Jan Srb

Autopolární normální jehlany polárnosti n-rozměrného prostoru

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 2, 49--59

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121932`

Autopolárné normální jehlany polárnosti n-rozměrného prostoru.

Jan Srb, Jihlava.

(Došlo dne 20. listopadu 1945.)

Pomocí věty, dokázané v první části článku o autopolárných normálních jehlanech, provádím v druhé části syntheticky projektivní klasifikaci polárnosti, tedy i nadkvadrik n-rozměrného prostoru. Jak lze touto cestou jednoduše dospět k afinní a metrické klasifikaci nadkvadrik, ukáži v práci další.

I.

Pro každou polárnost n-rozměrného prostoru platí věta: *Autopolárné normální jehlany téže polárnosti n-rozměrného prostoru jsou téhož druhu*, t. j. přímkové hrany dvou různých autopolárných jehlanů téže polárnosti n-rozměrného prostoru je vždy možno tak navzájem přiřadit, že každé hraně jednoho jehlanu odpovídá jediná hrana druhého jehlanu tak, že hranám procházejícím jedním vrcholem jednoho jehlanu odpovídají hrany procházející jedním vrcholem jehlanu druhého, a že involuce harmonických pólů indukované polárnosti na korespondujících si hranách obou jehlanů jsou téhož druhu.

1. Autopolárné trojúhelníky téže rovinné polárnosti s jedním společným vrcholem jsou téhož druhu.

Důkaz: *Polárnosti nesingulární.* Z bodu D jedné strany, na př. BC trojúhelníku ABC promítněme čtyři body A, B, S', S'' ($A \neq B \neq S' \neq S''$) druhé strany; na př. AB, na třetí stranu CA do bodů A, C, D' D''. Pak $Dp\,(A, B, S', S'') = Dp\,(A, C, D', D'')$, t. j. neoddělují-li body S', S'' body A, B, neoddělují také body D', D'' body A, C. Platí tedy v perspektivnosti se středy S', S'' ležícími na straně AB trojúhelníku ABC:

(1,1) Neoddělují-li středy S', S'' vrcholy A, B a korespondují-li v perspektivnosti se středem S' bodům úsečky $\overline{BC}(\overline{CB})$[1]) body úsečky $\overline{AC}$, korespondují také v perspektivnosti se středem S'' bodům úsečky $\overline{BC}(\overline{CB})$ body úsečky $\overline{AC}$.

(1,2) V nezvrhlé rovinné polárnosti existují pouze dva druhy autopolárných trojúhelníků, a to s indukovanými involucemi harmonických pólů a) na všech třech stranách eliptickými, b) na jedné straně eliptickou a na dvou stranách hyperbolickými.[2])

Buďte ABC, $A'B'C'$ dva různé autopolárné trojúhelníky téže rovinné polárnosti se společným vrcholem C, tedy s vrcholy A, B a A', B' ležícími na jeho poláře. Buďte dále P, P' dva harmonické póly na straně BC. Pak body $P_1 \equiv (AP \times B'C)$ a $P'_1 \equiv (A'P' \times B'C)$ jsou harmonické póly na straně $B'C$.

A) Buď na straně AB indukována eliptická involuce harmonických pólů, t. j. harmonické póly A', B' oddělují vrcholy A, B. Je-li $a > 0$, je tedy $Dp(A, B, A', B') = -a$. Potom je $Dp(A, A', B, B') = 1 - Dp(A, B, A', B') = 1 + a > 0$, t. j. body A, A' neoddělují body B, B'.

a) Buď také na straně BC indukována eliptická involuce harmonických pólů, t. j. body P, P' oddělují body B, C. Leží-li tedy v trojúhelníku $BB'C$ bod P na úsečce $\overline{BC}$, leží bod P' na úsečce $\overline{CB}$. Leží-li bod P_1 na úsečce $\overline{B'C}(\overline{CB'})$, pak podle (1,1) leží bod P'_1 na úsečce $\overline{CB'}(\overline{B'C})$, t. j. body P_1, P'_1 oddělují body B', C a involuce harmonických pólů na straně $B'C$ trojúhelníku $A'B'C'$ je eliptická. Podle (1,2), a) je indukována na straně CA i CA' také eliptická involuce harmonických pólů.

b) Na straně BC buď indukována hyperbolická involuce harmonických pólů, t. j. body P, P' neoddělují body B, C. Leží-li tedy v trojúhelníku $BB'C$ bod P na úsečce $\overline{BC}$, leží také bod P' na úsečce $\overline{BC}$. Leží-li bod P_1 na úsečce $\overline{B'C}(\overline{CB'})$, pak podle (1,1) leží také bod P'_1 na úsečce $\overline{B'C}(\overline{CB'})$, t. j. body P_1, P'_1 neoddělují body B', C a involuce harmonických pólů na straně $B'C$ je hyperbolická. Podle (1,2), b) je na straně CA i CA' indukována hyperbolická involuce harmonických pólů.

B) Buď na straně $AB \equiv A'B'$ indukována hyperbolická involuce harmonických pólů. Podle (1,2) b. je v trojúhelníku ABC i $A'B'C'$ na jedné z obou zbývajících stran indukována eliptická, na druhé hyperbolická involuce harmonických pólů.

---

[1]) Ze dvou částí, na něž dělí přímku dva její různé body A, B, nazývejme jednu část úsečkou $\overline{AB}$, část druhou úsečkou $\overline{BA}$. Body A, B nechť nenáležejí žádné z obou úseček.

[2]) Synthetický důkaz viz na př. Vojtěch, Geometrie projektivní, 1932, str. 308.

V *singulární* rovinné polárnosti 1. druhu s jedním singulárním bodem leží jeden vrchol každého autopolárného trojúhelníku v tomto bodě, kterým tedy procházejí dvě strany trojúhelníku s indukovanými parabolickými involucemi harmonických pólů. Na třetí straně je pak indukována involuce harmonických pólů v téže polárnosti buď jen eliptická nebo jen hyperbolická podle toho, má-li polárný svazek přímek s vrcholem v singulárním bodě samodružné paprsky imaginární nebo reálné.

V *singulární* polárnosti 2. druhu s přímkou singulárních bodů, leží vždy jedna strana polárného trojúhelníku v této přímce. Na ostatních dvou stranách jsou vždy indukovány parabolické involuce harmonických pólů. Platí tedy 1. pro všechny rovinné polárnosti.

2. Jsou-li dány involuce harmonických pólů indukované polárností na hranách autopolárného normálního jehlanu, procházejících jedním vrcholem jehlanu, který neleží v singulárním prostoru polárnosti, jsou tím dány involuce harmonických pólů indukované na všech hranách jehlanu.

Důkaz. Buďte dány involuce harmonických pólů indukované polárností n-rozměrného prostoru na hranách procházejících vrcholem A_k $(k = 1, \ldots, n + 1)$ autopolárného normálního jehlanu. Protože podle předpokladu bod A_k není singulární, mohou to být pouze involuce eliptická, hyperbolická nebo parabolická se singulárním bodem jiným než A_k. Vrcholy každé jiné hrany jehlanu A_iA_j $(i \neq j \neq k,\ i,\ j,\ k = 1, \ldots\ n + 1)$ tvoří s A_k autopolárný trojúhelník $A_iA_jA_k$ polárnosti indukované v jeho rovině, na jehož stranách A_kA_i a A_kA_j jsou dány involuce harmonických pólů. Jsou-li obě involuce nezvrhlé a jsou-li P, P' resp. P_1, P'_1 harmonické póly na stranách A_kA_i resp. A_kA_j $[P \neq P' \neq A_k \neq A_i$, $P_1 \neq P_1' \neq A_k \neq A_j]$ jsou $L' \equiv (A_iA_j \times PP'_1)$ a $L \equiv (A_iA_j \times \times A_kM)$, kde je $M \equiv (A_iP_1 \times A_jP')$, dva harmonické póly na straně A_iA_j, jiné než tyto body. Je-li jedna z involucí parabolická, na př. na str. A_kA_i, je druhá involuce na straně A_kA_i nezvrhlá. Na straně A_iA_j je pak indukována parabolická involuce harmonických pólů se singulárním bodem A_i.

3. Dva různé autopolárné normální jehlany téže nezvrhlé polárnosti n-rozměrného prostoru s $n - 1$ společnými vrcholy jsou téhož druhu.

Důkaz. Buďte $J \equiv [A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}]$, $J^0 \equiv [A_1^0, A_2^0, A_3, \ldots, \ldots, A_{n+1}]$ dva autopolárné normální jehlany téže polárnosti n-rozměrného prostoru s $n - 1$ společnými vrcholy $A_3, \ldots, A_{n+1}$. Při vhodném označení vrcholů A_1^0, A_2^0 jsou involuce harmonických pólů na hranách $A_1^0A_{n+1}$, $A_2^0A_{n+1}$ a A_1A_{n+1}, A_2, A_{n+1} stejného druhu, protože $A_1A_2A_{n+1}$ a $A_1^0A_2^0A_{n+1}$ jsou autopolárné trojúhelníky polárnosti indukované v rovině $(A_1, A_2, A_{n+1}) \equiv (A_1^0, A_2^0, A_{n+1})$ mající společný vrchol A_{n+1}, tedy podle 1. jsou oba trojúhelníky téhož druhu: $A_1A_2A_{n+1} \sim A_1^0A_2^0A_{n+1}$. Hrany $A_{n+1}A_i$ $(i = 3, \ldots, n)$ jsou oběma jehlanům společné. Jsou tedy na korespondujících hranách obou jehlanů, procházejících vrcholem A_{n+1}, indukovány involucemi harmonických pólů téhož druhu. Podle 2. jsou tedy i na ostatních korespondujících hranách indukovány involuce harmonických pólů stejného druhu a tedy $J \sim J^0$.

4. Buďte $J \equiv [A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}]$, $J' \equiv [A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1}]$ dva různé autopolárné normální jehlany téže *nesingulární* polárnosti n-rozměrného prostoru. Volme n řad po n členech nových autopolárných normálních jehlanů této polárnosti takto:

$J_1^1 \equiv [A_1^1, A_2^1, A_3, \ldots, A_{n+1}]$, kde A_1^1 je průsečík hrany A_1A_2 jehlanu J s nadrovinou $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Jehlany J a J_1^1 mají $n - 1$ společných vrcholů $A_3, \ldots, A_{n+1}$. Je tedy podle 3. $J \sim J_1^1$.

$J_2^1 \equiv [A_1^1, A_2^2, A_3^2, A_4, \ldots, A_{n+1}]$, kde A_2^2 je průsečík hrany $A_2^1A_3$ jehlanu J_1^1 s nadrovinou $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Jehlany J_1^1 a J_2^1 mají $n - 1$ společných vrcholů $A_1^1, A_4, \ldots A_{n+1}$. Je tedy podle 3. $J_1^1 \sim J_2^1$.

$J_k^1 \equiv [A_1^1, A_2^2, \ldots, A_{k-1}^{k-1}, A_k^k, A_{k+1}^k, A_{k+2}, \ldots, A_{n+1}]$, $(1 \leq \leq k \leq n)$, kde vrchol A_k^k je průsečík hrany $A_k^{k-1}A_{k+1}$ jehlanu J_{k-1}^1 s nadrovinou $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Jehlany J_{k-1}^1 a J_k^1 mají $n - 1$ společných vrcholů $A_1^1, A_2^2, \ldots, A_{k-1}^{k-1}, A_{k+2}, \ldots, A_{n+1}$. Platí tedy podle 3. $J_{k-1}^1 \sim J_k^1$. Leží-li vrchol A_k^{k-1} již v nadrovině $(A'_1, \ldots, \ldots, A'_n)$, položme $A_k^{k-1} \equiv A_k^k$. Protože pak $J_{k-1}^1 \equiv J_k^1$, je také $J_{k-1}^1 \sim J_k^1$.

$J_n^1 \equiv [A_1^1, A_2^2, \ldots, A_n^n, A_{n+1}^n]$, kde vrchol A_n^n je průsečík hrany $A_n^{n-1}A_{n+1}$ s nadrovinou $(A'_1, \ldots, A'_n)$. Jehlany J_{n-1}^1 a J_n^1 mají $n - 1$ společných vrcholů $A_1^1, A_2^2, \ldots, A_{n-1}^{n-1}$. Podle 3. je $J_{n-1}^1 \sim \sim J_n^1$. Protože je $J \sim J_1^1 \sim J_2^1 \sim J_n^1$, je $J \sim J_n^1$. V polární nadrovině $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ bodu A'_{n+1} leží n vrcholů $A_1^1, A_2^2, \ldots, A_n^n$ jehlanu J_n^1. Je tedy $A_{n+1}^n \equiv A'_{n+1}$, t. j. jeden vrchol jehlanu J_n^1 se ztotožňuje s jedním vrcholem jehlanu J'.

Druhou řadu autopolárných jehlanů J_i^2 $(i = 1, \ldots, n)$ dané polárnosti volme stejným způsobem jako jsme volili řadu prvou; nahradíme pouze jehlan J jehlanem $J_n^1 \equiv [A_{n+1}^n, A_1^1, \ldots, A_n^n]$ a polárnou nadrovinu $(A'_1, \ldots, A'_n)$ bodu A'_{n+1} polárnou nadrovinou $(A'_1, \ldots, A'_{n+1}, A'_{n-1})$ bodu A'_n. Obdržíme tak řadu $J_n^1 \sim J_1^2 \sim$

$\sim J_2^2 \ldots \sim J_n^2$, tedy $J \sim J_n^1 \sim J_n^2$, t. j. $J \sim J_n^2$, a dva vrcholy jehlanu J_n^2 se ztotožňují s vrcholy A'_n, A'_{n+1} jehlanu J'.

Obecně volíme k-tou řadu autopolárných normálních jehlanů J_i^k $(i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n)$ stejným způsobem, jako jsme volili řadu prvou, nahradíme pouze jehlan J jehlanem J_n^{k-1}, ve kterém zaměníme pořadí vrcholů tak, že vrchol poslední dáme na prvé místo. Dále nahradíme polárnou nadrovinu $(A'_1, \ldots, A'_n)$ bodu A'_{n+1} polárnou nadrovinou $(A'_1, \ldots, A'_{n-k+1}, A'_{n-k+3}, \ldots, A'_{n+1})$ bodu A'_{n-k+2}. Je pak $J_n^{k-1} \sim J_1^k \sim J_2^k \sim \ldots \sim J_n^k$, tedy $J \sim \sim J_n^{k-1} \sim J_n^k$, t. j. $J \sim J_n^k$. k vrcholů jehlanu J_n^k se ztotožní s vrcholy $A'_{n-k+2}, A'_{n-k+3}, \ldots, A'_{n+1}$ jehlanu J'.

Pro $k = n$ bude tedy $J \sim J_n^n$. Protože se nyní n vrcholů jehlanu J_n^n ztotožňuje s n vrcholy jehlanu J', je $J' \equiv J_n^n$ a platí tedy $J' \sim J_n^n \sim J$, t. j. $J' \sim J$.

Singulární polárnost h-tého druhu $(h = 1, \ldots, n)$ má jako involuční korelace jediný prostor S_{h-1} singulárních bodů. Polárný svaz, jehož basí je tento singulární prostor, protíná nezávislý S_{n-h} v nezvrhlé polárnosti. Buďte $J \equiv [A_1, \ldots, A_{n-h+1}, B_{n-h+2}, \ldots, B_{n+1}]$ a $J' \equiv [A'_1, \ldots, A'_{n-h+1}, B'_{n-h+2}, \ldots, B'_{n+1}]$ dva různé autopolárné normální jehlany polárnosti h-tého druhu v n-rozměrném prostoru. Případnou změnou označení lze vždy docíliti toho, že vrcholy A_i, A'_i $(i = 1, \ldots, n - h + 1)$ jsou vrcholy autopolárného normálního jehlanu nezvrhlé polárnosti v S_{n-h}. Zbývající body B_j, B'_j $(j = n - h + 2, \ldots, n + 1)$ jsou singulární, protože leží v S_{h-1}.

Buď $h = n$. Pak je $S_{h-1} = S_{n-1}$ a $S_{n-h} = S_0$. Má tedy každý z obou jehlanů J, J' jediný nesingulární vrchol A_1, (A'_1), kterým tedy prochází n hran s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů. Podle 2. jsou tím určeny involuce harmonických pólů na ostatních hranách a $J \sim J'$.

Buď $h = n - 1$. Pak je $S_{h-1} = S_{n-2}$ a $S_{n-h} = S_1$. Polárný svaz s basí S_{n-2} protíná hrany A_1A_2, $A'_1A'_2$ v nezvrhlé involuci téhož druhu. Prochází tedy vrcholy A_1, A'_1 jedna hrana s nezvrhlou involucí harmonických pólů téhož druhu a $n - 1$ hran s involucí parabolickou. Je tedy podle 2. $J \sim J'$.

Nechť je $1 \leq h < n - 1$. Buď $J''_1 \equiv [A''_1, \ldots, A''_{n-h+1}]$ průmět jehlanu $J'_1 \equiv [A'_1, \ldots, A'_{n-h+1}]$ ze singulárního prostoru S_{h-1} do prostoru S_{n-h} určeného body $A_1, \ldots, A_{n-h+1}$ jehlanu J. Protože druh involuce je při promítání invariantní, je $J''_1 \sim J'_1$. J''_1 je řez autopolárného jehlanu J' prostorem S_{n-h}, je tedy autopolárným jehlanem nezvrhlé polárnosti tohoto prostoru. Je proto $J''_1 \sim J_1 \equiv [A_1, A_2, \ldots, A_{n-h+1}]$, t. j. $J'_1 \sim J''_1 \sim J_1$, čili $J'_1 \sim J_1$, Je proto vždy možno příp. změnou označení docílit toho, že na korespondujících hranách A_1A_i, $A'_1A'_i$ $(i = 2, \ldots, n - h + 1)$

jsou indukovány nezvrhlé involuce harmonických pólů téhož druhu. Na korespondujících hranách A_1B_j, $A'_1B'_j$ $(j = n - h - 2, \ldots, \ldots, n + 1)$ jsou indukovány parabolické involuce harmonických pólů, protože A_1, A'_1 jsou nesingulární a B_j, B'_j singulární body. Je tedy podle 2. $J \sim J'$.

Věta uvedená na počátku I. dílu (v dalším I.) platí tedy pro všechny polárnosti n-rozměrného prostoru.

II.

1. V rovinné polárnosti přiřaďme straně polárného trojúhelníku, na níž je indukována involuce harmonických pólů: eliptická znaménko $+$, hyperbolická znaménko $-$, parabolická 0. Straně se všemi singulárními body (0). Jsou-li dány involuce harmonických pólů indukované na dvou stranách polárného trojúhelníku, které se neprotínají v bodě singulárním, je určen druh involuce indukované na třetí straně podle pravidla:

a) $+\,+ \to +$, $-\,- \to +$, $+\,- \to -$, $-\,+ \to -$
b) $+\;0 \to 0$, $-\;0 \to 0$,
c) $0\;0 \to (0)$.

Důkaz. a) V nezvrhlé rovinné polárnosti existují polárné trojúhelníky typu $+\,+\,+$, $+\,-\,-$. V druhém případě plyne cyklickou záměnou: $-\,+\,-$, $-\,-\,+$. b) V singulární polárnosti 1. druhu existují polárné trojúhelníky $+\,0\,0$, $-\,0\,0$, kde se pouze strany $+\;0$ nebo $-\;0$ neprotínají v singulárním bodě. c) V singulární polárnosti 2. druhu existuje polárný trojúhelník typu $0\,0\,(0)$, kde se pouze strany $0\;0$ neprotínají v singulárním bodě.

2. Autopolárným normálním jehlanem, na jehož hranách procházejících jedním jeho vrcholem neležícím v singulárním prostoru jsou dány involuce harmonických pólů, je polárnost určena. Druh involuce harmonických pólů lze na každé z těchto hran voliti libovolně.

Důkaz. Buď $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ autopolárný normální jehlan polárnosti n-rozměrného prostoru. Protože je prostor singulárních bodů nejvýše $(n - 1)$-rozměrný, neleží v něm alespoň jeden vrchol jehlanu. Nechť je to vrchol A_1. Na hranách A_1A_i $(i = 2, \ldots, n + 1)$ buďte dány involuce harmonických pólů. Protože bod A_1 není singulární, nemůže žádná hrana obsahovat pouze singulární body.

a) Nechť není na žádné z hran A_1A_i indukována involuce parabolická. K libovolné nadrovině S_{n-1}, která neprochází žádným vrcholem jehlanu, sestrojíme pól takto: K bodům $P_k \equiv [S_{n-1} \times \times (A_1A_k)]$ sestrojíme harmonické póly P'_k na hranách A_1A_k. Protože je $P_k \not\equiv A_1 \not\equiv A_k$, je také $P'_k \not\equiv A_1 \not\equiv A_k$ a nadroviny $S^{(k)}_{n-1} \equiv [A_2, \ldots, A_{k-1}, P'_k, A_{k+1}, \ldots, A_{n+1}]$, $(k = 2, \ldots, n + 1)$

protínají nadrovinu $(A_2, \ldots, A_{n+1})$ v n prostorech $(n-2)$-rozměrných $(A_2, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{n+1})$, které nemají společného bodu. Jsou tedy polárné nadroviny $S_{n-1}^{(k)}$ pólů P_k, ležících v S_{n-1}, nezávislé a protínají se v jediném bodě P, který je pólem nadroviny S_{n-1}. Prochází-li nadrovina S_{n-1} k vrcholy $(k = 1, \ldots, n)$ jehlanu, je pro tyto body $P_k \equiv A_k$, $S_{n-1}^{(k)} \equiv (A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, \ldots, A_{n+1})$, a pól leží v $(n-k)$-rozměrné stěně jehlanu, určené $n-k+1$ vrcholy, jimiž S_{n-1} neprochází. Prochází-li S_{n-1} bodem A_1, sestrojíme podle I,2 involuce harmonických pólů na hranách procházejících vrcholem, který v S_{n-1} neleží.

b) Jsou-li na $n-l+1$ hranách A_1A_i, $(i = l+1, \ldots, n+1)$ indukovány parabolické involuce harmonických pólů, je prostor $S_{n-l} \equiv [A_{l+1}, \ldots, A_{n+1})$ singulární a každá polárná nadrovina jím prochází. S_{n-1} tedy protne na S_{n-l} nezávislý prostor S_{l-1} $(A_1, \ldots, A_l)$ v prostoru S_{l-2}. V nezvrhlé polárnosti v S_{l-1}, určené autopolárním normálním jehlanem $[A_1, \ldots, A_l]$ a involucemi harmonických pólů na hranách A_1A_i $(i = 2, \ldots, l)$, sestrojíme k S_{l-2} pól P podle předešlého odstavce. Pak je prostor $[P, S_{n-l}]$ sdružen k polárné nadrovině S_{n-1} v polárném svazu s basí S_{n-2}. Duálně sestrojíme k danému pólu polárnou nadrovinu.

c) Tři libovolné vrcholy A_i, A_j, A_k $(i \neq j \neq k, i, j, k = 2, \ldots, \ldots, n+1)$ jehlanu $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ určují polárný trojúhelník $A_iA_jA_k$ polárnosti indukované v jeho stěně těmito vrcholy určené. Involuce harmonických pólů indukované na stranách A_iA_j, A_iA_k, A_jA_k trojúhelníků $A_iA_jA_k$ určíme podle pravidla 1. z trojúhelníků $A_1A_iA_j$, $A_1A_iA_k$, $A_1A_jA_k$. V každém z těchto tří trojúhelníků jsou na dvou stranách A_1A_i, A_1A_j; A_1A_i, A_1A_k; A_1A_j, A_1A_k, které se protínají v nesingulárním bodě A_1 involuce harmonických pólů dány. Mohou nyní nastat tyto případy: Na hranách A_1A_i, A_1A_j, A_1A_k jehlanu jsou dány involuce harmonických pólů α) neparabolické a 1. všechny tři téhož druhu, pak je trojúhelník $\triangle \equiv \equiv A_iA_jA_k$ typu $+ + +$, 2. dvě téhož druhu a jedna druhu jiného, pak je $\triangle$ typu $+ - -$, β) jedna parabolická a 1. dvě neparabolické stejného druhu, pak je $\triangle$ typu $0\ 0\ +$, dvě neparabolické různého druhu, pak je $\triangle$ typu $0\ 0\ -$, γ) dvě parabolické a jedna neparabolická, pak je $\triangle$ typu $(0)\ 0\ 0$, δ) všechny tři parabolické, pak je $\triangle$ typu $(0)\ (0)\ (0)$.[2])

3. *Autopolárný normální jehlan polárnosti n-rozměrného prostoru má nejvýše tři různé druhy vrcholů, a to: k $(0 \leq k \leq n+1)$ vrcholů, jimiž prochází $k-1$ hran s indukovanou eliptickou, l $(0 \leq \leq l \leq n+1)$ hran s indukovanou hyperbolickou a $n-(k+l-1)$ hran s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů;*

[2]) Trojúhelník autopolárný typu (0) (0) (0) existuje. Je určen třemi různými body singulárního prostoru, které neleží v téže přímce.

l vrcholů, jimiž prochází $l - 1$ hran s indukovanou eliptickou, k hran s indukovanou hyperbolickou a $n - (k + l - 1)$ s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů a $n - (k + l - 1)$ vrcholů, jimiž prochází $k + l$ hran s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů a $n - (k + l)$ hran, jejichž všechny body jsou singulární.

Důkaz.[3]) Vhodnou volbou označení lze vždy docílit toho, že bod 1 není singulární, a že na prvých $k - 1$ hranách (1,2), (1,3), ..., ..., $(1, k)$ jsou indukovány eliptické, na dalších l hranách $(1, k + 1), \ldots, (1, k + l)$ hyperbolické, a na zbývajících $n - (k + l - 1)$ hranách parabolické involuce harmonických pólů. Schema hran procházejících vrcholem 1 můžeme tedy psáti takto:

$$\begin{array}{lcccccccc} & 1, & 2, \ldots, & k, & k+1, \ldots, & k+l, & k+l+1, \ldots, & n+1 \\ 1\,. & & + & + & - & - & 0 & 0 \end{array}$$

Znaménko libovolné hrany $(s, i) \equiv (i, s)$, $[i \neq s]$, určíme z trojúhelníku $1is$, jehož dvě strany $(1, i)$ a $(1, s)$ se protínají v nesingulárním bodě 1 a na nichž jsou involuce harmonických pólů dány, podle pravidla 1., t. j. kombinujeme-li podle tohoto pravidla znaménko stojící pod s se znaménkem stojícím pod i. Píšeme-li znaménka hran procházejících r-tým vrcholem do r-tého řádku, je prvé znaménko shodné se znaménkem stojícím v prvém řádku pod r, protože $zn\,(s, i) = zn\,(i, s)$. Další znaménka pak obdržíme kombinováním tohoto prvého znaménka se znaménkem napsaným pod číslem příslušného vrcholu v prvém řádku. (s, s) nedává znaménko žádné.[4]) Pro r-tý řádek tedy obdržíme pro $2 \leq r \leq k$: prvé znaménko $+$, $(k - 2)$-krát $+ + \to +$, l-krát $+ - \to -$, $n + 1 -$

[3]) Vrcholy A_i budeme v dalším pro jednoduchost označovat pouze jejich indexy.

[4]) Schema všech hran jehlanu je pak toto:

	1,	2,	..,	$k-1$,	k,	$k+1$,	$k+2$,	..,	$k+l-1$,	$k+l$,	$k+l+1$,	$k+l+2$,	..,	n,	$n+1$
1	.	+		+	+	−	−		−	−	0	0		0	0
2	+	.		+	+	−	−		−	−	0	0		0	0
.															
.															
$k-1$	+	+		.	+	−	−		−	−	0	0		0	0
k	+	+		+	.	−	−		−	−	0	0		0	0
$k+1$	−	−		−	−	.	+		+	+	0	0		0	0
$k+2$	−	−		−	−	+	.		+	+	0	0		0	0
.															
.															
$k+l-1$	−	−		−	−	+	+		.	+	0	0		0	0
$k+l$	−	−		−	−	+	+		+	.	0	0		0	0
$k+l+1$	0	0		0	0	0	0		0	0	.	(0)		(0)	(0)
$k+l+2$	0	0		0	0	0	0		0	0	(0)	.		(0)	(0)
.															
.															
n	0	0		0	0	0	0		0	0	(0)	(0)		.	(0)
$n+1$	0	0		0	0	0	0		0	0	(0)	(0)		(0)	.

V průsečíku i-tého řádku a s-tého sloupce je znaménko hrany $(i, s) \equiv (s, i)$.

$-(k-l) = n-(k+l-1)$-krát $+\ 0 \rightarrow 0$. Pro $k+1 \leqq r \leqq k+$ $+\ l$: prvé znaménko $-$, $(k-1)$-krát $-+\rightarrow -$, $(l-1)$-krát $--\rightarrow +$ a $n-(k+l-1)$-krát $-0 \rightarrow 0$. Pro $k+l+1 \leqq$ $\leqq r \leqq n+1$: prvé znaménko 0, $(k+l-1)$-krát $0+\rightarrow 0$, příp. $0-\rightarrow 0$, $n+1-(k+l)-1 = n-(k+l)$-krát $0\ 0 \rightarrow (0)$. Tím je tvrzení dokázáno.

3. Buď $n+1 = k+l$, t. j. $n-(k+l-1) = 0$, tedy případ polárnosti nesingulární. Autopolárné normální jehlany různých druhů obdržíme pouze pro $l = 0$, nebo při $l \neq 0$ pro $k \leqq l$, t. j. $k \leqq n-k+1$, čili $k \leqq \frac{1}{2}(n+1)$. Tedy pro n sudé: 1 pro $l = 0$, $\frac{1}{2}n$ pro $l \neq 0$, celkem $\frac{1}{2}n+1$. Pro n liché: 1 pro $l = 0$, $\frac{1}{2}(n+1)$ pro $l \neq 0$, celkem $\frac{1}{2}(n+1)+1$.

Buď $n+1 > k+l$, t. j. $n-(k+l-1) > 0$, tedy případ polárnosti zvrhlé. Položme $k+l = r$, kde je $r = 1, \ldots, n$. Různé autopolárné normální jehlany obdržíme opět pro $l = 0$, tedy pro $k = r$, nebo při $l > 0$ pro $k \leqq l$, t. j. $k \leqq \frac{1}{2}r$. Tedy pro všechna r od 1 do n a pro r lichá $\frac{1}{2}(r-1)+1$, pro r sudá $\frac{1}{2}r+1$. Je proto počet různých autopolárných normálních jehlanů singulárních polárností pro n sudé: $1+2\,.\,(2+3+\ldots+\frac{1}{2}n)+\frac{1}{2}(n+2) =$ $= \frac{1}{4}(n+6)(n-2)+3$, pro n lichá: $1+2\,.\,(2+3+\ldots+\frac{1}{2}(n+1)) =$ $= \frac{1}{4}(n+5)(n-1)+1$.

4. Buďte $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$, $[C_1, \ldots, C_{n+1}]$ autopolárné normální jehlany dvou různých polárností téhož nebo dvou různých n-rozměrných prostorů. Na n hranách $A_{n+1}A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ prvého jehlanu zvolme po dvou libovolných bodech B_i, B'_i, na n hranách $C_{n+1}C_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ druhého jehlanu po dvou libovolných bodech D_i, D'_i tak, aby $A_{n+1} \neq B_i \neq B'_i$, $C_{n+1} \neq D_i \neq D'_i$. Sestrojíme-li $n-1$ bodů $R_i \equiv (B_i, B_{i+1}) \times (B'_i, B'_{i+1})$ a $n-1$ bodů $T_i \equiv (D_i, D_{i+1}) \times (D'_i, D'_{i+1})$, $(i = 1, \ldots, n-1)$, platí: Nezvrhlá kolineace K, která přiřazuje $n+2$ bodům A_{n+1}, B_1, B'_n, R_i body C_{n+1}, C_1, C'_n, T_i, přiřazuje bodům B_i, B'_i body D_i, D'_i.

Důkaz. Protože je $A_i \neq A_{i+1}$, $A_{n+1} \neq B_i \neq B'_i$, platí: $R_i \neq A_{n+1} \neq B_i \neq B'_i \neq B_{i+1} \neq B'_{i+1}$ a je tedy $S_2 \equiv (A_{n+1}, A_n,$ $A_{n-1}) \equiv (A_{n+1}, B'_n, R_{n-1})$. Bod R_{n-2} leží v rovině $(A_{n+1}, A_{n-1},$ $A_{n-2})$ na přímce (B'_{n-1}, B'_{n-2}), neleží však v S_2. Je tedy $S_3 \equiv (A_{n+1},$ $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}) \equiv (A_{n+1}, B'_n, R_{n-1}, R_{n-2})$. Bod R_{n-3} leží v rovině $(A_{n+1}, A_{n-2}, A_{n-3})$ na přímce (B'_{n-2}, B'_{n-3}), neleží však v S_3, je tedy $S_4 \equiv (A_{n+1}, A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}) \equiv (A_{n+1}, B'_n, R_{n-1},$ $R_{n-2}, R_{n-3})$. Obecně bod R_{n-i} leží v rovině $(A_{n+1}, A_{n-(i-1)}, A_{n-i})$ na přímce $(B'_{n-(i-1)}, B'_{n-i})$, neleží však v S_i, je tedy $S_{i+1} \equiv$ $\equiv (A_{n+1}, A_n, \ldots, A_{n-i}) \equiv (A_{n+1}, B'_n, R_{n-1}, \ldots, R_{n-i})$. Protíná tedy daná přímka (R_1, B_1) nadrovinu S_{n-1} v bodě B_2, přímka (R_2, B_2) prostor S_{n-2} v bodě B_3, až konečně přímka $(R_{n-2},$ $B_{n-2})$ rovinu S_2 v bodě B_{n-1} a přímka (R_{n-1}, B_{n-1}) přímku $(A_{n+1}, A_n) \equiv (A_{n+1}, B'_n)$ v bodě B_n. Pak je $B'_{n-1} \equiv (B'_n, R_{n-1}) \times$

$\times (A_{n+1}, B_{n-1})$, $B'_{n-2} \equiv (B'_{n-1}, R_{n-2}) \times (A_{n+1}, B_{n-2})$, až $B'_1 \equiv \equiv (B'_2, R_1) \times (A_{n+1}, B_1)$. Totéž platí i pro druhý jehlan, zaměníme-li pouze A_i za C_i, B_i za D_i a R_i za T_i. Z důkazu je patrno, že z $n + 2$ bodů A_{n+1}, B_1, B'_n, R_i, příp. C_{n+1}, D_1, D'_n, T_i, neleží žádných $n + 1$ v téže nadrovině. Je proto K nezvrhlá.

5. Jsou-li jehlany $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$, $[C_1, \ldots, C_{n+1}]$ téhož druhu, je podle 2. možno vhodnou volbou označení docílit toho, že A_{n+1}, C_{n+1} jsou nesingulární vrcholy téhož druhu, a že na korespondujících hranách $A_{n+1}A_i$, $C_{n+1}C_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ jsou indukovány involuce harmonických pólů téhož druhu. Za body B_i, B'_i, příp. D_i, D'_i volme na hranách s indukovanou eliptickou involucí harmonických pólů dva jednoznačně určené reálné harmonické póly, které oddělují harmonicky bod A_{n+1}, příp. C_{n+1} s jeho harmonickým pólem indukovaným na této hraně, na hranách s indukovanou hyperbolickou involucí harmonických pólů samodružné body této involuce a na hranách s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů bod singulární a libovolný bod této hrany rozdílný od bodu singulárního a bodu A_{n+1} (C_{n+1}). Ve všech případech je splněna podmínka $A_{n+1} \mathrel{\not\equiv} B_i \mathrel{\not\equiv} B'_i$, $C_{n+1} \mathrel{\not\equiv} D_i \mathrel{\not\equiv} D'_i$. Převádí tedy kolineace K jehlan $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ v jehlan $[C_1, \ldots, C_{n+1}]$ a involuce harmonických pólů na hranách $A_{n+1}A_i$ prvého jehlanu v involuce harmonických pólů na hranách $C_{n+1}C_i$ jehlanu druhého.

6. V každé polárnosti existují autopolárné normální jehlany; podle věty I všechny téhož druhu. Podle II,2 existuje ke každému druhu autopolárného normálního jehlanu určitého druhu určitá polárnost. Podle II,5 jsou polárnosti s autopolárními normálními jehlany téhož druhu kolineárné. Protože druh involuce je invariant reálné kolineace, nemohou být polárnosti s autopolárnými normálními jehlany různého druhu kolineárné. Udávají tedy čísla, uvedená v II,3 pro počet možných druhů autopolárných normálních jehlanů, počet projektivně různých polárností n-rozměrného prostoru pro reálné kolineace.

Protože incidenční nadplocha každé polárnosti je nadkvadrika, a protože každá nadkvadrika určuje jistou polárnost prostoru k ní příslušného, je uvedeným také dána projektivní klasifikace nadkvadrik pro reálné kolineace.

*

Sur les simplexes autopolaires d'une polarité de l'espace à *n* dimensions.

(Résumé de l'article précédent.)

Dans la première partie de l'article l'auteur démontre le théorème suivant: Les pyramides normales (simplexes) autopolaires d'une même polarité de l'espace à *n* dimensions sont de la même

espèce, c. à d., les arêtes de deux différentes pyramides normales autopolaires d'une même polarité de l'espace à n dimensions peuvent toujours être mises en correspondance d'une telle manière qu'à chaque arête d'une des deux pyramides correspond une seule arête de l'autre, de sorte qu'aux arêtes passant par un sommet d'une des pyramides correspondent les arêtes passant par un sommet de l'autre et que les involutions des pôles harmoniques engendrées sur les arêtes correspondantes des deux pyramides soient de la même espèce.

Dans la deuxième partie de l'article l'auteur démontre par voie synthétique le théorème suivant: Une pyramide normale autopolaire d'une polarité de l'espace à n dimensions possède au plus trois espèces différentes de sommets, à savoir: k $(0 \leqq k \leqq n + 1)$ sommets par lesquels passent $(k - 1)$ arêtes contenant une involution elliptique, l $(0 \leqq l \leqq n + 1)$ arêtes contenant une involution hyperbolique et $n - (k + l - 1)$ arêtes contenant une involution parabolique de pôles harmoniques; l sommets par lesquels passent $(l - 1)$ arêtes contenant une involution elliptique, k arêtes contenant une involution hyperbolique et $n - (k + l - 1)$ arêtes contenant une involution parabolique de pôles harmoniques et $n - (k + l - 1)$ sommets par lesquels passent $(k + l)$ arêtes contenant une involution parabolique de pôles harmoniques et $n - (k + l)$ arêtes dont tous les points sont singuliers.

A l'aide de ces deux théorèmes et de la collinéation par laquelle se correspondent mutuellement deux pyramides normales autopolaires données de la même espèce, l'auteur effectue la classification projective des polarités, et, par suite, aussi celle des quadriques de l'espace à n dimensions par rapport aux collinéations réelles.
