Václav Skalický
Grafické metody v počtu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 2, D14--D19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121949

VÁCLAV SKALICKÝ:

Grafické metody v počtu pravděpodobnosti.

Ve výroční zprávě r. g. v Nových Zámcích za r. 1930-31 pojednal jsem stručně o metodickém postupu v počtu pravděpodobnosti založeném na pravděpodobnosti empirické (induktivní, a posteriori) a zvláště pak o pravděpodobnosti trvání lidského života. Jeden odstavec tohoto pojednání zmiňuje se o křivce úmrtnosti a upozorňuje na možné užití grafických metod v příslušných úlohách. V dalším nechť je o této možnosti pojednáno podrobněji.

I. *Křivka úmrtnosti a úlohy nejjednodušší.*

Východiskem úloh o pravděpodobnosti lidského života je statistika úmrtnosti obyvatelstva a její tabulky. Vezmeme-li za základ jistý kolektiv novorozených v počtu $l(0)$, jest počet žijících z tohoto kolektiva po x letech $l(x)$.

Příslušné grafické znázornění nebývá zpravidla přímo předmětem výkladu učebnice, sbírky úloh však je (i některé grafy odvozené) zařazují mezi úkoly k cvičení, což je jistě chvályhodno. Žáci sestrojují tu z jednotlivých údajů tabulky spojitou křivku. Tu je na místě upozorniti je na důležitý rozdíl oproti některým grafům, které hotovili na stupni středním. Jedná-li se o znázornění průběhu teploty z konečného počtu pozorování (nejlépe ekvidistantních), je zřejmo, že čím hustší volíme síť pozorování, tím přesněji můžeme sestrojiti příslušnou křivku, tím podrobněji jsme informováni o jejím průběhu. Zvolíme-li interval mezi dvěma po sobě jdoucími pozorováními menší než jisté číslo, bude oscilace teploty uvnitř příslušného intervalu rovněž menší než jisté číslo a toto číslo lze podle našich představ o změnách teploty učiniti libovolně malé zvolením dosti těsné sítě pozorování; změnu teploty nazýváme spojitou. Třebaže věc zdaleka není tak jednoduchá, a též záznam obyčejného thermografu nutno pokládati jen za aproximaci skutečného průběhu příslušné funkce,[1]) jest tento příklad zcela rozdílný od grafu funkce $l(x)$.

Přistupme tedy blíže k úvaze o charakteru naší funkce. Kdybychom chtěli pokládati funkci $l(x)$ za definovanou pro každé x v jistém souvislém intervalu nezávisle proměnné (času), nahlédneme nemístnost sestrojování spojité křivky, neboť skutečný počet osob žijících může se měniti jen skokem, přetržitě a naprosto nikoli spojitě. Dávají-li nám tabulky možnost definice $l(x)$ jen pro sou-

---

[1]) Viz zajímavé místo v Lietzmannově metodice (I. díl-I. kap.), kdež se poukazuje na okolnost, že funkce spojité, všude oscilující, nejsou tak daleco vzdáleny životu, jak by se zdálo. Připojena je tu reprodukce záznamu Toeplerova barovariografu. Je-li vůbec možno otevříti žákům výhled do tak zajímavé oblasti „pathologických" funkcí, je tento příklad nad jiné vhodný.

stavu isolovaných bodů, jsme konec konců oprávněni znázorniti funkci grafem jen pro tyto body a spojování souvislou křivkou sleduje tu vlastně jen požadavek přehlédnosti, jemuž by však bylo vyhověno stejně dobře diagramem proužkovým. Ostatně základem tabulek není určitý skutečný kolektiv $l(0)$, nýbrž celá tabulka je průměrem z mnoha pozorování a její x-tý člen by bylo nutno náležitě definovat. Je ovšem zřejmo, že v dalším lze s prospěchem užívati obvyklé křivky, aniž by to bylo nějak na újmu správnosti a užitečnosti nabytých výsledků, pokládám však upozornění uvedené v minulých odstavcích za moment didakticky dosti cenný.

Učitel-fysik může tu připojiti poznámku, jak moderní atomová a kvantová teorie pozměňuje naše názory o spojitosti fysikálních dějů, a kterak v důsledku toho vlastně i u „spojitých" grafů fysikálních je v jádru příbuznost s charakterem funkce $l(x)$.

Jak jednoduše sestrojiti z křivky $l(x)$ pravděpodobnosti

$$p = \frac{l(x+n)}{l(x)} \quad \text{a} \quad q = 1 - \frac{l(x+n)}{l(x)},$$

uvedl jsem ve svém citovaném článku. Že je možno tak sestrojiti obecněji pravděpodobnosti úmrtí v mezích určitého období, t. j.

$$p_{m,n} = \frac{l(x+m) - l(x+n)}{l(x)},$$

specielně pak

$$p_{m-1,m} = \frac{l(x+m-1) - l(x+m)}{l(x)},$$

t. j. pravděpodobnost smrti osoby x-leté v $x+m$-tém roce jejího věku, je zřejmo.

II. *Diferenční křivka a stupnice.*

Vypočteme-li rozdíly mezi po sobě jdoucími členy tabulky $l(x)$, zjistili jsme počet osob z původního kolektivu $l(0)$, které umírají v 1. roce života, v druhém, třetím atd. Označíme-li příslušnou funkci $L(x)$, jest

$$L(x) = l\,(x-1) - l(x).$$

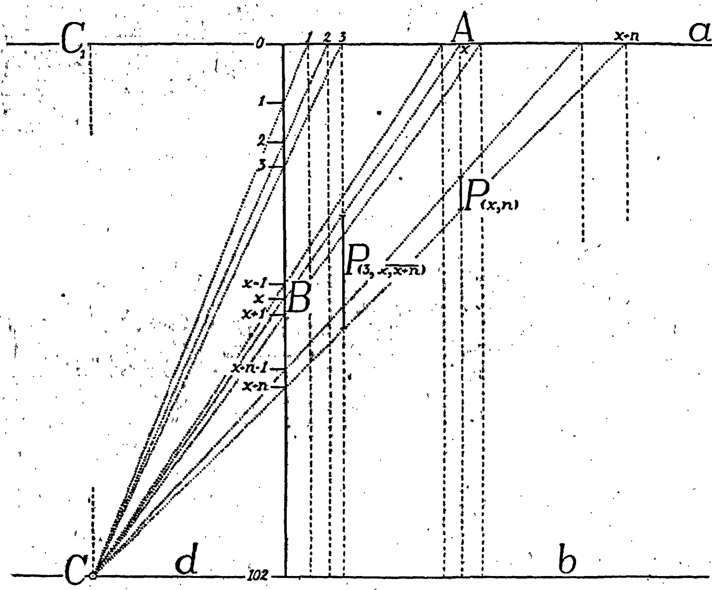
Tato funkce je definována jen v isolovaných bodech (pro $x \geq 1$ a při tom celistvé), a spojení souvislou křivkou (diferenční k.) je tu ovšem ještě méně odůvodněno než u funkce $l(x)$ a má význam jen pro větší přehlednost.[2])

Pro zjištění pravděpodobnosti úmrtí v určitém věku je užitečnější než tato křivka diferenční stupnice. Její sestrojení je velmi

[2]) Volba měřítka pořadnic skýtá tu jistou potíž. Pro větší názornost je nutno voliti měřítko značně větší než u $l(x)$, což však má za následek, že pro prvé hodnoty x vyběhne $L(x)$ do značné výše, takže není v témž obrázku pro tyto hodnoty zakreslitelné.

jednoduché. Hodnoty $l(x)$ nanášejme na přímku z téhož bodu v témž směru a koncové body očíslujeme 0, 1, 2, . . ., x, . . . Vzniklá nerovnoměrná stupnice je vlastně vhodně kotovaný průmět křivky $l(x)$ do osy pořadnic.

Volíme-li celkovou délku diferenční stupnice, t. j. $l(0)$, za jednotku (učiníme-li tedy na př. $l(0) = 10$ cm), znamenají vzdálenosti jednotlivých stupňů diferenční stupnice hodnoty pravdě-



podobností, že osoba právě narozená zemře v určitém věku. Zavedeme-li znak $P(x, n)$ pro pravděpodobnost osoby x-leté, že zemře v $x + n$-tém roce svého věku, tedy

$$P(x, n) = \frac{l(x + n - 1) - l(x + n)}{l(x)} = \frac{L(x + n)}{l(x)},$$

dává nám diferenční stupnice přímo hodnoty $P(0, n)$ pro všechna n.

Abychom určili i pro x od nuly různé hodnotu $P(x, n)$, uvažme, že

$$P(x, n) = P(0, x + n) \cdot \frac{l(0)}{l(x)},$$

tedy

$$P(x, n) : P(0, x + n) = l(0) : l(x).$$

Pravděpodobnosti pro osoby věku x obdržíme tedy zvětšením jisté části diferenční stupnice v poměru $l(0) : l(x)$, což lze pro větší počet hodnot x provésti nejsnadněji podle připojeného schemat. obrázku. K diferenční stupnici $0, 1, 2, \ldots, x, \ldots$ (na obrazci svislá stupnice) připojíme v koncových bodech (0, 102) dvě kolmé přímky a, b. Z vhodně zvoleného bodu C přímky b promítneme stupnici svazkem paprsků a zjistíme jejich průseky s přímkou a, jež rovněž očíslujeme (vodorovná stupnice). Vedeme-li bodem x stupnice takto nově vzniklé kolmici k a, obdržíme na ní stupnici $P(x, n)$, tak jako nám diferenční stupnice přímo poskytovala $P(0, n)$.

Při praktickém provádění objeví se však potíže. Diferenční stupnice je v některých částech příliš hustá, takže pro $P(x, n)$ vycházejí čísla příliš malá, a kromě toho je v obvyklých rozměrech konstrukce velmi nepřesná. Způsobem vyloženým lze však bez uvedené závady řešiti úlohy, v nichž se žádá výpočet pravděpodobnosti úmrtí v určitém delším období. Jedná se při tom o sestrojení výrazu

$$\frac{l(x + n_1) - l(x + n_2)}{l(x)} = P\,(x, \overline{n_1, n_2}),$$

což je pravděpodobnost, že věk, v němž osoba zemře, bude v mezích $(x + n_1, x + n_2)$. Úloha řešená dříve jest zvláštním případem této; jest totiž

$$P(x, n) = P\,(x, \overline{n - 1, n}).$$

Můžeme na př. sestrojiti pro osobu x-letou stupnici pravděpodobnosti, že umře v prvém dalším desítiletí, v druhém, třetím atd. V obrazci znázorněno sestrojení pravděpodobnosti osoby 3-leté, že zemře ve věku $x + 3$ až $x + 3 + n$.

Stupnice na přímce a poskytuje též jistou zajímavost (viz obr.). Označíme-li vzdálenost $\overline{C\,102} = d$, jest (z podobnosti $\triangle C\,102\,B$, $\triangle AC_1C$)

$$d : l(x) = C_1A : l(0),$$

t. j., ježto zvoleno $l(0) = 1$

$$C_1A = \frac{d}{l(x)}.$$

Stupnice přímky a je tedy obrazem funkce $\frac{1}{l(x)}$ v měřítku d a s počátečním bodem C_1.

III. *Pravděpodobná a průměrná délka života.*[3])

Určení pravděpodobné délky života osoby x-leté vede k řešení rovnice

$$\frac{l(x + r)}{l(x)} = \frac{1}{2}.$$

[3]) Názvy jsou v souhlasu s učebnicí Bydžovského i Mukovou; prvá však probírá jen druhý z obou pojmů (důležitější po stránce praktické i didaktické).

Na základě křivky $l(x)$ jest určení $x + r$ zcela snadné jakožto úloha obrácená k určení p. Naproti tomu určení průměrné délky života je zajímavější. Počet let, který průměrně ještě prožije osoba x-letá, je dán výrazem

$$\frac{1}{l(x)}\left[\frac{l(x)}{2} + l(x+1) + l(x+2) + \ldots + l(102)\right].$$

Výraz v závorce však není nic jiného (až na multiplikativní konstantu, která závisí na obou měřítkách příslušného grafu, a kterou lze učiniti rovnou jednotce) než lichoběžníkové pravidlo pro mechanickou kvadraturu (poslední člen lze psáti též $\frac{1}{2}l(102)$, ježto $l(102) = 0$). Vede tedy grafické řešení této úlohy k planimetrování.

Buďtež měřítka na osách q_1, q_2; znázorní se tedy na ose časové 1 rok délkou q_1 mm, na ose pořadnic 1 osoba délkou q_2 mm (hodí se na př. $q_1 = 2$ mm, $q_2 = 0{,}002$ mm). Jedná-li se o osobu x-letou, jejíž průměrný další život jest ϱ let, určeme plochu diagramu $l(x)$ vpravo od pořadnice příslušné k x. Podle lichoběžníkového pravidla jest

$$P = q_1 q_2 \left[\frac{l(x)}{2} + l(x+1) + l(x+2) + \ldots\right]$$

a tedy

$$\varrho = \frac{P}{q_1 q_2\, l(x)}.$$

Planimetrování plochy P provedeme na mm papíře, nebo i vážením přesně vystřižené plochy a porovnáváním se zváženým obdélníkem téhož papíru známého obsahu.

IV. *Všeobecné poznámky.*

Co se tkne výhod úloh tvořených v duchu tohoto článku, lze uvésti předně po stránce obsahové větší jejich životnost proti oblíbeným úlohám o kostkách, kartách, koulích a urnách. Tvoří též důkladnější přípravu k sociálně důležité teorii pojišťování proti výchovně ne zcela bezzávadným příkladům o hazardních hrách. Za velmi cenný moment možno dále pokládati okolnost, že se tu obíráme funkcí dvou proměnných ($P(x, n)$), pro kterou metoda grafická dává možnost sledovati funkcionální závislost na změnách jednotlivých proměnných. Po stránce formy výkladu: Pěstování grafických metod je didakticky žádoucí, neboť je názorné a odpovídá nejlépe nejhojněji zastoupenému opticko-motorickému typu představivosti. Hotovení grafů cvičí a zjemňuje také mechanickou zručnost a obratnost. Příležitost dotknouti se důležitých pojmů precisní matematiky (jako spojitosti, monotonie funkce a pod.), jak bylo v předešlém ostatně naznačeno, není též podřadného významu.

S opačné strany lze namítnouti totéž, co v tak mnohých případech: nedostatek času. Odsuneme-li stranou možnost plného využití grafických metod pro individuální práce jednotlivých schopnějších, svým založením na věci více interesovaných žáků, a dále eventuelní budoucí možnosti elektivního systému, v němž by i v matematice bylo možno s kroužkem vybraných žáků více pořídití než dosud, zbývají dvě otázky k projednání. Prvá týká se užití grafů hotových buď úplně nebo částečně. Bylo by jistě možno vydati přesnou křivku úmrtnosti jako doplněk tabulek, a dále i diferenční stupnici ve vhodném měřítku. Prvý graf by ostatně i dnes, v obvyklém způsobu výkladu, měl svůj význam. Druhá otázka týká se problému, co by bylo omeziti jen na nejnutnější míru. Pojistnou matematiku jistě ne v první řadě, ačkoli i tu není potřebí věnovati příliš mnoho místa tak speciální části vědy (nevychováváme přece pojistné matematiky!) zvláště, omezuje-li se poučení jen na matematický obsah problému a pomíjí se sociální význam pojištění vůbec. Tedy příklady o hrách a průpravu k počtu pravděpodobnosti — kombinatoriku. Praví-li o ní Lietzmann, že je to umírající větev matematiky, počet pravděpodobnosti však živoucí, lze se stejně oprávněně vyjádřiti obdobně o teorii her a aplikacích počtu pravděpodobnosti na statistiku, pojišťování a vědy přírodní. Stoupenci ryze formálních cílů školního výcviku jistě by želeli omezení kombinatorických příkladů, jež nesporně znamenitě cvičí logickou soudnost. Avšak schopnosti lze cvičiti na materiálu téměř každém, souvislost se životem a jeho problémy je však přidána jen v případech některých. A požadavky života jistě jsou činitelem, jehož je nutno dbáti v přední řadě.

DROBNOSTI.

Ohyb světla. Známý ohybový zjev, že pouliční světla pozorována sklem pokrytým drobnými ledovými krystalky (na př. v zimě oknem tramvaye) jsou obklopena duhově zbarvenými kruhy, napodobuje se obyčejně tím, že na světlo svíčky nebo žárovky díváme se sklem poprášeným plavuňovým práškem. Daleko lépe lze pokus provésti s výtrusy pýchavek; velmi dobře se k tomu hodí výtrusy pýchavko-lanýžovité houby Elaphomyces granulatus (jelenka zrnitá), zvané lékárnicky Boletus cervinus; její usušené plodnice možno velmi levně koupiti v lékárnách (používá se jich v dobytčím lékařství). Poprášíme-li černými výtrusy houby jemně sklo a hledíme-li jím na světlo vzdálené svíčky, uvidíme