Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Ladislav Štěpánek

Skládání konečných současných rotací pevného tělesa. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 4, 379--403

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121975`

10. **F. Klein**: Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen 5. u. 6. Grades. Journal für die reine u. angewandte Mathematik 129. Mathem. Annalen 61.

11. **L. K. Lachtin**: Differencialnaja rezolventa někotorago vida uravněnij 6toj stepeni. Matematičeskij sbornik 20.

12. **L. K. Lachtin**: Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung 6^{ten} Grades mit einer Gruppe 360^{ter} Ordnung. Math. Annalen 51.

13. **H. Maschke**: Aufstellung des vollen Formensystems eines quaternären Gruppe von 51840 Substitutionen. Math. Annalen 33.

14. **H. Maschke**: Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind. Mathem. Annalen 51.

15. **H. Valentiner**: De endelige Transformations-Gruppers Theorie (Avec un résumé en français.) Det kongelige danske Videnskabernes. Selskabs Skrifter VI. Raeke 5. Bind. Köbenhavn 1889.

16. **H. Weber**: Lehrbuch der Algebra. II. Aufl.

17. **A. Wiman**: Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen. Math. Annalen 47.

18. **A. Wiman**: Endliche Gruppen von linearen Substitutionen. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I. 1.

Skládání konečných současných rotací pevného tělesa.

Podává Dr. **Ladislav Stjepanek**, prof. reálného gymnasia a soukr. docent na universitě v Záhřebě.

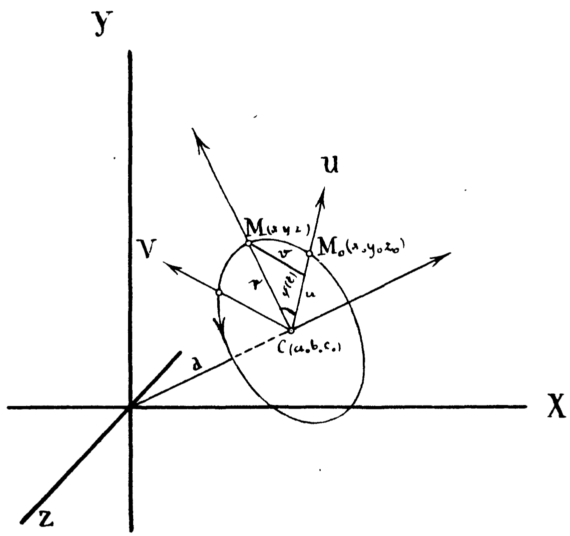
Skládání úhlových rychlostí a nekonečně malých rotací, jest již dávno známo. Naskýtá se však dále maně otázka, jak řešiti úlohu *skládání konečných současných rotací.* Tato úloha jest zde obecně tak dalece řešena, že jsou odvozeny differenciální rovnice pro pohyb libovolného bodu pevného tělesa, jež se má vlivem libovolných rotací pohybovati. Při applikaci těchto differenciálních rovnic na zvláštní případy objeví se ovšem též některé známé věty, o nichž zde pojednáno jen pro úplnost.

I. Rovnice pohybové.

K řešení naší úlohy, najíti *výsledek konečných současných rotací* pevného tělesa, stačí nejprve nalézti pohybové rovnice libovolného bodu $M(x_0, y_0, z_0)$ tělesa, jež kol dané osy rotuje.

Osou rotační samotnou není ještě rotace úplně stanovena; třeba ještě znáti zákon, dle něhož těleso rotuje, t. j. třeba znáti v každém čase oblouk otočení. Tento oblouk jest funkcí času, tedy funkcí $\varphi(t)$. Předpokládáme, že $\varphi(o) = 0$, t. j. že rotace začíná v čase $t = 0$.

Počátek souřadnic prozatím položíme do vlastní osy rotační. Směr této osy v prostoru jest určen směrovými kosinusy l, m, n. Pohlížíme-li tímto směrem podél osy na rotaci, nechť



Obr. 1.

jest ve směru ručiček hodinových. Dráha bodu (x_0, y_0, z_0) následkem rotace jest kružnice v rovině položené bodem kolmo k ose. Střed této kružnice, $C(a_0, b_0, c_0)$, leží na ose. Souřadnice našeho bodu, pohybujícího se na této kružnici, máme vyjádřiti jakožto funkce času t.

Souřadnice tohoto bodu vyjádříme si nejprve vzhledem ku dvěma osám u a v. Osa u (obr. 1.) prochází počáteční polohou našeho bodu, totiž bodem (x_0, y_0, z_0) na kružnici, osa v jest kolmá k ose u a má takový směr, že rotace jde nejkratší cestou od kladného směru osy u ku kladnému směru osy v. Obě osy protínají osu rotační kolmo ve středu kružnice. Vzdálenost od osy rotační pro bod (x, y, z), pro nějž hledáme rovnice pohybové, rovná se poloměru r kružnice, a $\varphi(t)$ jest, jak řečeno, obloukem úhlu otočení M_0CM. Tento oblouk nazveme *obloukovou drahou*, a jeho differenciální kvocient dle času *obloukovou rychlostí*. Z obrazu patrno, že

$$u = r\cos\varphi(t), \quad v = r\sin\varphi(t). \tag{1}$$

Dále máme:

$$\begin{aligned} r\cos(r/X) &= u\cos(u/X) + v\cos(v/X), \\ (x - a_0) &= u\cos(u/X) + v\cos(v/X), \\ \text{stejně}\quad (y - b_0) &= u\cos(u/Y) + v\cos(v/Y), \\ (z - c_0) &= u\cos(u/Z) + v\cos(v/Z). \end{aligned} \tag{2}$$

Směrové kosinusy osy u jsou:

$$\cos(u/X) = \frac{x_0 - a_0}{r}, \quad \cos(u/Y) = \frac{y_0 - b_0}{r}, \quad \cos(u/Z) = \frac{z_0 - c_0}{r}. \tag{3}$$

Směrové kosinusy osy v musí splňovati tyto tři podmínky:

$$l\cos(v/X) + m\cos(v/Y) + n\cos(v/Z) = 0,$$
$$(x_0 - a_0)\cos(v/X) + (y_0 - b_0)\cos(v/Y) + (z_0 - c_0)\cos(v/Z) = 0,$$
$$\cos^2(v/X) + \cos^2(v/Y) + \cos^2(v/Z) = 1,$$

ježto osa v stojí kolmo na ose rotační a na ose u.

Tyto tři rovnice dají tyto tři hodnoty pro hledané směrové kosinusy:

$$\cos(v/X) = \frac{m(z_0 - c_0) - n(y_0 - b_0)}{r},$$
$$\cos(v/Y) = \frac{n(x_0 - a_0) - l(z_0 - c_0)}{r},$$
$$\cos(v/Z) = \frac{l(y_0 - b_0) - m(x_0 - a_0)}{r}.$$

Platí však

$$a_0 = ld, \quad b_0 = md, \quad c_0 = nd, \tag{4}$$

kdež d značí vzdálenost středu kružnice od počátku souřadnic; jest tedy:

$$\cos(v/X) = \frac{mz_0 - ny_0}{r}, \quad \cos(v/Y) = \frac{nx_0 - lz_0}{r},$$
$$\cos(v/Z) = \frac{ly_0 - mx_0}{r}. \tag{5}$$

Dosadíme-li nyní hodnoty z (1), (3) a (5) do rovnic (2), obdržíme:

$$\begin{aligned} x - a_0 &= (x_0 - a_0)\, cos\, \varphi(t) + (mz_0 - ny_0)\, sin\, \varphi(t), \\ y - b_0 &= (y_0 - b_0)\, cos\, \varphi(t) + (nx_0 - lz_0)\, sin\, \varphi(t), \\ z - c_0 &= (z_0 - c_0)\, cos\, \varphi(t) + (ly_0 - mx_0)\, sin\, \varphi(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Rovnice roviny, v níž leží kružnice, zní:

$$lx + my + nz = d,$$

jest tedy:

$$lx_0 + my_0 + nz_0 = d. \tag{7}$$

Jestliže hodnoty ze (4) s použitím této relace do rovnic (6) dosadíme, obdržíme konečně pro bod tělesa následující pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} x = l\,(lx_0 + my_0 + nz_0) &+ [x_0 - l\,(lx_0 + my_0 + nz_0)]\, cos\, \varphi(t) \\ &+ (mz_0 - ly_0)\, sin\, \varphi(t), \\ y = m\,(lx_0 + my_0 + nz_0) &+ [y_0 - m\,(lx_0 + my_0 + nz_0)]\, cos\, \varphi(t) \\ &+ (nx_0 - lz_0)\, sin\, \varphi(t), \\ z = n\,(lx_0 + my_0 + nz_0) &+ [z_0 - n\,(lx_0 + my_0 + nz_0)]\, cos\, \varphi(t) \\ &+ (ly_0 - mx_0)\, sin\, \varphi(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Pro $t = 0$ dávají rovnice $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, jak také má býti, neboť bod nalézá se počátečně v bodu (x_0, y_0, z_0). Neprochází-li osa rotační počátkem souřadnic, třeba soustavu souřadnic tak pošinouti, aby počátek souřadnic padl do některého bodu (a, b, c) osy rotační. Pohybové rovnice pro náš bod tělesa, jehož počáteční poloha jest dána v dřívějším systému souřadnicemi x_0, y_0, z_0, v novém souřadnicemi x_0', y_0', z_0', jsou dle rovnic (8):

$$\begin{aligned} x' = l\,(lx'_0 + my'_0 + nz'_0) &+ [x'_0 - l\,(lx'_0 + my'_0 + nz'_0)]\, cos\, \varphi(t) \\ &+ (mz_0' - ny_0')\, sin\, \varphi(t) \end{aligned}$$

a t. d.

Mezi dřívějšími a novými souřadnicemi platí vztahy:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c,$$

a obdržíme proto následující rovnice:

$$x - a = l\left[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)\right]$$
$$+ \left\{x_0 - a - l\left[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)\right]\right\} \cos\varphi(t)$$
$$+ \left[m(z_0 - c) - n(y_0 - b)\right] \sin\varphi(t),$$
$$y - b = m\left[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)\right]$$
$$+ \left\{y_0 - b - m\left[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)\right]\right\} \cos\varphi(t)$$
$$+ \left[n(x_0 - a) - l(z_0 - c)\right] \sin\varphi(t),$$
$$z - c = n\left[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)\right]$$
$$+ \left\{z_0 - c - n\left[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)\right]\right\} \cos\varphi(t)$$
$$+ \left[l(y_0 - b) - m(x_0 - a)\right] \sin\varphi(t). \qquad (9)$$

To jsou tedy rovnice dráhy, již opisuje náš bod tělesa následkem rotace kol osy, procházející bodem (a, b, c) a mající směrové kosinusy l, m, n.

Pro $t = 0$ obdržíme z těchto rovnic:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

II. Differenciální rovnice dráhy libovolného bodu pevného tělesa, jež se má pohybovati vlivem h libovolných rotací.

Pevné těleso má konati současně h rotací, jimž přísluší obloukové dráhy $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... $\varphi_h(t)$ jakožto oblouky opsané za čas t. Tyto funkce mají splňovati podmínky:

$$\varphi_1(o) = \varphi_2(o) = \ldots = \varphi_h(o) = 0;$$

t. j. všechny rotace počínají v čase $t = 0$.

Příslušné osy rotační jdou body (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_h, b_h, c_h) a mají směrové kosinusy (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), ... (l_h, m_h, n_h).

Pohybové rovnice bodu (x_0, y_0, z_0) našeho tělesa byly by dle rovnic (9):

$$x^{(1)} - a_1 = l_1\left[l_1(x_0 - a_1) + m_1(y_0 - b_1) + n_1(z_0 - c_1)\right]$$
$$+ \left\{x_0 - a_1 - l_1\left[l_1(x_0 - a_1) + m_1(y_0 - b_1)\right.\right.$$
$$\left.\left. + n_1(z_0 - c_1)\right]\right\} \cos\varphi_1(t) + \left[m_1(z_0 - c_1) - n_1(y_0 - b_1)\right] \sin\varphi_1(t)$$

a t. d. (10)

vlivem první rotace samotné,

$$x^{(2)} - a_2 = l_2 [l_2 (x_0 - a_2) + m_2 (y_0 - b_2) + n_2 (z_0 - c_2)]$$
$$+ \{x_0 - a_2 - l_2 [l_2 (x_0 - a_2) + m_2 (y_0 - b_2)$$
$$+ n_2 (z_0 - c_2)]\} \cos \varphi_2(t) + [m_2 (z_0 - c_2) - n_2 (y_0 - b_2)] \sin \varphi_2(t),$$
$$\text{a t. d.} \tag{11}$$

vlivem druhé rotace samotné,

. . . .

$$x^{(h)} - a_h = l_h [l_h (x_0 - a_h) + m_h (y_0 - b_h) + n_h (z_0 - c_h)]$$
$$+ \{x_0 - a_h - l_h [l_h (x_0 - a_h) + m_h (y_0 - b_h) + n_h (z_0 - c_h)]\} \cos \varphi_h(t)$$
$$+ [m_h (z_0 - c_h) - n_h (y_0 - b_h)] \sin \varphi_h (t), \tag{12}$$
$$\text{a t. d.}$$

vlivem $h^{té}$ rotace samotné. Proměnné souřadnice kružnice, jiř by onen bod tělesa vlivem první rotace samotné opsal, označme $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, proměnné souřadnice kružnice, jež by bod opsal vlivem druhé rotace samotné, označme $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $z^{(2)}$ a t. d.

Máme řešiti úlohu, jakou křivku bude bod (x_0, y_0, z_0) tělesa opisovati, pohybuje-li se pod současným vlivem všech h rotací.

Proměnné souřadnice výsledné dráhy bodu (x_0, y_0, z_0) označme x, y, z. V čase t bude se bod nalézati v místě (x, y, z). Od tohoto okamžiku pohyboval by se bod tělesa vlivem první rotace samotné na kružnici, jíž přísluší dle (10) následující rovnice:

$$x^{(1)} - a_1 = l_1 [l_1 (x - a_1) + m_1 (y - b_1) + n_1 (z - c_1)]$$
$$+ \{x - a_1 - l_1 [l_1 (x - a_1) + m_1 (y - b_1) + n_1 (z - c_1)]\}$$
$$\cos [\varphi_1(t') - \varphi_1(t)] + [m_1 (z - c_1) - n_1 (y - b_1)] \sin [\varphi_1(t') - \varphi_1(t)],$$
$$\text{a t. d.} \tag{13}$$

vlivem druhé rotace samotné na kružnici dle (11):

$$x^{(2)} - a_2 = l_2 [l_2 (x - a_2) + m_2 (y - b_2) + n_2 (z - c_2)]$$
$$+ \{x - a_2 - l_2 [l_2 (x - a_2) + m_2 (y - b_2) + n_2 (z - c_2)]\}$$
$$\cos [\varphi_2(t') - \varphi_2(t)] + [m_2 (z - c_2) - n_2 (y - b_2)] \sin [\varphi_2(t') - \varphi_2(t)]$$
$$\text{a t. d.} \tag{14}$$

. . . .

vlivem $h^{té}$ rotace samotné na kružnici dle (12):

$$x^{(h)} - a_h = l_h\,[l_h\,(x - a_h) + m_h\,(y - b_h) + n_h\,(z - c_h)]$$
$$+ \{x - a_h - l_h\,[l_h\,(x - a_h) + m_h\,(y - b_h) + n_h\,(z - c_h)]\}$$
$$\cos\,[\varphi_h(t') - \varphi_h(t)] + [m_h\,(z - c_h) - n_h\,(y - b_h)]\,\sin\,[\varphi_h(t') - \varphi_h(t)],$$
$$\text{a t. d.} \qquad (15)$$

Místo x_0, y_0, z_0 píšeme zde x, y, z, ježto nyní jest (x, y, z) východiskem všech rotačních kruhů. Dráhy obloukové musíme pak od času t počítati, jsou tedy $\varphi_1(t') - \varphi_1(t)$, $\varphi_2(t') - \varphi_2(t)$, ... $\varphi_h(t') - \varphi_h(t)$.

V těchto rovnicích pro $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $z^{(2)}$, ... $x^{(h)}$, $y^{(h)}$, $z^{(h)}$ pokládejme prozatím t' za neodvisle proměnnou a veličiny x, y, z, t za stálé. Má se nalézti závislost x, y, z na t.

Kdybychom zde mohli jednoduše upotřebiti zákon pro skládání pohybů na konečné rotace, měli bychom pro čas t:

$$x - x_0 = (x^{(1)} - x_0) + (x^{(2)} - x_0) + \ldots + (x^{(h)} - x_0),$$

a t. d. pro $y - y_0$ a $z - z_0$.

To však není dovoleno, ježto se tyto kruhové pohyby onoho bodu tělesa během výsledného pohybu stále mění vzhledem ku svým rotačním poloměrům. Můžeme však předpokládati, že se tyto rotační poloměry během nekonečně krátké doby nemění, takže možno psáti:

$$dx = dx^{(1)} + dx^{(2)} + \ldots + dx^{(h)}$$

a t. d. pro dy a dz.

Dosadíme-li nyní hodnoty pro $dx^{(1)}$, $dx^{(2)}$, ... $dx^{(h)}$ a t. d. z rovnic (13), (14), ... (15), obdržíme:

$$dx = -\{x - a_1 - l_1\,[l_1\,(x - a_1) + m_1\,(y - b_1)$$
$$+ n_1\,(z - c_1)]\}\,\sin\,[\varphi_1(t') - \varphi_1(t)]\,.\,\varphi'_1(t')\,dt'$$
$$+ [m_1\,(z - c_1) - n_1\,(y - b_1)]\,\cos\,[\varphi_1(t') - \varphi_1(t)]\,.\,\varphi'_1(t')\,dt'$$
$$-\{x - a_2 - l_2\,[l_2\,(x - a_2) + m_2\,(y - b_2)$$
$$+ n_2\,(z - c_2)]\}\,\sin\,[\varphi_2(t') - \varphi_2(t)]\,\varphi'_2(t')\,dt'$$
$$+ [m_2\,(z - c_2) - n_2\,(y - b_2)]\,\cos\,[\varphi_2(t') - \varphi_2(t)]\,.\,\varphi'_2(t)\,dt'.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\{x - a_h - l_h\,[l_h\,(x - a_h) + m_h\,(y - b_h)$$
$$+ n_h\,(z - c_h)]\}\,\sin\,[\varphi_h(t') - \varphi_h(t)]\,\varphi'_h\,(t')\,dt'$$
$$+ [m_h\,(z - c_h) - n_h\,(y - b_h)]\,\cos\,[\varphi_h\,(t') - \varphi_h\,(t)]\,.\,\varphi'_h(t')\,dt,$$

a t. d. pro dy a dz.

Zde dosadíme $t' = t$, neboť hledáme, jak se skládá těch h rotací hned od východiska (x, y, z), pak budeme psáti dt místo dt', neboť dx značí vzrůst v čase dt a $dx^{(1)}, dx^{(2)}, \ldots dx^{(h)}$ vzrosty v čase dt', všechny ale se vztahují na týž nekonečně malý čas. Touto substitucí obdržíme:

$$\begin{aligned} dx = {} & [m_1 (z - c_1) - n_1 (y - b_1)]\, \varphi'_1(t)\, dt \\ & + [m_2 (z - c_2) - n_2 (y - b_2)]\, \varphi'_2(t)\, dt \\ + \ldots & + [m_h (z - c_h) - n_h (y - b_h)]\, \varphi'_h(t)\, dt. \end{aligned}$$

Rovnice pro dy a dz, obdržíme z této cyklickou záměnou. Hledané differenciální rovnice pro dráhu bodu pak budou:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z \sum_{r=1}^{h} m_r \varphi'_r(t) - y \sum_{r=1}^{h} n_r \varphi'_r(t) + \sum_{r=1}^{h} (n_r b_r - m_r c_r)\, \varphi'_r(t), \\ \frac{dy}{dt} &= x \sum_{r=1}^{h} n_r \varphi'_r(t) - z \sum_{r=1}^{h} l_r \varphi'_r(t) + \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\, \varphi'_r(t), \\ \frac{dz}{dt} &= y \sum_{r=1}^{h} l_r \varphi'_r(t) - x \sum_{r=1}^{h} m_r \varphi'_r(t) + \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\, \varphi'_r(t). \end{aligned}$$

Násobíme-li tyto tři rovnice po řadě výrazy:

$$\sum_{r=1}^{h} l_r \varphi'_r(t), \quad \sum_{r=1}^{h} m_r \varphi'_r(t), \quad \sum_{r=1}^{h} n_r \varphi'_r(t)$$

a sečteme, obdržíme:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{h} l_r \varphi'_r(t) \cdot \frac{dx}{dt} + \sum_{r=1}^{h} m_r \varphi'_r(t) \cdot \frac{dy}{dt} + \sum_{r=1}^{h} n_r \varphi'_r(t) \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= \sum_{r=1}^{h} l_r \varphi'_r(t) \cdot \sum_{r=1}^{h} (n_r b_r - m_r c_r)\, \varphi'_r(t) + \sum_{r=1}^{h} m_r \varphi'_r(t) \cdot \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\, \varphi'_r(t) \\ &\qquad + \sum_{r=1}^{h} n_r \varphi'_r(t) \cdot \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\, \varphi'_r(t) \\ &= \sum_{s=1}^{h} \Big\{ l_s \varphi'_s(t) \cdot \sum_{r=1}^{h} (n_r b_r - m_r c_r)\, \varphi'_r(t) + m_s \varphi'_s(t) \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\, \varphi'_r(t) \\ &\qquad + n_s \varphi'_s(t) \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\, \varphi'_r(t) \Big\} \\ &= \sum_{s=1}^{h} \sum_{r=1}^{h} \varphi'_s(t)\, \varphi'_r(t)\, [l_s (n_r b_r - m_r c_r) + m_s (l_r c_r - n_r a_r) \\ &\qquad + n_s (m_r a_r - l_r b_r)] \end{aligned}$$

nebo konečně:

$$\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t)\,.\,\frac{dx}{dt}+\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t)\,.\,\frac{dy}{dt}+\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)\,.\,\frac{dz}{dt}$$

$$=\sum_{s=1}^{h}\sum_{r=1}^{h}\varphi'_s(t)\,.\,\varphi'_r(t)\begin{vmatrix} l_s & m_s & n_s\\ a_r & b_r & c_r\\ l_r & m_r & n_r\end{vmatrix};$$

differenciální rovnice, jíž musí hověti souřadnice našeho bodu.

Za s a r třeba jen vzíti různé hodnoty, neboť pro $s=r$ mizí determinant. Součet na pravé straně differenciální rovnice možno také jinak psáti. Za r, s máme totiž vzíti všechny variace 2. třídy bez opakování pro 1, 2, 3, . . . h; vždy dvě a dvě těchto variací můžeme však vzíti dohromady, dle rovnice:

$$\varphi'_s(t)\,\varphi'_r(t)\begin{vmatrix} l_s & m_s & n_s\\ a_r & b_r & c_r\\ l_r & m_r & n_r\end{vmatrix}+\varphi'_r(t)\,\varphi'_s(t)\begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r\\ a_s & b_s & c_s\\ l_s & m_s & n_s\end{vmatrix}$$

$$=\varphi'_r(t)\,\varphi'_s(t)\begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r\\ l_s & m_s & n_s\\ a_r-a_s & b_r-b_s & c_r-c_s\end{vmatrix}.$$

Vzhledem k tomu obdržíme:

$$\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t)\,.\,\frac{dx}{dt}+\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t)\,.\,\frac{dy}{dt}+\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)\,.\,\frac{dz}{dt}$$

$$=\sum_{r,\,s}^{h}\varphi'_r(t)\,\varphi'_s(t)\begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r\\ l_s & m_s & n_s\\ a_r-a_s & b_r-b_s & c_r-c_s\end{vmatrix},\qquad(17)$$

kde za r, s nutno dosaditi všecky kombinace 2. třídy bez opakování pro 1. 2, 3, . . . h.

III. Zvláštní případy.

I. Rovnoměrné rotace.

Jsou-li dané rotace rovnoměrné, můžeme položiti

$$\varphi_1(t)=\omega_1 t,\ \varphi_2(t)=\omega_2 t,\ \ldots\ \varphi_h(t)=\omega_h t,$$

kde ω_1, ω_2 . . . ω_h jsou konstantní úhlové rychlosti jednotlivých rotací. Differenciální rovnice výsledné dráhy bodu tělesa jsou pak dle (16):

$$\frac{dx}{dt} = z \sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r - y \sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r + \sum_{r=1}^{h} (n_r b_r - m_r c_r)\, \omega_r,$$
$$\frac{dy}{dt} = x \sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r - z \sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r + \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\, \omega_r, \qquad (18)$$
$$\frac{dz}{dt} = y \sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r - x \sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r + \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\, \omega_r.$$

Bod nalézá se v čase t na rovině, jejíž differenciální rovnice dle (17) bude:

$$\sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r \,.\, \frac{dx}{dt} + \sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r \,.\, \frac{dy}{dt} + \sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r \,.\, \frac{dz}{dt}$$
$$= \sum_{r,s} \omega_r \omega_s \begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r \\ l_s & m_s & n_s \\ a_r - a_s & b_r - b_s & c_r - c_s \end{vmatrix}.$$

Za r, s třeba dosaditi všecky kombinace 2. třídy bez opakování pro 1, 2, 3, ... h.

Integrací této rovnice obdržíme:

$$\sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r \,.\, x + \sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r \,.\, y + \sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r \,.\, z$$
$$= \sum_{r,s} \omega_r \omega_s \begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r \\ l_s & m_s & n_s \\ a_r - a_s & b_r - b_s & c_r - c_s \end{vmatrix} . \, t = C. \qquad (19)$$

Integrační stálou C možno určiti z podmínky, že bod tělesa se na počátku nachází v bodě (x_0, y_0, z_0), t. j. pro $t = 0$ má býti $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, tedy:

$$\sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r \,.\, x_0 + \sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r \,.\, y_0 + \sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r z_0 = C.$$

Z rovnice (19) vidno, že se bod pohybuje tak, jako by byl vázán na rovinu, jež se rovnoměrně v prostoru k sobě rovnoběžně pošinuje. Směrové kosinusy normály této roviny jsou:

$$l = \frac{\Sigma\, l_r \omega_r}{\sqrt{(\Sigma\, l_r \omega_r)^2 + (\Sigma\, m_r \omega_r)^2 + (\Sigma\, n_r \omega_r)^2}},$$
$$m = \frac{\Sigma\, m_r \omega_r}{\sqrt{(\Sigma\, l_r \omega_r)^2 + (\Sigma\, m_r \omega_r)^2 + (\Sigma\, n_r \omega_r)^2}},$$
$$n = \frac{\Sigma\, n_r \omega_r}{\sqrt{(\Sigma\, l_r \omega_r)^2 + (\Sigma\, m_r \omega_r)^2 + (\Sigma\, n_r \omega_r)^2}}.$$

Představujeme-li si, jak obyčejně, úhlové rychlosti jako rotory, jež jsou naneseny na příslušných osách co do velikosti i směru, značí $\Sigma\, l_r\omega_r$, $\Sigma\, m_r\omega_r$, $\Sigma\, n_r\omega_r$ součty průmětů všech rotorů $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_h$ na jednotlivé osy souřadnic, tedy průměty resultanty těchto rotorů na osy souřadnic, t. j. komponenty této resultanty ve směrech os souřadnic. Proto položíme:

$$\left(\sum_{r=1}^{h} l_r\omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} m_r\omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} n_r\omega_r\right)^2 = \omega^2, \tag{20}$$

kde ω značí geometrický součet neboli resultantu rotorů ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_h$.

Hořejší rovnice můžeme nyní též psáti:

$$l = \frac{\sum\limits_{r=1}^{h} l_r\omega_r}{\omega}, \quad m = \frac{\sum\limits_{r=1}^{h} m_r\omega_r}{\omega}, \quad n = \frac{\sum\limits_{r=1}^{h} n_r\omega_r}{\omega},$$

$$l\omega x_0 + m\omega y_0 + n\omega z_0 = C, \tag{21}$$

$$lx + my + nz = lx_0 + my_0 + nz_0 + \frac{S}{\omega}\, t,$$

kde

$$S = \sum_{r,\,s} \omega_r\omega_s \begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r \\ l_s & m_s & n_s \\ a_r - a_s & b_r - b_s & c_r - c_s \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Differenciální rovnice (18) mají nyní tvar:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (mz - ny)\,\omega + \sum_{r=1}^{h} (n_r b_r - m_r c_r)\,\omega_r, \\ \frac{dy}{dt} &= (nx - lz)\,\omega + \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\,\omega_r, \\ \frac{dz}{dt} &= (ly - mx)\,\omega + \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\,\omega_r. \end{aligned} \tag{23}$$

Differencujeme-li první rovnici dle t a dosadíme-li zároveň za $\frac{dy}{dt}$ a $\frac{dz}{dt}$ hodnoty z druhých dvou rovnic, následuje:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m\omega \left[(ly - mx)\,\omega + \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\,\omega_r\right]$$
$$- n\omega \left[(nx - lz)\,\omega + \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\,\omega_r\right]$$
$$= \omega^2 \left[m\,(ly - mx) - n\,(nx - lz)\right]$$
$$+ \omega \left[m \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\,\omega_r - n \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\,\omega_r\right]$$
$$= \omega^2 \left[l\,(lx + my + nz) - (l^2 + m^2 + n^2)\,x\right] + \omega^2 a$$
$$= \omega^2 l\,(lx + my + nz) - \omega^2 (x - a),$$

kde za účelem zkrácení položeno:

$$m \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\,\omega_r - n \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\,\omega_r = \omega a. \qquad (24)$$

Následkem (21) obdržíme:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 l \left(lx_0 + my_0 + nz_0 + \frac{S}{\omega}\,t\right) - \omega^2\,(x - a).$$

Substitucí

$$x - a - l\left(lx_0 + my_0 + nz_0 + \frac{S}{\omega}\,t\right) = u$$

přejde differenciální rovnice ve tvar:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\,\omega^2 u.$$

Integrál této lineární differenciální rovnice

$$u = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

neboli

$$x - a = l\left(lx_0 + my_0 + nz_0 + \frac{S}{\omega}\,t\right) + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

obsahuje dvě integrační stálé, jež nutno ještě určiti. Pro $t = 0$ jest $x = x_0$, tedy

$$x_0 - a = l\,(lx_0 + my_0 + nz_0) + C_1,$$
$$C_1 = x_0 - a - l\,(lx_0 + my_0 + nz_0)$$

proto:

$$x - a = l\,(lx_0 + my_0 + nz_0) + [x_0 - a - l\,(lx_0 + my_0$$
$$+ nz_0)] \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + l\,\frac{S}{\omega}\,t,$$

podobně:

$$y-b=m(lx_0+my_0+nz_0)+[y_0-b-m(lx_0+my_0+nz_0)]\cos\omega t+C'_2\sin\omega t+m\frac{S}{\omega}t,$$
$$z-c=n(lx_0+my_0+nz_0)+[z_0-c-n(lx_0+my_0+nz_0)]\cos\omega t+C''_2\sin\omega t+n.\frac{S}{\omega}t, \tag{25}$$

kde dle (24)

$$\omega a=m\sum_{r=1}^{h}(m_ra_r-l_rb_r)\,\omega_r-n\sum_{r=1}^{h}(l_rc_r-n_ra_r)\,\omega_r,$$
$$\omega b=n\sum_{r=1}^{h}(n_rb_r-m_ra_r)\,\omega_r-l\sum_{r=1}^{h}(m_ra_r-l_rb_r)\,\omega_r, \tag{26}$$
$$\omega c=l\sum_{r=1}^{h}(l_rc_r-n_ra_r)\,\omega_r-m\sum_{r=1}^{h}(n_rb_r-m_rc_r)\,\omega_r.$$

Dosazením hodnot pro x, y, z z rovnic (25) do poslední rovnice (21) plyne:

$$la+mb+nc-(la+mb+nc)\cos\omega t+(lC_2+mC'_2+nC''_2)\sin\omega t=0.$$

Tato rovnice platí pro každé t, tedy

$$la+mb+nc=0,\quad lC_2+mC'_2+nC''_2=0. \tag{27}$$

Hodnoty pro a, b, c v (25) hoví skutečně rovnici první.

K určení konstant C_2, C'_2, C''_2 třeba jen dosaditi hodnoty pro x, y, z z (25) do první differenciální rovnice (23); neboť z rovnice, již tak obdržíme:

$$-\omega[x_0-a-l(lx_0+my_0+nz_0)]\sin\omega t+\omega C_2\cos\omega t+l\frac{S}{\omega}$$
$$=\omega(mC''_2-nC'_2)\sin\omega t+\omega[m(z_0-c)-n(y_0-b)]\cos\omega t$$
$$+\omega(mc-nb)+\sum_{r=1}^{h}(n_rb_r-m_rc_r)\,\omega_r,$$

plyne:

$$C_2=m(z_0-c)-n(y_0-b),\quad C'_2=n(x_0-a)-l(z_0-c),$$
$$C''_2=l(y_0-b)-m(x_0-a),$$

ježto musí platiti pro každé t. Tyto hodnoty musí též druhé rovnici (27) hověti. Rovnice (25) obdrží nyní vzhledem k první rovnici (27) konečný tvar:

$$\begin{aligned}
x - a &= l\,[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)] \\
&+ \{x_0 - a - l\,[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)]\} \cos \omega t \\
&+ [m(z_0 - c) - n(y_0 - b)] \sin \omega t + l \frac{S}{\omega} t, \\
y - b &= m\,[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)] \\
&+ \{y_0 - b - m\,[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)]\} \cos \omega t \\
&+ [n(x_0 - a) - l(z_0 - c)] \sin \omega t + m \frac{S}{\omega} t, \qquad (28) \\
z - c &= n\,[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)] \\
&+ \{z_0 - c - n\,[l(x_0 - a) + m(y_0 - b) + n(z_0 - c)]\} \cos \omega t \\
&+ [l(y_0 - b) - m(x_0 - a)] \sin \omega t + n \,.\, \frac{S}{\omega} t.
\end{aligned}$$

Srovnáme-li tyto rovnice s rovnicemi (9), vidíme, že těleso následkem h rovnoměrných rotací o obloukových rychlostech $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_h$ rotuje rovnoměrně obloukovou rychlostí

$$\omega = \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r\right)^2}$$

kol osy, procházející bodem a, b, c o směrových kosinusech

$$l = \frac{\sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r}{\omega}, \quad m = \frac{\sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r}{\omega}, \quad n = \frac{\sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r}{\omega}$$

a zároveň rovnoměrně postupuje rychlostí $\frac{S}{\omega}$ směrem této osy rotační.

Tedy libovolný počet rovnoměrných rotací s libovolnými osami rotace mění se v rovnoměrnou rotaci spojenou s rovnoměrnou translací ve směru této rotace, t. j. v *rovnoměrný pohyb šroubový.*

Zbývá ještě určiti rychlost této translace a bod (a, b, c), jímž prochází osa rotace výsledné.

Nejprve pojednáme o jednoduchém případu skládání *dvou rovnoměrných rotací.* V tom případě máme dle (20), (21), (22) a (26):

$$\omega = \sqrt{(l_1\omega_1 + l_2\omega_2)^2 + (m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2 + (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^2}$$
$$= \sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\,\omega_1^2 + (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)\,\omega_2^2 + 2(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)\,\omega_1\omega_2}$$
$$= \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos(\omega_1/\omega_2)},$$
$$l = \frac{l_1\omega_1 + l_2\omega_2}{\omega}, \quad m = \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{\omega}, \quad n = \frac{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}{\omega},$$
$$S = \omega_1\omega_2 \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \end{vmatrix}, \tag{29}$$
$$\omega a = m\,[(m_1 a_1 - l_1 b_1)\,\omega_1 + (m_2 a_2 - l_2 b_2)\,\omega_2] - n\,[(l_1 c_1 - n_1 a_1)\,\omega_1 + (l_2 c_2 - n_2 a_2)\,\omega_2],$$
$$\omega b = n\,[(n_1 b_1 - m_1 c_1)\,\omega_1 + (n_2 b_2 - m_2 c_2)\,\omega_2] - l\,[(m_1 a_1 - l_1 b_1)\,\omega_1 + (m_2 a_2 - l_2 b_2)\,\omega_2],$$
$$\omega c = l\,[(l_1 c_1 - n_1 a_1)\,\omega_1 + (l_2 c_2 - n_2 a_2)\,\omega_2] - m\,[(n_1 b_1 - m_1 c_1)\,\omega_1 + (n_2 b_2 - m_2 c_2)\,\omega_2].$$

Výsledná oblouková rychlost ω jest geometrickým součtem rotorů ω_1 a ω_2, jest tedy diagonalou rovnoběžníka, jehož stranami jsou ω_1 a ω_2 ve směrech příslušných os rotačních. Ježto jsou pro nejkratší vzdálenost os daných rotací směrové kosinusy

$$\lambda = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{\sin\vartheta}, \quad \mu = \frac{n_1 l_2 - n_2 l_1}{\sin\vartheta}, \quad \nu = \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{\sin\vartheta}, \tag{30}$$

kde ϑ značí úhel směrů těchto os, obdržíme pro rychlost translace následující výraz:

$$\frac{S}{\omega} = \frac{\omega_1\omega_2}{\omega}\,[(a_1 - a_2)\,\lambda + (b_1 - b_2)\,\mu + (c_1 - c_2)\,\nu]\,\sin\vartheta.$$

Součet v závorce udává průmět vzdálenosti bodů (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) na nejkratší vzdálenost a tedy nejkratší vzdálenost samu. Označíme-li nejkratší vzdálenost os rotačních δ, obdržíme pro rychlost translace výsledného pohybu šroubového jednoduchý výraz:

$$\frac{S}{\omega} = \frac{\omega_1\omega_2}{\omega}\,\delta\,\sin\vartheta. \tag{31}$$

Bod (a, b, c) nachází se, jak patrno z první rovnice (27), v rovině

$$lx + my + nz = 0,$$

jež stojí kolmo na osu výsledné rotace a prochází počátkem souřadnic.

Z (29) obdržíme:

$$
\begin{aligned}
\omega a &= \omega_1 a_1 (mm_1 + nn_1) + \omega_2 a_2 (mm_2 + nn_2) - \omega_1 l_1 (mb_1 + nc_1) \\
&\quad - \omega_2 l_2 (mb_2 + nc_2) \\
&= \omega_1 a_1 (ll_1 + mm_1 + nn_1) + \omega_2 a_2 (ll_2 + mm_2 + nn_2) \\
&\quad - \omega_1 l_1 (la_1 + mb_1 + nc_1) - \omega_2 l_2 (la_2 + mb_2 + nc_2).
\end{aligned}
$$

K zjednodušení tohoto výrazu předpokládejme, že

$$la_1 + mb_1 + nc_1 = la_2 + mb_2 + nc_2 = d,$$

t. j. body (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) mají ležeti v rovině

$$lx + my + nz = d.$$

Tato rovina protíná v libovolné vzdálenosti d od počátku souřadnic kolmo osu výsledné rotace. Jsou-li dále ϑ_1 a ϑ_2 úhly mezi směrem osy výsledné rotace a směry os daných rotací, máme:

$$
\begin{aligned}
\omega a &= a_1 \omega_1 \cos \vartheta_1 + a_2 \omega_2 \cos \vartheta_2 - d (l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2) \\
&= a_1 \omega_1 \cos \vartheta_1 + a_2 \omega_2 \cos \vartheta_2 - dl\omega,
\end{aligned}
$$

nebo:

$$\omega (a + ld) = a_1 \omega_1 \cos \vartheta_1 + a_2 \omega_2 \cos \vartheta_2.$$

Rovina:

$$lx + my + nz = d,$$

v níž jsme volili body (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2), protíná osu výsledné rotace v bodě (a', b', c'), kde

$$a' = a + ld, \quad b' = b + md, \quad c' = c + nd.$$

Obdržíme tedy konečně:

$$a' = \frac{a_1 \omega_1 \cos \vartheta_1 + a_2 \omega_2 \cos \vartheta_2}{\omega_1 \cos \vartheta_1 + \omega_2 \cos \vartheta_2}, \quad b' = \frac{b_1 \omega_1 \cos \vartheta_1 + b_2 \omega_2 \cos \vartheta_2}{\omega_1 \cos \vartheta_1 + \omega_2 \cos \vartheta_2}$$

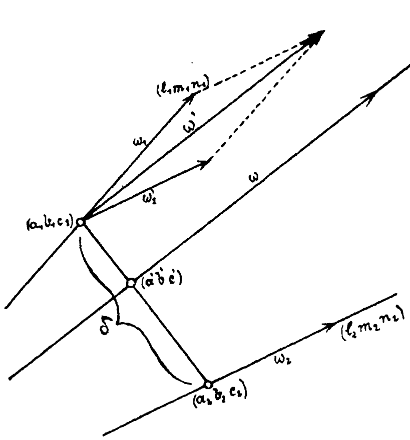
$$c' = \frac{c_1 \omega_1 \cos \vartheta_1 + c_2 \omega_2 \cos \vartheta_2}{\omega_1 \cos \vartheta_1 + \omega_2 \cos \vartheta_2}, \tag{32}$$

ježto

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 \cos \vartheta_1 + \omega_2 \cos \vartheta_2 = \omega_1 (ll_1 + mm_1 + nn_1) \\
&+ \omega_2 (ll_2 + mm_2 + nn_2) = l (l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2) + m (m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2) \\
&+ n (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) = l^2 \omega + m^2 \omega + n^2 \omega = \omega.
\end{aligned}
$$

Uvážíme-li, že $\omega_1 \cos \vartheta_1$ a $\omega_2 \cos \vartheta_2$ jsou projekce rotorů ω_1 a ω_2 do osy výsledných rotací, můžeme výsledek rovnic (32) touto větou vyjádřiti:

Každá rovina kolmá na směr osy výsledné rotace protíná tři osy ve třech bodech, ležících na přímce, průsečík osy výsledné rotace (a', b', c') dělí při tom vzdálenost průsečíků (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) daných os v poměru $\omega_2 \cos \vartheta_2 : \omega_1 \cos \vartheta_1$, t. j. v opačném poměru příslušných rotorů ω_1 a ω_2 promítnutých do směru osy výsledné rotace.



Obr. 2.

V této rovině kolmé na osu výsledné rotace musí se též nacházeti nejkratší vzdálenost daných os rotačních, ježto dle (30)

$$l\lambda + mu + nv = 0,$$

a tedy nejkratší vzdálenost kolma na směr osy výsledné rotace.

Osa výsledné rotace protíná tedy též nejkratší vzdálenost daných os rotačních v opačném poměru příslušných rotorů ω_1 a ω_2, promítnutých do směru osy rotace výsledné.

Za účelem konstruktivního určení rotace a translace výsledného pohybu šroubového postupujeme následovně: Z obou rotorů ω_1 a ω_2, jež jsme v jednom bodu nanesli, sestrojíme rovnoběžník (obr. 2.) Úhlopříčka tohoto rovnoběžníka udává obloukovou rychlost ω rotace výsledné dle velikosti i směru v prostoru (v obr. ω'). Nejkratší vzdálenost os daných rotací rozdělíme v opačném poměru rotorů ω_1 a ω_2, promítnutých do směru resultanty ω', tedy v poměru $\omega_2 \cos \vartheta_2 : \omega_1 \cos \vartheta_1$, a tímto dělicím bodem vedeme přímku rovnoběžnou s úhlopříčkou ω', to jest pak osa rotace výsledné. V tomto směru osy rotační máme rotor ω, obloukovou rychlost výsledné rotace rovnoměrné a vektor

$$\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega} \delta \sin \vartheta,$$

rychlost výsledné translace rovnoměrné.

Může se státi, že jedna z projekcí $\omega_2 \cos \vartheta_2$ nebo $\omega_1 \cos \vartheta_1$ se stává rovnou nule, je-li ϑ_2 nebo ϑ_1 pravý úhel, pak spadá bod (a', b', c') v jedno s bodem (a_1, b_1, c_1) nebo (a_2, b_2, c_2). Má-li však jedna z projekcí $\omega_2 \cos \vartheta_2$ nebo $\omega_1 \cos \vartheta_1$ směr opačný směru resultanty ω, je-li ϑ_2 nebo ϑ_1 úhel tupý, pak leží bod (a', b', c') v prodloužení délky δ, dělí tedy vzdálenost δ v onom poměru z venku.

Nyní odbudeme rychle též obecný případ h rovnoměrných rotací.

Seznali jsme jako důsledek rovnic (28), že se libovolný počet h rovnoměrných rotací s libovolnými osami rotačními skládá v rovnoměrný pohyb šroubový s obloukovou rychlostí:

$$\omega = \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r\right)^2}$$

a rychlostí postupnou:

$$\frac{S}{\omega} = \sum_{rs} \frac{\omega_r \omega_s}{\omega} \begin{vmatrix} l_r, & m_r, & n_r \\ l_s, & m_s, & n_s \\ a_r - a_s, & b_r - b_s, & c_r - c_s \end{vmatrix}.$$

Naší úlohou jest stanoviti blíže tuto rychlost translace a osu rotace výsledné.

Jak jsme při skládání rotací seznali, platí vztah:

$$\begin{vmatrix} l_r, & m_r, & n_r \\ l_s, & m_s, & n_s \\ a_r - a_s, & b_r - b_s, & c_r - c_s \end{vmatrix} = \delta_{rs} \sin \vartheta_{rs}, \tag{33}$$

kdež značí δ_{rs} nejkratší vzdálenost mezi osami rotačními příslušnými obloukovým rychlostem ω_r a ω_s a ϑ_{rs} úhel mezi směry těchto os.

Rychlost translace ve směru resultanty ω jest tedy určena součtem:

$$\frac{S}{\omega} = \sum_{rs} \frac{\omega_r \omega_s}{\omega} \delta_{rs} \sin \vartheta_{rs}. \tag{34}$$

Toto součtové znaménko vztahuje se na všechny kombinace 2. třídy bez opakování pro 1, 2, 3, ... h.

Dle rovnic (26) máme:

$$\omega a = \sum_{r=1}^{h} (mm_r a_r - ml_r b_r - nl_r c_r + nn_r a_r) \omega_r = \sum_{r=1}^{h} [a_r (ll_r + mm_r + nn_r) - l_r (la_r + mb_r + nc_r)] \omega_r.$$

K zjednodušení tohoto výrazu položme:

$$la_r + mb_r + nc_r = d \quad \text{pro } r = 1, 2, 3, \ldots h,$$

t. j. body (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_h, b_h, c_h) mají býti průsečíky os daných rotací s rovinou:

$$lx + my + nz = d.$$

Tato rovina protíná kolmo výslednou osu rotace a má libovolnou vzdálenost d od počátku souřadnic. Za této podmínky obdržíme:

$$\omega a = \sum_{r=1}^{h} a_r \omega_r \cos \vartheta_r - d \sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r,$$

označíme-li úhel mezi směry daného rotoru ω_r a výsledného rotoru ω písmenou ϑ_r.

Následkem první rovnice (21) můžeme hořejší rovnici psáti jednodušeji takto:

$$\omega (a + ld) = \sum_{r=1}^{h} a_r \omega_r \cos \vartheta_r.$$

Souřadnice a', b', c' průsečíku osy výsledné rotace s rovinou:

$$lx + my + nz = d,$$

v níž jsme body (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_h, b_h, c_h) volili, hoví rovnici této roviny a rovnicím výsledné osy:

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}.$$

Vzhledem k první rovnici (27) dají tyto rovnice:

$$a' = a + ld, \quad b' = b + md, \quad c' = c + nd,$$

tedy

$$a' = \frac{1}{\omega} \cdot \sum_{r=1}^{h} a_r \omega_r \cos \vartheta_r, \quad b' = \frac{1}{\omega} \cdot \sum_{r=1}^{h} b_r \omega_r \cos \vartheta_r,$$

$$c' = \frac{1}{\omega} \cdot \sum_{r=1}^{h} c_r \omega_r \cos \vartheta_r. \tag{35}$$

Místo ω můžeme ve jmenovateli těchto výrazů psáti též součet $\sum_{r=1}^{h} \omega_r \cos \vartheta_r$, ježto součet projekcí všech komponent do směru resultanty se rovná resultantě samé. Tento bod (a', b', c') jmenujeme *centrálním bodem* daných rotorů $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_h$ pro zvolenou rovinu a osu výsledné rotace *centrální osou* těchto rotorů. Rovnice této osy centrální zní:

$$\frac{\omega x - \sum_{r=1}^{h} a_r \omega_r \cos \vartheta_r}{\sum_{r=1}^{h} l_r \omega_r} = \frac{\omega y - \sum_{r=1}^{h} b_r \omega_r \cos \vartheta_r}{\sum_{r=1}^{h} m_r \omega_r}$$

$$= \frac{\omega z - \sum_{r=1}^{h} c_r \omega_r \cos \vartheta_r}{\sum_{r=1}^{h} n_r \omega_r}, \tag{36}$$

tím jest tedy též určena *osa výsledného pohybu šroubového*. Z výrazu (34) lehce vidno, že *neobdržíme translaci* — tedy *jen rotaci* — je-li buď $\delta_{rs} = 0$ nebo $\vartheta_{rs} = 0\,(\pi)$ pro každou kombinaci rs. První případ máme tehdy, protínají-li se všecky osy daných rotací v jednom bodě, druhý případ, jsou-li rovnoběžny.

V prvém případě jest nejjednodušší, voliti bod, v němž se osy protínají, počátkem souřadnic; pak třeba jen položiti:

$$a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = \dots = a_h = b_h = c_h = 0$$

a obdržíme z (26):

$$a = b = c = 0,$$

t. j. osa výsledné rotace jde týmž bodem.

Rovnice (28) shodují se pak s rovnicemi (8), jen místo $\varphi(t)$ třeba psáti ωt, kde ω značí geometrický součet daných rotorů $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_h$.

Obdržíme tedy v tomto případě jen rovnoměrnou rotaci, jejížto oblouková rychlost určena jest co do směru i velikosti geometrickým součtem daných rotorů $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_h$. (Polygon obloukových rychlostí v prostoru.)

V druhém případě $\vartheta_{rs} = 0\,(\pi)$ (rovnoběžné osy rotační) předpokládejme nejprve, že všechny rotace mají týž smysl, tedy $\vartheta_{rs} = 0$, pak jest:

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_h, \quad m_1 = m_2 = \ldots = m_h, \quad n_1 = n_2 = \ldots = n_h.$$

Z rovnic (20), (21), (34) a (35) obdržíme nyní:

$$\omega = \sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\left(\sum_{r=1}^{h}\omega_r\right)^2} = \sum_{r=1}^{h}\omega_r,$$

$$l = \frac{l_1 \sum_{r=1}^{h}\omega_r}{\omega} = l_1, \quad m = \frac{m_1 \sum_{r=1}^{h}\omega_r}{\omega} = m_1, \quad n = \frac{n_1 \sum_{r=1}^{h}\omega_r}{\omega} = n_1,$$

$$\frac{S}{\omega} = 0, \quad a' = \frac{1}{\omega}\,.\sum_{r=1}^{h} a_r\omega_r = \frac{\sum_{r=1}^{h} a_r\omega_r}{\sum_{r=1}^{h}\omega_r},$$

$$b' = \frac{1}{\omega}\,.\sum_{r=1}^{h} b_r\omega_r = \frac{\sum_{r=1}^{h} b_r\omega_r}{\sum_{r=1}^{h}\omega_r}, \quad c' = \frac{1}{\omega}\,.\sum_{r=1}^{h} c_r\omega_r = \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r\omega_r}{\sum_{r=1}^{h}\omega_r}.$$

Obdržíme zde rotaci bez translace s obloukovou rychlostí $\sum_{r=1}^{h}\omega_r$ rovnou součtu daných obloukových rychlostí kol osy, jež jde rovnoběžně s danými osami *středem daných rovnoběžných rotorů* $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_h$. Je-li však $\vartheta_{rs} = 0$ nebo $= \pi$, nemají-li tedy všecky rotace týž smysl, pak položme:

$$l_r = \varepsilon_r l_0, \quad m_r = \varepsilon_r m_0, \quad n_r = \varepsilon_r n_0, \qquad \text{pro } r = 1, 2, \ldots h,$$

kdež ε_r značí $+1$ nebo -1 dle smyslu příslušné rotace.

Z rovnic (20), (21), (34) a (35) obdržíme:

$$\omega = \sqrt{(l_0^2 + m_0^2 + n_0^2)\left(\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r\right)^2} = \sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r,$$

$$l = \frac{l_0 \sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r}{\omega} = l_0, \; m = \frac{m_0 \sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r}{\omega} = m_0, \; n = \frac{n_0 \sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r}{\omega} = n_0,$$

$$\frac{S}{\omega} = 0, \; a' = \frac{\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r a_r \omega_r}{\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r}, \quad b' = \frac{\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r b_r \omega_r}{\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r}, \quad c' = \frac{\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r c_r \omega_r}{\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r},$$

neboť pro

$$l = l_0, \quad m = m_0, \quad n = n_0$$

jest

$$\cos \vartheta_r = l l_r + m m_r + n n_r = \varepsilon_r.$$

Neobdržíme tedy translace, osa výsledné rovnoměrné rotace jest rovnoběžna s osami daných rotací, její oblouková rychlost rovná se algebraickému součtu $\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r$ ($\varepsilon_r = +1$ nebo -1 dle smyslu příslušné rotace) daných obloukových rychlostí a jde *středem daných rovnoběžných rotorů* $\varepsilon_1 \omega_1, \varepsilon_2 \omega_2, \ldots \varepsilon_h \omega_h$.

Může se státi, že náhodou $\omega = \sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r = 0$, pak neobdržíme žádné rotace.

Výraz pro rychlost translace dostává nyní tvar neurčitý $\frac{0}{0}$; hodnotu této rychlosti si nyní stanovíme. K řešení této úlohy volme s počátku jen dvě rovnoměrné rotace kol rovnoběžných os se stejnými obloukovými rychlostmi, ale v opačném smyslu. Položíme tedy

$$\varepsilon_1 = 1, \; \varepsilon_2 = -1, \; \omega_1 = \omega_2$$

a obdržíme:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = 0, \quad \frac{S}{\omega} = \frac{\omega_1^2 \delta \sin \pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{0}{0}.$$

Ku stanovení této rychlosti dle směru i velikosti volme nejdříve jen $\omega_1 = \omega_2$, úhel ϑ budiž prozatím ještě neurčitý. Rovnice (29) a (31) dávají pak:

$$\omega = \sqrt{2\omega_1^2 + 2\omega_1^2 \cos\vartheta} = 2\omega_1 \cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2\cos\frac{\vartheta}{2}}, \quad m = \frac{m_1 + m_2}{2\cos\frac{\vartheta}{2}}, \quad n = \frac{n_1 + n_2}{2\cos\frac{\vartheta}{2}},$$

$$\frac{S}{\omega} = \frac{\omega_1^2 \delta \sin\vartheta}{2\omega_1 \cos\frac{\vartheta}{2}} = \omega_1 \delta \sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Úhly ϑ_1 a ϑ_2 mezi směrem výsledné translace a směry daných os rotačních jsou stejné, neboť:

$$\cos\vartheta_1 = ll_1 + mm_1 + nn_1 = \frac{1 + \cos\vartheta}{2\cos\frac{\vartheta}{2}} = \cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$\cos\vartheta_2 = ll_2 + mm_2 + nn_2 = \frac{1 + \cos\vartheta}{2\cos\frac{\vartheta}{2}} = \cos\frac{\vartheta}{2},$$

tedy

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\vartheta}{2}$$

Nyní položme $\vartheta = \pi$, t. j. $l_2 = -l_1$, $m_2 = -m_1$, $n_2 = -n_1$ a obdržíme:

$$\omega = 0, \quad \frac{S}{\omega} = \omega_1 \delta, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Dvě rovnoměrné rotace kol antiparallelních os o stejných rychlostech obloukových dají translaci bez rotace. Rychlost této translace se rovná součinu z nejkratší vzdálenosti obou os a společné obloukové rychlosti. Směr její jest kolmý na obě osy, ježto však dle (30) má státi též kolmo na nejkratší vzdálenosti těchto os, musí býti kolma k rovině, určené oběma osami. Díváme-li se ve směru této translace, jsou rotory ω_1 a $-\omega_1$ namířeny ve smyslu točení ručiček hodinových. (Obr. 3.)

Vezměme nyní obecný případ $\omega = \sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r = 0.$

Rychlosti rotací v jednom směru označme $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$, rychlosti rotací v opačném směru $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2} \ldots \omega_h$; pak musíme položiti:

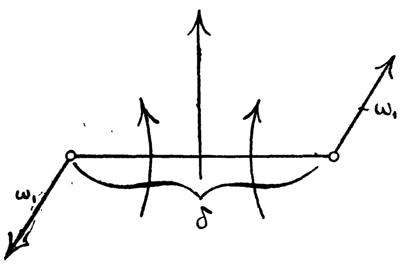
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_\nu = 1, \quad \varepsilon_{\nu+1} = \varepsilon_{\nu+2} = \ldots = \varepsilon_h = -1.$$

Z rovnice:

$$\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \omega_r = \sum_{r=1}^{\nu} \omega_r - \sum_{r=\nu+1}^{h} \omega_r = 0$$

plyne:

$$\sum_{r=1}^{\nu} \omega_r = \sum_{r=\nu+1}^{h} \omega_r = \tfrac{1}{2} \sum_{r=1}^{h} \omega_r.$$



Obr. 3.

Prvních ν rovnoměrných rotací dá rovnoměrnou rotaci bez translace, o obloukové rychlosti $\sum_{r=1}^{\nu} \omega_r = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{h} \omega_r$ kol osy jdoucí bodem (a', b', c'), kde

$$a' = \frac{\sum_{r=1}^{\nu} a_r \omega_r}{\sum_{r=1}^{\nu} \omega_r}, \quad b' = \frac{\sum_{r=1}^{\nu} b_r \omega_r}{\sum_{r=1}^{\nu} \omega_r}, \quad c' = \frac{\sum_{r=1}^{\nu} c_r \omega_r}{\sum_{r=1}^{\nu} \omega_r},$$

rovnoběžně s osami těchto ν rotací. Ostatních $h - \nu$ rovnoměrných rotací dá též rovnoměrnou rotaci bez translace se stejnou obloukovou rychlostí $\sum_{r=\nu+1}^{h} \omega_r = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{h} \omega_r$ kol osy rovnoběžné k osám těchto $h - \nu$ rotací, a jdoucí bodem (a'', b'', c''), kde:

$$a'' = \frac{\sum_{r=\nu+1}^{h} a_r \omega_r}{\sum_{r=\nu+1}^{h} \omega_r}, \quad b'' = \frac{\sum_{r=\nu+1}^{h} b_r \omega_r}{\sum_{r=\nu+1}^{h} \omega_r}, \quad c'' = \frac{\sum_{r=\nu+1}^{h} c_r \omega_r}{\sum_{r=\nu+1}^{h} \omega_r},$$

Máme tedy našich h rovnoměrných rotací redukováno na dvě rovnoměrné rotace. Tyto obě rotace mají stejné obloukové rychlosti, ale opačný smysl dají tedy rovnoměrnou translací bez rotace o rychlosti:

$$\frac{S}{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{h} \omega_r \,.\, \delta,$$

kde δ značí vzdálenost mezi antiparallelními osami obou rotací. Dosadíme-li za δ hodnotu:

$$\delta = \sqrt{(a' - a'')^2 + (b' - b'')^2 + (c' - b'')^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sum\limits_{r=1}^{\nu} a_r\omega_r - \sum\limits_{r=\nu+1}^{h} a_r\omega_r}{\frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{h}\omega_r}\right)^2 + \left(\frac{\sum\limits_{r=1}^{\nu} b_r\omega_r - \sum\limits_{r=\nu+1}^{h} b_r\omega_r}{\frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{h}\omega_r}\right)^2 + \left(\frac{\sum\limits_{r=1}^{\nu} c_r\omega_r - \sum\limits_{r=\nu+1}^{h} c_r\omega_r}{\frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{h}\omega_r}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{h}\omega_r} \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r a_r \omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r b_r \omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r c_r \omega_r\right)^2}$$

obdržíme výraz:

$$\frac{S}{\omega} = \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r a_r \omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r b_r \omega_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r c_r \omega_r\right)^2}$$

pro rychlost rovnoměrné translace (bez rotace), jež resultuje z oněch h daných rovnoměrných rotací za shora uvedených podmínek.

Body (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_h, b_h, c_h) jsou průseky os daných rotací s rovinou k nim kolmou.

Směr této translace jest kolmý ku směru daných os a vzdálenosti δ. (Dokončení.)