Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

O stanovení symetrických funkcí kořenů algebraické rovnice

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 4, 285--288

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121929

O stanovení symetrických funkcí kořenů algebraické rovnice.

Napsal

Ed. Weyr.

Clebsch podává ve své „Theorie der binaeren algebraischen Formen“ §. 20. methodu, kterou lze vyjádřiti symetrickou a invariantivní funkci kořenů algebraické formy pomocí koefficientů. Přihlédneme-li k úvahám *Clebschovým* pozorněji, tu ihned shledáme, že platí i pro ten případ, kdy uvažovaná symetrická funkce není invariantem, t. j. že ona methoda řeší zcela obecně úkol, který požaduje, by se vyjádřila libovolná symetrická funkce kořenů pomocí koefficientů. Ač provedení skutečné — jak autor sám podotýká — jest zdlouhavé, jest přece methoda velmi zajímava svou jednoduchostí, obecností a elegancí. Základní myšlénka její jest ta: Daná symetrická funkce se vyjádří pomocí jiných symetrických funkcí, ale o stupeň nižších a pomocí koefficientů dané rovnice. Novým výrazem se týmž spůsobem naloží atd., až konečně nezbudou v počtu než koefficienty. Při tom užívá autor naskrze tvarů homogenních a opírá se o větu *Eulerovu* o homogenních funkcích.

Při studování této methody mi tanulo na mysli, že symetrická funkce vyjádřená koefficienty, jest isobarickou a že lze tedy užiti jiného differenciálného processu, který funkci též reprodukuje právě tak jako *Eulerova* věta. Vyvinu na tomto základě jinou methodu ku vyčíslení symetrických funkcí, vycházeje z obyčejného — nehomogenního — tvaru rovnice a kořenů.

1. Připomenu především onu známou větu o funkcích isobarických.

Dána-li celistvá funkce φ hodnot $a_1, a_2 \ldots a_n$ rovnicí

$$\varphi = Ca_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n} + C'a_1^{\varepsilon'_1} a_2^{\varepsilon'_2} \ldots a_n^{\varepsilon'_n} + \ldots,$$

tu ji nazýváme isobarickou (stejné váhy), platí-li rovnosti:

$$(1) \quad \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots + n\varepsilon_n = \varepsilon'_1 + 2\varepsilon'_2 + 3\varepsilon'_3 + \ldots + n\varepsilon'_n \ldots = p,$$

t. j. je-li součet všech *indexů* v každém členu týž. Tento součet p nazýváme váhou isobarické funkce.

Derivujeme-li φ a násobíme-li příslušným a, obdržíme

$$a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \varepsilon_1 C a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n} + \varepsilon_1' C' a_1^{\varepsilon'_1} a_2^{\varepsilon'_2} \ldots a_n^{\varepsilon'_n} + \ldots$$

$$a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = \varepsilon_2 C a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n} + \varepsilon_2' C' a_1^{\varepsilon'_1} a_2^{\varepsilon'_2} \ldots a_n^{\varepsilon'_n} + \ldots$$

. . . .

$$a_n \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} = \varepsilon_n C a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n} + \varepsilon_n' C' a_1^{\varepsilon'_1} a_2^{\varepsilon'_2} \ldots a_n^{\varepsilon'_n} + \ldots$$

Znásobíme-li tyto rovnice čísly 1, 2, ... n a sečteme-li pak, obdržíme vzhledem k rovnostem (1)

$$(2) \qquad a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + na_n \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} = p\varphi .$$

2. Buďte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ kořeny dané rovnice

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

a φ symetrická funkce

$$\varphi = \Sigma \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \ldots \alpha_n^{\lambda_n}.$$

Jde o to, abychom vyjádřili φ pomocí $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Tu si především připomeňme, že bude hledaný výraz isobarickým a sice o váze

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,$$

pročež dle rovnice (2)

$$p\varphi = a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_3 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + na_n \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} .$$

Tato rovnice nám podává φ, jakmile známe derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$. Avšak φ jest přímo dáno co funkce kořenů α, tyto pak jsou funkce hodnot a definované rovnicí

$$f(\alpha) = 0.$$

Jestli že tuto derivujeme dle a_k, máme

$$f'(\alpha) \frac{\partial\alpha}{\partial a_k} + \alpha^{n-k} = 0$$

a tedy

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a_k} = -\frac{\alpha^{n-k}}{f'(\alpha)} .$$

Ale

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} \frac{\partial\alpha_1}{\partial a_k} + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} \frac{\partial\alpha_2}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n} \frac{\partial\alpha_n}{\partial a_k}$$

a tedy

$$(3) \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial a_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\frac{\alpha_1^{n-k}}{f'(\alpha_1)} + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}\frac{\alpha_2^{n-k}}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}\frac{\alpha_n^{n-k}}{f'(\alpha_n)},$$

pročež (2) lze přepsati na

$$(4) \quad -p\varphi = a_1\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\alpha^{n-1}}{f'(\alpha)} + 2a_2\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\alpha^{n-2}}{f'(\alpha)} + \ldots + na_n\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Avšak

$$f'(\alpha_g) = (\alpha_g - \alpha_1)(\alpha_g - \alpha_2)\ldots(\alpha_g - \alpha_{g-1})(\alpha_g - \alpha_{g+1})\ldots(\alpha_g - \alpha_n)$$

a to-li zavedeme místo derivací $f'(\alpha_g)$ a upravíme-li na společný jmenovatel, obdržíme

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial a_k} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\alpha_1^{n-k}P_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}\alpha_2^{n-k}P_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}\alpha_n^{n-k}P_n}{\Delta},$$

kdež společný jmenovatel jest

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_1 - \alpha_n)(\alpha_2 - \alpha_3)\ldots(\alpha_2 - \alpha_n)\ldots\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n).$$

O čítateli, jenž jest celistvou funkcí kořenů α, snadno dokážeme, že jest dělitelný jmenovatelem Δ; tím pak vychází na jevo, že $\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}$ jest celistvou funkcí kořenů; a sice opět symetrickou, což za rovnice (3) patrné. Učiněný výrok bude dokázán, jakmile ukážeme, že jest čítatel dělitelen každou z differencí $\alpha_i - \alpha_j$. Vezměme na př. $\alpha_1 - \alpha_2$. Tu patrno, že $P_3, P_4 \ldots P_n$ obsahují tento rozdíl co činitel; zbývá tedy jen ukázati, že jest součet prvních dvou členů

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\alpha_1^{n-k}P_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}\alpha_2^{n-k}P_2$$

dělitelný rozdílem $\alpha_1 - \alpha_2$. Za tím účelem uvažme, že

$$P_1 = (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)\ldots(\alpha_2 - \alpha_n)(\alpha_3 - \alpha_4)\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n),$$
$$P_2 = -(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)\ldots(\alpha_1 - \alpha_n)(\alpha_3 - \alpha_4)\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n).$$

Učiníme-li tedy $\alpha_1 = \alpha_2$, tu se pak P_2 a P_1 různí jen znamením, a poněvadž pak $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}$, patrně napsaný součet dvou prvních členů čítatele pro $\alpha_1 = \alpha_2$ zmizí. Obsahuje tedy tento součet rozdíl $\alpha_1 - \alpha_2$ co činitel, a tím tvrzení naše dokázáno.

Jsou nyní derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}$ vyjádřeny opět co symetrické funkce kořenů, ale co funkce stupňů nižších nežli byla původní funkce φ; neboť vůči rovnici (3) jest patrno, že jest $\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}$ v kořenech α stupně $\lambda_1+\lambda_2..+\lambda_n-1+n-k-(n-1)$ t. j. $\lambda_1+.+\lambda_n-k$, kdežto φ byla stupně $\lambda_1+..+\lambda_n$.

S derivacemi naložíme tak, jako jsme s φ učinili, a pokračujeme touže cestou, až dojdeme stálých aneb funkcí linearných t. j. funkce

$$\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_n,$$

jejíž hodnota jest $-a_1$ aneb funkce nulltého stupně t. j. stálé. Dosazováním zpátečným doděláme se pak hodnoty funkce φ vyjádřené koefficienty a_1, a_2, .. a_n. Tím ale úkol řešen; zároveň vychází známý výsledek, *že libovolnou symetrickou funkci φ kořenů algebraické rovnice lze vyjádřiti co celistvou funkci koefficientů.*

Řešení rovnic numerických pomocí logarithmů.*)

Sděluje

prof. K. V. Zenger.

V následujících řádcích podávám methodu, jíž lze ze sblížené hodnoty kořene algebraické rovnice stanoviti posloupně hodnoty vždy přesnější počtem velmi jednoduchým, který se pomocí logarithmů velmi rychle dá provésti.

Buď

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+...+A_n=0 \qquad (1)$$

daná rovnice o reálných koefficientech. Značme literou u přibližnou hodnotu jednoho realného kořene, na př. horní mez realných kořenů, kterou nám známé pravidlo podává.

Položme

$$\frac{x}{u}=y \quad \text{čili} \quad x=uy,$$

i obdržíme pro novou neznámou y rovnici

---

*) Předneseno v týdenní schůzi Jednoty českých mathematiků dne 21. června 1882.