Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Špaček

Příspěvek k teorii funkcí prostých

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 2, 12--19

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121951`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1933

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Příspěvek k teorii funkcí prostých.

(Výtah z disertace.)

Lad. Špaček.

(Došlo 30. května 1932.)

V této práci odvodím některé podmínky, postačující k tomu, aby daná funkce byla prostá.

1. Mějme funkci $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, která je pro $|z| < 1$ regulární a různá od nuly mimo počátek, kde má jednoduchý nulový bod, a *není* prostá.[1]) Pak jest možno podle známé věty nalézti takové číslo r $(0 < r < 1)$, že křivka $w(t) = f(re^{it})$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ není jednoduchá; budiž tedy na př. $w(t_1) = w(t_2)$ $(0 \leqq t_1 < t_2 < 2\pi)$. Protože se podle předpokladu $w(t) = f(re^{it})$ nerovná nule pro žádné t, jest možno zvoliti hodnotu logaritmu tak, aby $\log w(t) = \log f(re^{it})$ byl spojitou funkcí proměnné t; z rovnice $w(t_1) = w(t_2)$ pak plyne, že, proběhne-li t interval $< t_1, t_2 >$, změní se $\log f(re^{it})$ o $2k\pi i$ (k je číslo celé).

Z rovnice $\log f(z) = \log z + \log \frac{f(z)}{z}$ je zřejmo, protože $\frac{f(z)}{z}$ nemá uvnitř jednotkové kružnice nulových bodů, že, probíhá-li t interval $< t_2, t_2 - 2k\pi >$, změní se $\log f(re^{it})$ o $-2k\pi i$. Proběhne-li tedy t interval $< t_1, t_2 - 2k\pi >$ (při čemž bod $z = re^{it}$ opíše křivku $\mathfrak{L}$), $\log f(re^{it})$ se nezmění; při tom z podmínky $0 \leqq t_1 < t_2 < 2\pi$ plyne, že $t_1 \neq t_2 - 2k\pi$. Jest tedy

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{d}{dz} (\log f(z))\, dz = \int_{\mathfrak{L}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{t_1}^{t_2 - 2k\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}\, ire^{it}\, dt = 0. \qquad (1)$$

Mějme nyní funkci $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, která je pro $|z| < 1$ regulární, od nuly různá kromě počátku, kde má jedno-

[1]) Budu nazývati stručně „prostou" takovou funkci, která je pro $|z| < 1$ regulární a nenabývá v žádné dvojici bodů uvnitř jednotkové kružnice téže hodnoty.

duchý nulový bod a ke které lze nalézti takové číslo α_0, že je pro $|z| < 1$

$$\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}\right) > 0 \tag{2}$$

(toto číslo α_0 je zřejmě od nuly různé a z (2) pro $z \to 0$ dokonce plyne, že je $\Re(\alpha_0) > 0$). Píšeme-li poslední integrál z (1) ve tvaru

$$\frac{i}{\alpha_0}\int_{t_1}^{t_2-2k\pi} \alpha_0 \frac{re^{it}\mathfrak{f}'(re^{it})}{\mathfrak{f}(re^{it})}\,dt$$

je zřejmo, že tato funkce nemůže býti neprostá.

Předpoklad, že funkce $\mathfrak{f}(z)$ je pro $|z| < 1$ regulární a od nuly různá kromě počátku, kde má jednoduchý nulový bod, smíme vynechati, předpokládáme-li, že funkce

$$\psi(z) = \frac{z\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)} \tag{3}$$

jest regulární pro $|z| < 1$ a rovna jedné pro $z = 0$; neboť z (3) plyne

$$\frac{\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)} = \frac{1}{z} + \frac{\psi(z)-1}{z}.$$

$$\log \mathfrak{f}(z) = \log z + \int_0^z \frac{\psi(z)-1}{z}\,dz + \log C$$

$$\mathfrak{f}(z) = Cze^{\int_0^z \frac{\psi(z)-1}{z}dz}$$

z čehož je naše tvrzení patrno.

Dokázali jsme tedy základní větu: Jestliže výraz $\frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}$ jest pro $|z| < 1$ regulární, pro $z = 0$ roven jedné a jestliže lze nalézti takové číslo α_0, aby pro $|z| < 1$ platilo $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}\right) > 0$, jest funkce $\mathfrak{f}(z)$ prostá.

Podmínky, aby $\frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}$ bylo pro $|z| < 1$ regulární a pro $z = 0$ rovno jedné, jsou zřejmě nutné; naproti tomu uvidíme, že podmínka $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}\right) > 0$ není nutná. Podmínka, aby $\frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}$ bylo pro $z = 0$ rovno jedné, je ekvivalentní s podmínkou, aby $\mathfrak{f}(z)$ mělo tvar $a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$.

2. Z odvozené věty můžeme získati podmínky pro koeficienty, postačující, aby funkce jimi určená byla prostá, užijeme-li Carathéodory-Schurova vyšetření funkcí, nabývajících pouze hodnot s kladnou reálnou částí a funkcí, nabývajících pouze hodnot z vnitřku jednotkové kružnice. Nejvhodnější tvar jejich výsledku pro naše vyšetřování je tento[2]): Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby podíl $\frac{\mathfrak{g}(z)}{\mathfrak{h}(z)}$ funkcí $\mathfrak{g}(z) = b_0 + b_1 z + \ldots$ a $\mathfrak{h}(z) = c_0 + c_1 z + \ldots$ byl pro $|z| < 1$ regulární a nabýval pouze hodnot z vnitřku jedničkové kružnice, je, aby determinanty

$$\delta_n = \left|\begin{array}{cccccccccc} \bar{c}_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_0 & \ldots & b_{n-2} \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \bar{c}_{n-3} & \ldots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & \ldots & b_0 \\ \bar{b}_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_0 & \ldots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{b}_{n-1} & \bar{b}_{n-2} & \bar{b}_{n-3} & \ldots & \bar{b}_0 & 0 & 0 & \ldots & c_0 \end{array}\right|$$

byly buď kladné pro všechna n nebo kladné pro $n \leqq N \geqq 1$ a rovny nule pro $n > N$. Z transformace $w = \frac{w' - 1}{w' + 1}$ (převádějící pravou půlrovinu roviny w' na vnitřek jednotkové kružnice roviny w) plyne, že k tomu, aby $\alpha_0 \frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}$ bylo pro $|z| < 1$ regulární a aby platilo pro $|z| < 1$ $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}\right) > 0$, je nutno a stačí, aby
$$\frac{\alpha_0\,\mathfrak{f}'(z) - \frac{\mathfrak{f}(z)}{z}}{\alpha_0\,\mathfrak{f}'(z) + \frac{\mathfrak{f}(z)}{z}}$$
bylo pro $|z| < 1$ regulární a mělo absolutní hodnotu menší než jedna. Označíme-li tedy $\tau_n(\alpha_0)$ determinant δ_n, ve kterém jsme položili $(\alpha_0(\nu + 1) + 1)\,a_{\nu+1}$ za c_ν a $(\alpha_0(\nu + 1) - 1)\,a_{\nu+1}$ za b_ν, plyne z věty Carathéodory-Schurovy, že funkce $\mathfrak{f}(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ je prostá, jestliže lze nalézti takové číslo α_0, aby bylo buď $\tau_n(\alpha_0) > 0$ pro všechna n nebo

[2]) Viz Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 147 (1917), str. 221.

$\tau_n(\alpha_0) > 0$ pro $n \leqq N \geqq 1$ a $\tau_n(\alpha_0) = 0$ pro $n > N$ (požadavek, aby bylo $\alpha_1 \neq 0$, plyne z podmínky $N \geqq 1$ čili $\tau_1 = |\alpha_1|^2 \cdot 4\Re(\alpha_0) \neq 0$).

Z rovnice

$$\alpha_0 \frac{z\,\mathrm{f}'(z)}{\mathrm{f}(z)} = \varphi(z)$$

čili

$$\alpha_0 z\,\mathrm{f}'(z) - \mathrm{f}(z)\,\varphi(z) = 0$$

plyne podle věty o neurčitých součinitelích (je-li $\mathrm{f}(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ a $\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots$) $\alpha_0 (n-1)\, a_n - \alpha_1 a_{n-1} - \ldots$

$$- \alpha_{n-1} = 0 \quad n = 2, 3, \ldots; \tag{4}$$

o koeficientech α_ν funkce $\varphi(z)$, nabývající pouze hodnot s reálnou částí kladnou, platí podle známé věty

$$|\alpha_\nu| \leqq 2\Re(\alpha_0) \leqq 2\,|\alpha_0| \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Předpokládáme-li, že pro $\nu < n$ platí $|a_\nu| \leqq \nu$, plyne z (4)

$$|a_n| \leqq \frac{1}{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n;$$

protože pak pro $n = 2$ plyne z (4) $|a_2| \leqq 2$, je pro funkce $\mathrm{f}(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, hovící podmínce (2), dokázán vztah

$$|a_n| \leqq n \tag{6}$$

3. Uvedu ještě dvojí zobecnění základní věty.

Budiž $z(\zeta)$ funkce regulární v jednotkové kružnici a zobrazující ji na „naříznutou" jednotkovou kružnici (t. j. jednoduše souvislou oblast, která vznikne z jednotkové kružnice vynecháním bodového množství $\mathfrak{M}$, jehož každý[3]) bod je bodem zhuštění bodů nevynechaných) a zachovávající počátek; inversní funkci k $z(\zeta)$ označme $\zeta(z)$.

Není-li funkce $\mathrm{f}(z)$ prostá, takže platí $\mathrm{f}(z_1) = \mathrm{f}(z_2)$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, $z_1 \neq z_2$, lze podle známých vět ke každému bodu z jistého okolí kteréhokoli z obou bodů z_1, z_2 nalézti takový bod z okolí druhého, že v obou těchto bodech nabývá $\mathrm{f}(z)$ téže hodnoty. Lze tedy nalézti také dva body této vlastnosti od sebe různé, z nichž ani jeden nepatří k $\mathfrak{M}$. Z toho plyne, že funkce $\mathrm{F}(\zeta) = \mathrm{f}(z(\zeta))$ není prostá.

Užijeme-li základní věty na funkci $\mathrm{F}(\zeta)$, vidíme, že funkci $\psi(z) = \dfrac{z\,\mathrm{f}'(z)}{\mathrm{f}(z)}$ v základní větě smíme nahraditi funkcí $\chi(\zeta) = \zeta \dfrac{\mathrm{f}'(z(\zeta))}{\mathrm{f}(z(\zeta))} z'(\zeta)$; uvážíme-li dále, že, je-li $\psi(z)$ v jednotkové kruž-

---

[3]) Následující věta by zůstala v platnosti, i kdyby pouze všechny body množství $\mathfrak{M}$, *ležící vně jisté kružnice* $|z| \leqq r < 1$, byly body zhuštění bodů nevynechaných.

nici regulární a v počátku rovno jedné, platí to i pro $\chi(\zeta)$ a zavedeme-li do $\chi(\zeta)$ proměnnou z vztahem $\zeta = \zeta(z)$, můžeme vysloviti zobecněnou větu takto: Funkce $\mathfrak{f}(z)$ je prostá, jestliže $\frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}$ je pro $|z| < 1$ regulární a pro $z = 0$ rovno jedné a jestliže jest možno nalézti takovou funkci $\zeta(z)$, zobrazující nařiznutou jednotkovou kružnici roviny z prostě na jednotkovou kružnici a zachovávající počátek, a takové číslo α_0, aby pro z z jednotkové kružnice po vynechání příslušného zářezu platilo $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)} \frac{\zeta(z)}{z\,\zeta'(z)}\right) > 0$.

Druhé zobecnění dostaneme, uvážíme-li, že funkce $\mathfrak{f}(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ je prostá, je-li prostá některá z funkcí $F(z) = \mathfrak{f}\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right) - \mathfrak{f}(\alpha) = A_1 z + \ldots$ ($|\alpha| < 1$); užitím základního kriteria na funkce $F(z)$ dostaneme obecnější postačující podmínky pro to, aby funkce $\mathfrak{f}(z)$ byla prostá.

Pomocí tohoto zobecnění můžeme ukázati, že podmínka $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}\right) > 0$ není nutná k tomu, aby funkce $\mathfrak{f}(z)$ byla prostá. Vezměme prostou funkci $F(z) = \frac{z}{1-z^2}$ [4] a utvořme z ní funkci $\mathfrak{f}(z) = F\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z}\right) - F(\frac{1}{2}) = \frac{5}{3}\frac{z(1+\frac{4}{5}z)}{1-z^2}$, která jest tedy také prostá. Výraz $\frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)} = \psi(z)$ jest roven $\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+\frac{4}{5}z}$. Klademe-li $z = -e^{it}$, můžeme pro $t \neq 0$, π psáti $\psi(-e^{it}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} - 5 + \varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Blíží se tedy $\psi(-e^{it})$ jednak k horní (pro $t \to +0$), jednak k dolní (pro $t \to -0$) části přímky $\Re(z) = -4$; protože mimo to $\psi(0) = 1$, není možno pro žádné α_0 splniti podmínku (2).

4. Mějme prostou funkci $\mathfrak{f}(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$; jestliže se při libovolném r $(0 < r < 1)$ při obíhání kružnice $|z| = r$ v kladném smyslu průvodič bodu $\mathfrak{f}(z)$ otáčí kolem počátku stále v kladném smyslu, nazývá se tato funkce hvězdovitou. Analyticky je tato vlastnost vyjádřena podmínkou $\Re\left(\frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}\right) > 0$.

Ze základní věty plyne, že můžeme předpoklad, že funkce $\mathfrak{f}(z)$ je prostá, vynechati, předpokládáme-li na př., že funkce $\frac{z\,\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)}$ je pro $|z| < 1$ regulární a že $a_1 \neq 0$, takže můžeme vysloviti větu:

[4]) Tento příklad mi byl písemně sdělen p. prof. Kösslerem.

Funkce $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ je hvězdovitá tehdy a jen tehdy, jestliže $a_1 \neq 0$ a jestliže funkce

$$\varphi(z) = \frac{z\,f'(z)}{f(z)} \tag{7}$$

je pro $|z| < 1$ regulární a nabývá pouze hodnot s kladnou reálnou částí. Požadavek $a_1 \neq 0$ je ekvivalentní s požadavkem $\varphi(0) = 1$.

Použitím transformace $w = \dfrac{w' - 1}{w' + 1}$ a Schwarzova lemmatu[5]) můžeme podmínku $\varphi(z)$ regulární a $\Re\,(\varphi(z)) > 0$ pro $|z| < 1$ nahraditi podmínkou $\dfrac{1}{z}\,\dfrac{f'(z) - \dfrac{f(z)}{z}}{f'(z) + \dfrac{f(z)}{z}}$ regulární a $\left|\dfrac{1}{z}\,\dfrac{f'(z) - \dfrac{f(z)}{z}}{f'(z) + \dfrac{f(z)}{z}}\right| \leqq 1$ pro $|z| < 1$. Z věty Schurovy pak plyne věta:

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby funkce $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ byla hvězdovitá, je, aby $a_1 \neq 0$ a aby determinanty

$$\sigma_n = \begin{vmatrix} 2\bar{a}_1 & 0 & \ldots & 0 & a_2 & 2a_3 \ldots & (n-1)\,a_n \\ 3\bar{a}_2 & 2\bar{a}_1 & \ldots & 0 & 0 & a_2 \ldots & (n-2)\,a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n\bar{a}_{n-1} & (n-1)\,\bar{a}_{n-2} & \ldots & 2\bar{a}_1 & 0 & 0 \ldots & a_2 \\ \bar{a}_2 & 0 & \ldots & 0 & 2a_1 & 3a_2 \ldots & n a_{n-1} \\ 2\bar{a}_3 & \bar{a}_2 & \ldots & 0 & 0 & 2a_1 \ldots & (n-1)\,a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)\,\bar{a}_n & (n-2)\,\bar{a}_{n-1} & \ldots & \bar{a}_2 & 0 & 0 \ldots & 2a_1 \end{vmatrix}$$

byly buď kladné pro všechna n nebo kladné pro $n \leqq N$ a rovny nule pro $n > N$.

Abychom lépe viděli, jakých hodnot smějí koeficienty hvězdovitých funkcí nabývati, postupujeme takto: z rovnice (7), psané ve tvaru $z\,f'(z) = f(z)\,\varphi(z)$, plyne podle věty o neurčitých součinitelích (je-li $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ a $\varphi(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots$)

$$(\nu - 1)\,a_\nu - a_{\nu-1}\alpha_1 - \ldots - \alpha_{\nu-1} = 0 \quad \nu = 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Jsou-li koeficienty $a_2, a_3, \ldots, a_n$ tak zvoleny, aby existovala hvězdovitá funkce, začínající těmito koeficienty $1, a_2, \ldots, a_n$, jsou koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, vypočtené z rovnic (8), psaných postupně pro $\nu = 2, 3, \ldots, n$, takové, že existuje funkce $\varphi(z)$, reg. pro $|z| < 1$ a nabývající pro $|z| < 1$ pouze hodnot s kladnou

[5]) Za předpokladu $a_1 \neq 0$.

reálnou částí a začínající těmito koeficienty $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; koeficient α_n pak smí nabývati všech hodnot uvnitř a na obvodu jisté kružnice (jak plyne na př. z Carathéodory-Toeplitzova vzorce)[6]), jejíž poloměr (závislý na $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ a tedy i $a_2, \ldots, a_n$) je nejvýše roven dvěma (jak plyne ze vztahu (5)); zvolíme-li α_n na obvodu této kružnice, je tím funkce $\varphi(z)$ určena a má tvar $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \frac{1 + \omega_\nu z}{1 - \omega_\nu z}$, $|\omega_\nu| = 1$, $\lambda_\nu \geqq 0$ pro $\nu = 1, \ldots, n$, $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$. Přeneseme-li tyto věty pomocí (7) a (8) na funkce hvězdovité, dostaneme, že koeficient a_{n-1} smí nabývati všech hodnot uvnitř a na obvodu jisté kružnice, jejíž poloměr je roven nejvýše $\frac{2}{n}$; zvolíme-li a_{n+1} na obvodu této kružnice, jest tím hvězdovitá funkce určena a má tvar $\frac{z}{\prod_{\nu=1}^{n} (1 - \omega_\nu z)^{\mu_\nu}}$, $|\omega_\nu| = 1$ $\mu_\nu \geqq 0$ pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu = 2$.

Mějme prostou funkci $F(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$; jestliže se pro libovolné r $(0 < r < 1)$ při obíhání kružnice $|z| = r$ v kladném smyslu tečna obrazu této kružnice otáčí stále v kladném smyslu, nazývá se tato funkce konvexní. Protože se dále zřejmě tato tečna, jejíž směr je dán vektorem $izF'(z)$, otočí při jednom oběhu kružnice $|z| = r$ o 2π, je funkce

$$f(z) = z\,F'(z) \tag{9}$$

hvězdovitá. Platí však také naopak, že, máme-li hvězdovitou funkci $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ a utvoříme-li z ní funkci $F(z)$ vztahem (9), jest tato funkce konvexní. Je zřejmo, že k tomu stačí dokázati, že je prostá. Kdyby však nebyla prostá, křivka $w(t) = F(re^{it})$ $o \leqq t < 2\pi$ by se (pro vhodné r) přetínala a rozpadala tedy na křivky $\mathfrak{L}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$. Tečna každé z těchto křivek by se při jejím oběhu otočila (spojitě, protože podle (9) je zřejmě pro $|z| < 1$ $F'(z) \neq 0$) o více než π (neboť jinak by bylo možno najíti takové α, že by pro všechny vnitřní body křivky platilo $\Re\,(\alpha\, w'(t)) > 0$ a nebylo by tedy možno splniti podmínku uzavřenosti $\int_{(\mathfrak{L}_\nu)} w'(t)\, dt = 0$), což je ve sporu s tím, že se podle (9) při celém oběhu má otočiti o 2π.

Užitím vzájemně jednoznačného přiřazení funkcí konvexních $F(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ a hvězdovitých $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ rovnicí (9) můžeme přenésti lehce věty o funkcích hvězdovitých na funkce konvexní.

---

[6]) Viz na př. Schur, loc. cit. str. 229.

Contribution à la théorie des fonctions univalentes.

(Extrait de l'article précédent.)

Soit $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ une fonction holomorphe et différente de zéro, pour $|z| < 1$, excepté à l'origine, où elle a un zéro simple, et *non* univalente. Or, on peut trouver un $r < 1$ tel que la courbe $w(t) = f(re^{it})$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ ait un point double; soit $p.e. f(re^{it_1}) = f(re^{it_2})$ $(o \leqq t_1 < t_2 < 2\pi)$. Lorsque t varie de t_1, à t_2, $\log f(re^{it})$ augmente de $2k\pi i$ (k entier) et, par conséquent, lorsque t parcourt l'intervalle $< t_1, t_2 - 2k\pi >$ (z décrivant la courbe $\mathfrak{L}$), $\log f(z)$ ne change pas. Dès lors, on peut écrire

$$\int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{d}{dz} (\log f(z))\, dz = \int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \int\limits_{t_1}^{t_2 - 2k\pi} re^{it} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} dt = 0.$$

Il en résulte le théorème suivant:

Si la fonction $\frac{z f'(z)}{f(z)}$ est holomorphe pour $|z| < 1$ et égale à 1 pour $z = 0$ et si on peut trouver un nombre α_0 tel que $\mathfrak{R}\left(\alpha_0 \frac{z f'(z)}{f(z)}\right) > 0$, la fonction $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ est pour $|z| < 1$ holomorphe univalente. Ces conditions ne sont pas nécessaires, comme montre la fonction $\frac{z(1 + \frac{4}{5}z)}{1 - z^2} = \frac{3}{5} \frac{\frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z}}{1 - \left(\frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z}\right)^2} - \frac{2}{5}$.

— L'auteur donne des généralisations et des applications de ce théorème.