-li křivka vrchlík omezující, odpadá ve výrazu pro potenciál zřejmě člen druhý, který působí $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, tedy

$$U = \Sigma J_n lg\, (\lambda^2 + \lambda_n^2 - 2\lambda\lambda_n\, cos\,(\varphi - \varphi_n))^{\frac{1}{2}},$$

neb

$$U = \Sigma J_n lg\, sin \frac{\psi}{2} + konst.$$

V této formě podal Boltzmann výraz pro potenciál.

Rovnice pro proudokřivky v rovině můžeme direktně přenésti na kouli, užíváme-li, že průvodič jdoucí bodem uvažovaným z, elektrodou z_n a nekonečně vzdáleným bodem roviny se změní v kruh na kouli jdoucí bodem (λ, φ), (λ_n, φ_n) a pólem koule P, a že osa ξ roviny se transformuje v kružnici $x^2 + z^2 = 1$ v rovině (x, z). Poněvadž dle konformního zobrazení panuje podobnost v nejmenších částech, tvoří kružnice spolu týž úhel jako odpovídající čáry v rovině. Označíme-li tyto úhly ϑ, jest rovnice proudokřivek

$$\Sigma J_n\, \vartheta = konst.$$

Jednodušší křivky obdržíme pro $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots \varepsilon_n$, a zvláště když odpovídající elektrody v rovině tak seřadíme, že tvoří vrcholy 2 pravidelných polygonů, které mají společný střed v počátku a vzhledem na vzájemnou polohu libovolně mohou býti stočeny. Pak tvoří elektrody na kouli rovněž vrcholy 2 pravidelných polygonů, ležících na 2 rovnoběžnících koule. Tvar křivek těch pozná se snadno přímým převodem sítí z roviny na kouli.

Interpretujeme-li souřadnice u, v na kouli jako elliptické souřadnice ϑ, η komplexní roviny $z' = \vartheta + i\eta$, jsou dány pravoúhlé souřadnice roviny komplexní $z = x + iy$ relacemi

$$x = c \sin \vartheta \cos i\eta, \quad y = c \cos \vartheta \sin i\eta,$$

tedy

$$x + iy = e \sin z'.$$

Pošineme-li a transformujeme k vůli jednoduchosti pravoúhelník o stranách $u = 4K_1$, $v = v_0$, tak že střed jeho jest v počátku a strany $2K$, K' a klademe $z' = \frac{2K}{\pi} z_1$, pak leží x_1 v mezích $\pm \frac{\pi}{2}$, y_1 v mezích $\pm \frac{\pi K'}{4K}$.

Pomocí relace

$$x + iy = c \sin z_1$$

pravoúhelníku v rovině z_1 o vrcholech

$$\pm \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi K'}{4K}$$

odpovídá v rovině z ellipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde

$$a = c \cos i \frac{\pi K'}{4K}, \quad b = \frac{c}{i} \sin i \frac{\pi K'}{4K}, \quad a^2 - b^2 = c^2,$$

opatřená dvěma řezy přímočarými od vrcholů na hlavní ose k ohniskům. Relací

$$X + iY = w = \sqrt{k}\, sn\, z' = \sqrt{k}\, sn \frac{2K}{\pi} z_1$$

zobrazuje se týž pravoúhelník z_1 na kruh poloměru 1 a se středem v počátku. Kruh opatřen jest dvěma řezy na ose reelní délky $1 - \sqrt{k}$ od obvodu do vnitř kruhu. Pomocí pravoúhelníku jsou tedy vnitřky kruhu a ellipsy na sebe konformně zobrazeny; řezy si odpovídají, mohou tedy z omezení obrazců býti vynechány.

(Dokončení.)