Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vladimír Knichal

O počtu členů determinantu, neobsahujících určité prvky. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 4, 333--342

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121967

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1926

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Počet členů determinantu, neobsahujících určité prvky.

Napsal *Vladimír Knichal.*

Mějme determinant n-tého stupně a buď μ libovolné, ale určité číslo (kladné, celé). Pak můžeme psáti:

$$n = \varrho \,.\, \mu + \alpha, \quad 0 \leq \alpha < \mu \tag{1}$$

Vyberme si z n řádků determinantu libovolně μ řádků, ze zbývajících opět μ řádků atd. To můžeme učiniti ϱ-kráte. Zbude nám α řádků. Tyto skupiny po μ řádcích nazveme postupně (M_1), (M_2) $\ldots (M_\varrho)$ a zbývající skupinu (obsahující α řádků) pak $(M_{\varrho+1})$. Podobně to proveďme se sloupci a obdržíme skupiny sloupců (N_1), $(N_2) \ldots (N_\varrho)$, $(N_{\varrho+1})$. Souhrn prvků, ve kterých se protíná skupina (M_i) se skupinou (N_i) nazveme (P_i). [Každá skupina (P_i) $i = 1, 2, \ldots, \varrho$ čítá μ^2 prvků, skupina $(P_{\varrho+1})$ pak α^2 prvků.]

Rozepíšeme-li daný determinant n-tého stupně obdržíme $n!$ členů. Z těch vybereme ty, které neobsahují žádný z prvků skupin (P_1), $(P_2) \ldots (P_{\varrho+1})$, a jich počet označme P_n. Počet ten je vyjádřen vzorcem:

$$P_n = \sum_{t=0}^{\alpha} \alpha_t^{(2[\alpha-t]+1)} \sum_{l=\alpha-t}^{n-t} (-1)^{n-l}\, l!\, \varrho! \sum_{\lambda} \frac{\alpha_0^{\lambda_0}\, \alpha_1^{\lambda_1} \ldots \alpha_\mu^{\lambda_\mu}}{\lambda_0!\, \lambda_1! \ldots \lambda_\mu!}, \tag{A}$$

kdež α_i značí $\alpha_i^{(2[\mu-i]+1)}$, $\alpha_0^{(l)} = 1$, dále $\alpha_i^{(l)} = \sum a_{\gamma_1} a_{\gamma_2} \ldots a_{\gamma_i}$, $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_i$ je určitá kombinace i té třídy bez opakování z prvků $1, 2, 3, \ldots, 2_i + l - 2$ taková, že neobsahuje žádné dva sousední prvky, $\sum\limits_{\gamma}$ pak vztahuje se na všechny takové kombinace, a_k je $k$tý člen řady 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, ... čili $a_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} k - \frac{1}{4}(-1)^k$ a konečně $\sum\limits_{\lambda}$ vztahuje se na všechna celistvá, kladná neb nulová řešení rovnic:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots + \mu\lambda_\mu &= n - l - t, \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\mu &= \varrho. \end{aligned} \tag{B}$$

Poznámka: Počet členů P_n nemůže záviseti na volbě skupin (M) a (N), neboť permutací rovnoběžných řad přejde determinant v jiný, který však obsahuje všechny členy (a jen členy) determinantu základního.

•

Rozřešíme napřed 3 pomocné úlohy:

A) Mějme čísla $\alpha_i^{(l)}$, definovaná rekurentní formulí:

$$\alpha_0^{(l)}=1,\ \alpha_i^{(l)}=a_{2i-1}\,\alpha_{i-1}^{(1)},+a_{2i}\,\alpha_{i-1}^{(2)}+a_{2i+1}\,\alpha_{i-1}^{(3)}+\ldots$$
$$+a_{2i+l-2}\,\alpha_{i-1}^{(l)} \tag{2}$$

kdež a_k je $k$tý člen řady 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4,... čili (jak snadno se přesvědčíme pro k liché a pro k sudé)

$$a_k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}(-1)^k. \tag{3}$$

Toto určení čísel $\alpha_i^{(l)}$ platí, jak patrno, pro $i>0$, $l>0$.

Ze vzorce (2) snadno plyne:

$$\alpha_i^{(l')}+a_{2i+l'-1}\,\alpha_{i-1}^{(l'+1)}=\alpha_i^{(l'+1)};\ l'>0,\ i>0.$$

Pro $l'=2l$, $l>0$ je z toho:

$$\alpha_i^{(2l)}+(i+l)\,\alpha_{i-1}^{(2l+1)}=\alpha_i^{(2l+1)}, \tag{4}$$

pro $l'=2+1$, $l\geq 0$ je:

$$\alpha_i^{(2l+1)}+(i+l)\,\alpha_{i-1}^{(2l+2)}=\alpha_i^{(2l+2)} \tag{5}$$

Dokážeme ještě:

$$\alpha_i^{(l)}=\sum_{\gamma} a_{\gamma_1}a_{\gamma_2}\ldots a_{\gamma_i}, \tag{6}$$

kdež $\sum\limits_{\gamma}$ se vztahuje na všechny kombinace $(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i)$ i té třídy bez opakování z prvků 1, 2, 3,..., $2i+l-2$ takové, že neobsahují žádné dva sousední prvky. Pro $i=1$ jsou ty kombinace prostě (1), (2), (3),... $(2.1+l-2)$ a tudíž $\alpha_1^{(l)}=a_1+a_2+a_3+$ $+\ldots+a_l$, což je zřejmě správné $(\alpha_0^{(l)}=1)$. Předpokládejme platnost (6) pro určité i.

Dokážeme, že platí pro $i+1$.

$$\alpha_{i+1}^{(l)}=a_{2i+1}\,\alpha_i^{(1)}+a_{2i+2}\,\alpha_i^{(2)}+\ldots+a_{2i+l}\,\alpha_i^{(l)}$$

$$\alpha_{i+1}^{(l)}=a_{2i+1}\Big(\sum_{\gamma'}a_{\gamma_1'}\,a_{\gamma_2'}\ldots a_{\gamma_i'}\Big)+a_{2i+2}\Big(\sum_{\gamma''}a_{\gamma_1''}\ldots a_{\gamma''_i}\Big)+\ldots$$
$$\ldots+a_{2i+l}\Big(\sum_{\gamma^{(l)}}a_{\gamma_1^{(l)}}\,a_{\gamma_2^{(l)}}\ldots a_{\gamma_i^{(l)}}\Big), \tag{7}$$

kdež $\sum\limits_{\gamma^{(k)}}$ se vztahuje na kombinace z prvků 1, 2, 3,... $2i+k-2$.

Chceme-li dokázati, že pravá strana (7) rovná se

$$\sum_{\gamma}a_{\gamma_1},a_{\gamma_2}\ldots a_{\gamma_{i+1}} \tag{8}$$

(kombinace jsou tvořeny z prvků 1, 2, 3,..., $2(i+1)+l-2$), stačí dokázati, že každý člen výrazu (7) vyskytuje se v (8) a to jen jednou a naopak. Buďtež indexy $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ldots$ seřaděny podle velikosti, počínaje nejmenším. Libovolný člen rozvinutého $k$tého členu výrazu (7) je $a_{\gamma_1^{(k)}} a_{\gamma_2^{(k)}} \dots a_{\gamma_i^{(k)}} a_{2i+k}$. Poněvadž $\gamma_1^{(k)} \dots \gamma_i^{(k)}$ je kombinace z prvků $1, 2, \dots, 2i+k-2$, je $\gamma_i^{(k)} \leq (2i+k)-2$, čili indexy $\gamma_i^{(k)}$ a $(2i+k)$ nejsou sousední. Prvky $\gamma_1^{(k)} \dots \gamma_i^{(k)}$, $2i+k$ tvoří kombinaci (bez opakování) $(i+1)$ třídy z prvků $1, 2, \dots, 2i+k$ čili, poněvadž $k \leq l$, z prvků $1, 2, \dots 2i+l$. Vyskytuje se tedy uvažovaný člen ve výraze (8) a to jen jednou, neboť (8) neobsahuje dva stejné členy (plyne z významu $\sum\limits_{\gamma}$). Podobně libovolný člen ve výraze (8) je $a_{\gamma_1} a_{\gamma_2} \dots a_{\gamma_{i+1}}$, kde $\gamma_{i+1} \leq$ $\leq 2i+l$. Poněvadž $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{i+1}$ neobsahují sousední prvky, platí: $\gamma_1 \geq 1$, $\gamma_2 \geq \gamma_1 + 2$, $\gamma_3 \geq \gamma_2 + 2, \dots \gamma_{i+1} \geq \gamma_i + 2$ čili, sečteme-li: $\gamma_{i+1} \geq 2i+1$. To znamená, že $a_{\gamma_{i+1}}$ se vyskytuje co koeficient při některém součtu ve výraze (7). Budiž $\gamma_{i+1} = 2i+k$. Pak ve všech členech výrazu (7), vyjma člen $k$tý, je nejvyšší index γ jiný než $\gamma_{i+1} = 2i+k$ a nemůže tudíž uvažovaný člen $a_{\gamma_1} \dots a_{\gamma_{i+1}}$ v nich býti obsažen. Naopak $a_{\gamma_1} a_{\gamma_2} \dots a_{\gamma_i}$ je jistě obsažen v $\sum\limits_{\gamma(k)} a_{\gamma_1^{(k)}} \dots$ $\dots a_{\gamma_i^{(k)}}$, neboť $\gamma_i \leq \gamma_{i+1} - 2 = 2i+k-2$ a tudíž $\gamma_1 \dots \gamma_i$ je kombinace $i$té třídy z prvků $(1, 2, \dots 2i+k-2)$, neobsahující prvky sousední. Je tam obsažen jen jednou, neboť $\sum\limits_{\gamma^{(k)}}$ neobsahuje dva stejné členy. Tím je důkaz vzorce (6) úplně proveden.

B) Mějme řadu čísel $u_n^{(i)}$, definovaných v určitém oboru pro n a i, a nechť platí pro ně následující vzorec:

$$u_n^{(i)} = \sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l u_{n+l}^{(i-1)}, \quad \text{pro } i>0,\ \varkappa_l \neq 0. \tag{9}$$

Jestliže je $u_n^{(i)}$ definováno, nechť jsou také definována čísla na pravé straně se vyskytující.

Veličina $u_u^{(i)}$ je lineární homogenní funkcí veličin $u^{(i-1)}$, tyto opět lineárními homog. funkcemi veličin $u^{(i-2)}$ atd. čili (poněvadž $i>0$) $u_n^{(i)}$ je lineární homog. funkcí veličin $u^{(o)}$:

$$u_n^{(i)} = \sum^{l} \varepsilon_l^{(n,\,i)} u_l^{(o)} \tag{10}$$

Při tom, jak patrno, musejí býti veličiny $u_l^{(o)}$ jistě definovány jen, je-li definováno $u_n^{(i)}$. K určení koeficientů $\varepsilon_l^{(n,\,i)}$ zaveďme si za $u_n^{(i)}$ určitou funkci proměnných (n, i):

$$u_n^{(i)} = q^n \left(\sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l \right)^i, \tag{11}$$

kde q je libovolné, ale určité číslo, vyjímaje konečný počet hodnot, kdy $q=0$ neb $\sum\limits_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l = 0$. Veličiny $u_n^{(i)}$ takto jsou definovány pro všechny hodnoty n a i. Je splněn také vzorec (9):

$$\sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l u_{n+l}^{(i-1)} = \sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^{n+l} \left(\sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l\right)^{i-1} = q^n \left(\sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l\right)^{i-1} \times$$

$$\times \sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l = q^n \left(\sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l\right)^i = u_n^{(i)}.$$

Poněvadž $u_l^{(o)} = q^l$, bude dle (10):

$$q^n \left(\sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l\right)^i = \sum^{l} \varepsilon_l^{(n,i)} q^l, \tag{12}$$

platný pro každé q (vyjímaje konečného počtu). Podle věty o neurčitých součinitelích bude $\varepsilon_l^{(n,i)}$ koeficient při q^l v rozvinutém výraze $q^n \left(\sum\limits_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l\right)^i$. Podle polynomické věty je však:

$$q^n \left(\sum_{l=c_1}^{c_2} \varkappa_l q^l\right)^i = q^n \sum_{\lambda} \frac{i!}{\lambda_{c_1}!\, \lambda_{c_1+1}! \ldots \lambda_{c_2}!} (\varkappa_{c_1} q^{c_1})^{\lambda_{c_1}} \times$$

$$\times (\varkappa_{c_1+1} q^{c_1+1})^{\lambda_{c_1+1}} \ldots (\varkappa_{c_2} q^{c_2})^{\lambda_{c_2}} = \sum_{\lambda} \frac{i!\, \varkappa_{c_1}^{\lambda_{c_1}} \varkappa_{c+1}^{\lambda_{c_1}+1} \ldots \varkappa_{c_2}^{\lambda_{c_2}}}{\lambda_{c_1}!\, \lambda_{c_1+1}! \ldots \lambda_{c_2}!} \,.$$

$$.\, q^{n + c_1 \lambda_{c_1} + (c_1+1) \lambda_{c_1+1} + \ldots + c_2 \lambda_{c_2}}, \tag{13}$$

kde se $\sum\limits_{\lambda}$ vztahuje na všechna celistvá, nezáporná řešení rovnice:

$$\lambda_{c_1} + \lambda_{c_1+1} \ldots + \lambda_{c_2} = i \tag{14}$$

Aby exponent při q byl l, musí

$$n + c_1 \lambda_{c_1} + (c_1 + 1) \lambda_{c_1+1} + \ldots + c_2 \lambda_{c_2} = l. \tag{15}$$

Bude tedy:

$$\varepsilon_l^{(n,i)} = \sum_{\lambda} \frac{i!\, \varkappa_{c_1}^{\lambda_{c_1}} \varkappa_{c_1+1}^{\lambda_{c_1+1}} \ldots \varkappa_{c_2}^{\lambda_{c_2}}}{\lambda_{c_1}!\, \lambda_{c_1+1}! \ldots \lambda_{c_2}!} \tag{16}$$

s podmínkami (14) a (15) pro λ. Odečteme-li od (15) c_1 násobnou (14), dostaneme:

$$1 \,.\, \lambda_{c_1+1} + 2 \,.\, \lambda_{c_1+2} + \ldots + (c_2 - c_1) \lambda_{c_2} = l - n - c_1 i. \tag{17}$$

Podmínky (14) a (17) jsou aekvivalentní podmínkám (14) a (15). Nejmenší hodnotu pro l ve vzorci (10) dostaneme, když za veličiny λ na levé straně rovnice (17) dáme hodnoty nejmenší, totiž 0.

Pak bude (n, i, c_1, c_2 jsou pevné hodnoty):

$$\min l = n + c_1 i \tag{18}$$

λ_{c_1} nabude hodnoty největší, totiž (podle (14)): $\lambda_{c_1} = i$.

Naopak pro největší hodnotu l bude λ_{c_1} nejmenší čili rovno 0 a tedy $\lambda_{c_1+1} + \lambda_{c_1+2} + \ldots + \lambda_{c_2} = i$. Tato rovnice se neporuší, když λ_{k_1} zmenšíme a λ_{k_2} o tolikéž zvětšíme. Tím se však levá strana rovnice (17) (pro $k_1 < k_2$) jistě zvětší a tedy také l. Největší l bude tedy pro $\lambda_{c_1+1} = \lambda_{c_1+2} = \ldots = \lambda_{c_2-1} = 0$, $\lambda_{c_2} = i$:

$$\max l = n + c_2 i. \tag{19}$$

Máme tedy celkem výsledný vzorec:

$$u_n^{(i)} = \sum_{l=n+c_1 i}^{n+c_2 i} \varepsilon_l^{(n_1 i)} u_l^{(o)}, \text{ kde} \tag{20}$$

$\varepsilon_l^{(n_1 i)}$ je určeno vzorcem (16) s podmínkami (14) a (17) pro λ.

C) Mějme determinant B stupně m tého, který nechť obsahuje řadu prvků d_1, d_2, $d_3 \ldots$ Označme ji (d). Máme-li nějaký determinant ν tého stupně, který obsahuje B jako subdeterminant, bude zcela určitý počet členů toho determinantu, neobsahujících žádný z prvků (d) a žádný z těch prvků, v nichž se p řádků a g sloupců doplňkového subdeterminantu protíná, neboť permutací rovnoběžných řad se ten počet nemění a nezáleží tudíž na poloze těch sloupců a řádků, jen když čísla ν, p, g jsou určitá. Ten počet označíme $P_\nu^{(p,g)}$. Mějme nyní determinant A stupně n tého, který nechť obsahuje co subdeterminant determinant B a budiž jeho doplněk:

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \, a_{13} \ldots a_{1r} \\ a_{21} \, a_{22} \ldots\ldots a_{2r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1} \, a_{r2} \ldots\ldots a_{rr} \end{vmatrix}$$

Skupinu prvků $a_{h',k'}$ pro $h' \leq h$, $k' \leq k$ označme (C_{hk}). Skupinu (C_{hk}) i (d) nazveme (D_{hk}). Pro h, neb k rovno 0 nechť nám značí symbol (D_{hk}) prostě (d). Podle hořejšího výměru bude počet členů determinantu A, neobsahujících žádný z prvků skupiny (D_{hk}), roven $P_n^{(hk)}$, kterýžto symbol se snadno rozšíří pro h neb k rovno 0. $P_n^{(h,o)} = P_n^{(o,k)} = P_n^{(o)}$. Tyto členy jsou dvojího druhu:

1. neobsahují zároveň žádný z prvků $a_{h+1,k'}$ (existují-li ty členy či-li má-li $P_n^{(h+1,k)}$ význam) pro $k' \leq k$ čili neobsahují žádný z prvků skupiny $(D_{h+1,k})$ a jich počet je $P_n^{(h+1,k)}$.

2. obsahují jeden z prvků $a_{h+1,k}$ $(k' \leq k)$. (Více jich obsahovati nemohou, neboť prvky $a_{h+1,k'}$ jsou v jedné řadě). Vyberme z nich ty členy, které obsahují a_{h+1,k_1} $(k_1 \leq k)$. Pak lze tento prvek vytknouti a zbývající část budou členy subdeterminantu A_{h+1,k_1} (existuje, když $n > 1$) a to takové, že neobsahují žádný z prvků skupiny $(D_{h,k})$. Z této skupiny nebude A_{h+1,k_1} obsahovati již sám

o sobě prvky v k_1 tém sloupci deteřminantu C a bude se tedy skládati ze subdeterminantu B (ten totiž vypuštěné řady protínati nemůže) a jeho doplňku, který ze skupiny ($C_{h,k}$) bude obsahovati prvky, ve kterých se protíná h řádků a $(k-1)$ sloupců. Bude tedy počet těchto členů $P_{n-1}^{(h,k-1)}$ nezávislý na k_1. Celkový počet členů skupiny 2. bude tedy (pro $k_1 = 1, 2, 3 \ldots k$): $kP_{n-1}^{(h,k-1)}$ a máme:

$$P_n^{(h,k)} = P_n^{h+1,k} + kP_{n-1}^{(h,k-1)} \text{ čili}$$

$$P_n^{(h+1,k)} = P_n^{(h,k)} - kP_{n-1}^{(h,k-1)} \tag{21}$$

Podobnou úvahou dostaneme (řádky vyměníme za sloupce):

$$P_n^{(h,k+1)} = P_n^{(h,k)} - hP_{n-1}^{(h-1,k)} \tag{22}$$

Tato úvaha, jak patrno, platí pro $m \geq 0$, $h \geq 1$, $k \geq 1$, mají-li jen levé strany vztahů (21) a (22) význam (pak také $n > 1$). Snadno se přesvědčíme (totožnou úvahou), že

$$P_n^{(1,1)} = P_n^{(o)} - P_{n-1}^{(o)} \quad \text{pro } n > 1. \tag{23}$$

Rozšíříme-li platnost rovnice

$$P_n^{(o)} = n! \quad (m = 0,\ n \geq 1) \tag{24}$$

i pro $n = 0$ (pak také $m = 0$, neboť $m \leq n$) a klademe-li tedy (symbol $P_o^{(o)}$ není definován): $P_o^{(o)} = 0! = 1$, bude (23) platiti i pro $n = 1$ (pak nutně $m = 0$), neboť skutečně $P_1^{(1,1)} = 1! - 0! = 0$.

Dokážeme nyní, že platí:

$$P_n^{(s,s)} = P_n^{(o)} - \alpha_1^{(2s-1)} P_{n-1}^{(o)} + \alpha_2^{(2s-3)} P_{n-2}^{(o)} - \alpha_3^{(2s-5)} P_{n-3}^{(o)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^s \alpha_s^{(1)} P_{n-s}^{(o)} = \sum_{t=o}^{s} (-1)^t \alpha_t^{(2[s-t]+1)} P_{n-t}^{(o)} \tag{25}$$

a dále

$$P_n^{(s,s+1)} = \sum_{t=0}^{s} (-1)^t \alpha_t^{(2[s-t]+2)} P_{n-t}^{(o)}, \tag{26}$$

jestliže levé strany těchto rovnic mají význam ($as \geq 1$).

Pro $s = 1$ máme z nich vztahy: $P_n^{(1,1)} = P_n^{(o)} - P_{n-1}^{(o)}$ a $P_n^{(1,2)} = I_n^{(o)} - 2P_{n-1}^{(o)}$, kteréžto skutečně platí [viz (22) a (23)].

Předpokládejme platnost (25) a (26) pro určité s. Pak bude [dle (21)]:

$$P_n^{(s+1\ s+1)} = P_n^{(s,s+1)} - (s+1) P_{n-1}^{(s,s)} = P_n^{(o)} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{s} (-1)^t \alpha_t^{(2[s-t]+2)} P_{n-t}^{(o)} - (s+1) \sum_{t=0}^{s-1} (-1)^t \alpha_t^{(2[s-t]+1)} P_{n-t-1}^{(o)} -$$

$$-(-1)^s (s+1) \alpha_s^{(1)} P_{n-s-1}^{(o)} = P_n^{(o)} + \sum_{t=1}^{s} [(-1)^t \alpha_t^{(2[s-t]+2)} P_{n-t}^{(o)} -$$

$$-(s+1)(-1)^{t-1} \alpha_{t-1}^{(2[s-t+1]+1)} P_{n-t}^{(o)}] + (-1)^{s+1} (s+1)\, \alpha_s^{(1)} P_{n-(s+1)}^{(o)}.$$

Klademe-li nyní do (4) $i = t \geq 1$, $l = s + 1 - t > 0$ a nahradíme-li $(s+1)\alpha_s^{(1)}$ podle (2) veličinou $\alpha_{s+1}^{(1)}$, máme:

$$P_n^{(s+1, s+1)} = P_n^{(o)} + \sum_{t=1}^{s} (-1)^t \alpha_t^{(2[s+1-t]+1)} P_{n-t}^{(o)} + (-1)^{s+1}$$

$$\alpha_{s+1}^{(1)} P_{n-(s+1)}^{(o)} = \sum_{t=o}^{s+1} (-1)^t \alpha_t^{(2[s+1-t]+1)} P_{n-t}^{(o)},$$

což je (25) klademe-li tam místo $s \ldots s+1$. Podobný výrok bychom dokázali o (26).

Užívali bychom při tom [dle (22)]:

$$P_n^{(s+1, s+2)} = P_n^{(s+1, s+1)} - (s+1)\, P_{n-1}^{(s, s+1)}$$

a pak vztahu (5).

*

Přistoupíme nyní k důkazu věty v úvodě citované. Označení o skupinách sloupců, řádků atd. tam učiněné podržíme i zde. Za determinant B v předcházející úvaze položme souhrn prvků, ve kterých se protínají skupiny řádků $(M_1)\,(M_2)\ldots(M_{i-1})$ se skupinami sloupců $(N_1)\,(N_2)\ldots(N_{i-1})$ a za skupinu (d) volme skupinu prvků $(P_1)\,(P_2)\ldots(P_{i-1})$. Označme $p_n^{(i')}$ počet členů determinantu $n$tého stupně, neobsahujících žádný z prvků $(P_1)\,(P_2)\ldots$ $\ldots(P_{i'})$: Pak bude $p_n^{(i)}$ znamenati počet členů, neobsahujících žádný z prvků skupiny (d) a žádný z těch prvků, ve kterých se μ řádků a μ sloupců doplňkového subdeterminantu ku B protíná.

Je tedy

$$p_n^{(i)} = P_n^{(\mu, \mu)} = \sum_{t=o}^{\mu} (-1)^t \alpha_t^{(2[\mu-t]+1)} P_{n-t}^{(o)} = \sum_{t=o}^{\mu} (-1)^t \alpha_t P_{n-t}^{(o)}$$

Úvaha, jak patrno, platí pro $i \geq 1$ a má-li $p_n^{(i)}$ význam čili je-li $i \leq \varrho$. Poněvadž, jak patrno, $P_{n-t}^{(o)} = p_{n-t}^{(i-1)}$, bude:

$$p_n^{(i)} = \sum_{t=o}^{\mu} (-1)^t \alpha_t p_{n-t}^{(i-1)} \tag{27}$$

pro každé i, pro něž $1 \leq i \leq \varrho$. Pro $i = 1$ bude $m = 0$ a tedy $p_n^{(o)} = n!$. Podle rozšíření (24) i pro $n = 0$ nutno klásti: $p_o^{(o)} = 0! = 1$. Klademe-li ve vzorci (9) $u_n^{(i)} = p_n^{(i)}$, $c_1 = -\mu$, $c_2 = 0$, $\varkappa_l = (-1)^l \alpha_{-l}$, máme vzorec (27) a tedy platí [dle (20)]:

$$p_n^{(\varrho)} = \sum_{l=n-\mu\varrho}^{n} \varepsilon_l^{(n, \varrho)} p_l^{(o)} = \sum_{l=n-\mu\varrho}^{n} \varepsilon_l^{(n, \varrho)}\, l!, \tag{28}$$

kde

$$\varepsilon_l^{(n, \varrho)} = \sum_{\lambda} \frac{\varrho!\,(-1)^{\mu\lambda_{-\mu} + (\mu-1)\lambda_{-\mu+1} + \ldots + 1 \cdot \lambda_{-1}}\, \alpha_\mu^{\lambda_{-\mu}} \cdot \alpha_{\mu-1}^{\lambda_{-\mu+1}} \ldots \alpha_o^{\lambda_o}}{\lambda_{-\mu}!\, \lambda_{-\mu+1}! \ldots \lambda_o!}$$

$\sum\limits_{\lambda}$ se vztahuje na veškerá celá, kladná (≥ 0) řešení rovnic!

$$\lambda_{-\mu}+\lambda_{-\mu+1}+\ldots\lambda_o=\varrho,$$
$$\lambda_{-\mu+1}+2\lambda_{-\mu+2}+\ldots+\mu\lambda_o=l-n+\mu\varrho.$$

Odečtěme od μ násobné 1. rovnice druhou a pišme místo λ_{-l} prostě λ_l:

$$\varepsilon_l^{(n,\varrho)}=\sum_{\lambda}\frac{\varrho!(-1)^{n-l}\alpha_0^{\lambda_0}\alpha_1^{\lambda_1}\ldots\alpha_\mu^{\lambda_\mu}}{\lambda_0!\lambda_1!\ldots\lambda_\mu!}\tag{29}$$

podmínkami pro λ:

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots\mu\lambda_\mu=n-l,$$
$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\mu=\varrho.$$

Odvození platí pro $\varrho\geq 1$. Vzorec (28) zůstává však v platnosti i pro $\varrho=0$, neboť (dle něj) $(p_n^{(o)}=n!$, což skutečně je správné. Analogicky jako (27) dokázali bychom: (nahradíme μ veličinou α)

$$p_n^{\varrho+1}=\sum_{t=0}^{\alpha}(-1)^t\alpha_t^{(2[\alpha-t]+1)}p_{n-t}^{(\varrho)}.\tag{30}$$

Dosadíme-li nyní za $p_{n-t}^{(\varrho)}$ ze vzorce (28) a uvážíme-li, že $p_n^{(\varrho+1)}=P_n$, dostaneme vzorec v úvodě citovaný.

*

Pro $\mu=1$ máme: ($\varrho=n$, $\alpha=0$)*)

$$P_n=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\frac{n!}{(n-l)!}=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots\pm\frac{1}{n!}\right).\tag{31}$$

Pro $\mu=2$ máme: 1. $n=2\varrho$, $\alpha=0$.

$$P_n=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}.\,l!\,\varrho!\sum_{\lambda}\frac{4^{\lambda_1}.\,2^{\lambda_2}}{\lambda_0!\,\lambda_1!\,\lambda_2!};\quad \begin{aligned}\lambda_1+2\lambda_2&=n-l\\ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2&=\varrho\end{aligned}\tag{32}$$

2. $n=2\varrho+1$, $\alpha=1$.

$$P_n=\sum_{t=0}^{1}\sum_{l=1-t}^{n-t}(-1)^{n-l}l!\,\varrho!\sum_{\lambda}\frac{4^{\lambda_1}.\,2^{\lambda_2}}{\lambda_0!\,\lambda_1!\,\lambda_2!};\quad \begin{aligned}\lambda_1+2\lambda_2&=n-l-t\\ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2&=\varrho\end{aligned}$$

čili

$$P_n=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{n-l}(l-1).(l-1)!\,\varrho!\sum_{\lambda}\frac{4^{\lambda_1}.\,2^{\lambda_2}}{\lambda_0!\,\lambda_1!\,\lambda_2!};\quad \begin{aligned}\lambda_1+2\lambda_2&=n-l\\ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2&=\varrho\end{aligned}\tag{33}$$

*) Pro $\mu=1$ řeší tuto úlohu R. Baltzer v „Theorie und Anwendung der Determinanten“ na str. 29 a E. Netto v „Lehrbuch der Combinatorik“ na str. 66 a násl., kde je poněkud odlišně sestavena. Zároveň nalezne tam čtenář další literaturu k této otázce se vztahující.

Tyto vzorce vyjadřují počet nenulových členů determinantu, jehož buď jedna, neb obě diagonály obsahují prvky vesměs nulové.

Poznámka: Vzorec v úvodě citovaný možno psáti také v tomto tvaru:

$$P_n = \varrho! \sum_{l=\alpha}^{n} \left(\sum_{\lambda} \frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_\mu^{\lambda_\mu}}{\lambda_0!\, \lambda_1! \dots \lambda_\mu!} \right) \cdot \sum_{t=0}^{\alpha} (-1)^{n-l-t} \alpha_t^{(2[\alpha-t]+1)} (l-t)!$$

s podmínkami pro λ:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \dots + \mu\lambda_\mu = n - l$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_\mu = \varrho.$$

Řešení této úlohy vzniklo na podnět p. prof. Dr. Petra jakožto zobecnění následujících úloh, které předložil p. prof. Dr. Bydžovský v prosemináři: Určiti počet nulových členů v determinantu, jehož prvky v hlavní diagonále se rovnají nule (s udaným výsledkem) a pak jehož prvky v obou diagonálách se rovnají nule. Zároveň děkuji p. prof. Dr. Bydžovskému a p. prof. Dr. Petrovi, že dali návrh a uskutečnili uveřejnění tohoto řešení a rovněž p. doc. Dr. Jarníkovi, že pročetl rukopis a upozornil mě na některé vady.

*

Le nombre des termes d'un déterminant qui ne contiennent pas certains éléments donnés.

(Extrait de l'article précédent.)

Choisissons, dans un déterminant du n-ième ordre, μ lignes et μ colonnes; soit (P_1) la matrice en laquelle se coupent ces lignes et ces colonnes. Parmi les lignes et les colonnes qui restent, choisissons encore μ lignes et μ colonnes et répétons ce procédé autant de fois qu'il est possible; on obtient ainsi une série $\varrho + 1$ de matrices (P_i), $i = 1, 2, \dots, \varrho + 1$ où par $P_{\varrho+1}$ est désignée la matrice quadratique à α lignes $(\alpha < \mu)$ en laquelle se coupent les lignes et les colonnes qui n'ont pas été supprimées dans le procédé précédent. Le nombre P_n de termes du déterminant ne contenant aucun élément des matrices (P_i) est donné par la formule (A) du texte, où α_i désigne $\alpha_i^{(2[\mu-i]+1)}$, $\alpha_0^{(l)} = 1$, $\alpha_i^{(l)} = \sum_\gamma a_{\gamma_1} a_{\gamma_2} \dots a_{\gamma_i}$; ici, $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i$ est une certaine combinaison sans répétition des éléments $1, 2, \dots, 2i + l - 2$ ne contenant aucun couple d'éléments voisins; et la sommation $\sum_\gamma$ s'étend à toutes les combinaison de cette espèce; $a_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}(-1)^k$; enfin la sommation $\sum_{\lambda}$ s'étend à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation (B) du texte.

Comme cas particuliers, la formule (31) du texte donne le nombre de termes non nuls d'un déterminant dont la diagonale a tous ses éléments nuls, la formule (32) le nombre de termes non nuls d'un déterminant où tous lés éléments des deux diagonales sont des zéros.