Čeněk Jarolímek
Drobnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 4, 301--306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121924

Řešení úlohy 21.

Buďtež A, B, C úhly, a, b, c protilehlé strany trojúhelníku; známe-li úhly, jest tím trojúhelník, mající stranu pevné délky $\overline{AB} = c$, určen. Budiž $2s$ známý součet stran a, b, c, α úhel, jejž tvoří strana AB s obzorem; obdržíme rovnice:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{s-c}{s},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{Pc - (2s - c)(P + p)\sin\alpha}{s(P + p)\cos'\alpha},$$

kterými jsou určeny úhly A, B.

Řešení úlohy 22.

(Řešil p. *V. Střebský*, VII. tř. r. v Pardubicích.)

Laplace-ova sekunda obnáší $\frac{1}{100000}$ jednoho dne. Míra ta jest vzata ze soustavy decimalní, upotřebené tehdy (zároveň se zavedením republikánského kalendáře a metrické soustavy) při rozdělení dne a kruhu. Den rozdělen na 10 hodin po 100 minutách, minuta na 100 sekund; podobně čtvrtkruh (kvadrant) na 100 stupňů, stupeň na 100 minut, minuta na 100 sekund.

Řešili též pp. *M. Grossmann*, VII. třída real. v Litomyšli a *A. Žeglitz*, VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 8. zaslal též pan *Č. Hlavinka*, VII. tř. real. v Prostějově.

Drobnosti.

Abiturientům středních škol podává Č. Jarolímek.

1. Abiturientům bývá s nesnází, pamatovati si bezpečně vzorce pro tělesný obsah kulového úseku a kulové vrstvy. Zajisté snáze utkvějí v paměti jednoduchá pravidla tato:

a) Kulový úsek (skrojek) rovná se co do tělesného obsahu vepsané kouli, zvětšené o válec, jenž má s úsekem společnou podstavu a poloviční výšku (obr. 1.).

b) Kulová vrstva rovná se co do tělesného obsahu vepsané kouli zvětšené o součet dvou válců, z nichž jeden sestrojen nad spodní, druhý pak pod svrchní kruhovou stěnou vrstvy; výška každého válce rovná se polovině výšky vrstvy (obr. 2.)

2. Buďtež rovnice tří přímek v soustavě pravoúhlých souřadnic

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv y = A_1 x + b_1 \\ R_2 &\equiv y = A_2 x + b_2 \\ R_3 &\equiv y = A_3 x + b_3. \end{aligned}$$

Vyšetříme-li hodnotu determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & b_1 & 1 \\ A_2 & b_2 & 1 \\ A_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 - A_2, & b_1 - b_2 \\ A_2 - A_3, & b_2 - b_3 \end{vmatrix},$$

nalezneme, jak známo, $\Delta = 0$, procházejí-li přímky R_1, R_2 a R_3 týmž bodem. Je-li $\Delta \gtrless 0$, nepřináležejí dané paprsky témuž svazku, a omezují tudíž trojúhelník, jehož ploský obsah P jest v určité souvislosti s determinantem Δ. Jest totiž

$$P = \frac{\Delta^2}{2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)},$$

kteréhožto vzorce užiti lze ku vypočítání ploského obsahu P, aniž by třeba bylo, souřadnice vrcholů trojúhelníka, t. j. průsečíků daných přímek vyhledávati.

Jsou-li dány rovnice přímek ve tvaru nerozvinutém

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv m_1 x + n_1 y + p_1 = 0, \\ R_2 &\equiv m_2 x + n_2 y + p_2 = 0, \\ R_3 &\equiv m_3 x + n_3 y + p_3 = 0, \end{aligned}$$

jest ploský obsah trojúhelníka těmito přímkami omezeného

$$P = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix}^2}{2 . \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix}}.$$

3. Vzorec pro vzdálenost d bodu m (x_1, y_1) od přímky $R \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ čili $R \equiv bx + ay = ab$ v pravoúhlé soustavě souřadnic (obr. 3.) lze nejkratčeji takto vyšetřiti:

Buďtež u, v průsečíky přímky R na osách X a Y, $\overline{ou} = a$, $\overline{ov} = b$, tedy ploský obsah trojúhelníka muv:

$$P = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ o & b & 1 \\ a & o & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(bx_1 + ay_1 - ab);$$

ježto však také

$$P = \tfrac{1}{2} d . \overline{uv} = \tfrac{1}{2} d \sqrt{a^2 + b^2},$$

jde z rovnosti pravých stran obou rovnic bezprostředně

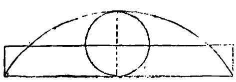
$$d = \frac{bx_1 + ay_1 - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Je-li dána rovnice přímky ve tvaru $y = Ax + b$, kdež $A = -\frac{b}{a}$, třeba jen do posledního vzorce vložiti $a = \frac{-b}{A}$, načež vyjde

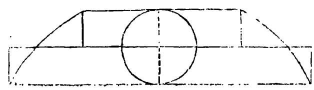
$$d = \frac{y_1 - Ax_1 - b}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

4. Jest známo, že ellipsu vytvořiti lze bodem úsečky stálé délky, jejíž konce posouvají se po dvou různoběžkách, jsou-li

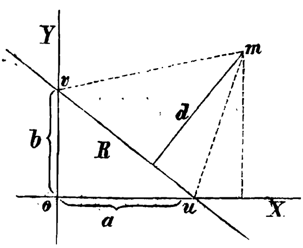
Obr. 1.



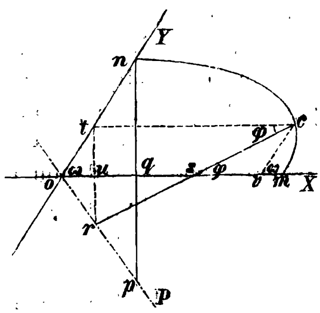
Obr. 2.



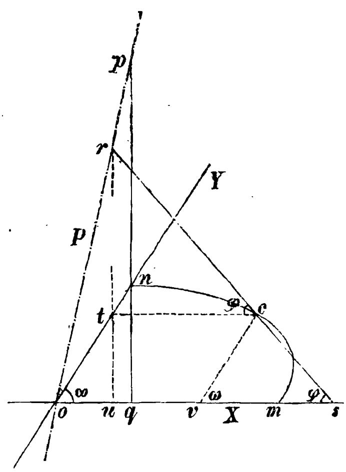
Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.



dány *dva sdružené průměry* křivky, z čehož vyplývá rovněž tak praktická konstrukce jednotlivých bodů ellipsy, jako užíváním součtu neb rozdílu poloos. Podáváme tuto jednoduchý důkaz konstrukce (obr. 4.).

Buďtež $\overline{om} = a_1$, $\overline{on} = b_1$ poloviny daných dvou průměrů sdružených, jež zároveň pokládejme za osy soustavy souřadnic kosoúhlých, $\sphericalangle mon = \omega$. Učiňme $\overline{np} \perp X$, $\overline{np} = \overline{om}$, spojme

$\overline{op} \equiv P$, a pohybujme přímku $\overline{np}$ tak, aby bod p posouval se po přímce P, bod q po ose X, a aby úsečka $\overline{pq}$ neměnila délku svou: bod n bude vytvořovati žádanou ellipsu. Budiž rsu libovolná poloha přímky hybné, tedy $\overline{rs} = \overline{pq}$, $\overline{rc} = \overline{pn}$, $\overline{om} = a_1$, $\overline{ov} = x$, $vc = y \parallel Y$ souřadnice bodu c; veďme $ct \parallel X$, a spojme $\overline{rt}$, i bude $ru : rt = rs : rc$; ježto pak $rs = pq$, $rc = pn$, jest $rn : rt = pq : pn$, pročež $rt \parallel pn$, čili $rt \perp X$, a v pravoúhlém trojúhelníku ctr:

$$\cos \varphi = \frac{ct}{cr} = \frac{ov}{np} = \frac{ov}{om} = \frac{x}{a_1}. \tag{1}$$

Z trojúhelníka svc jde pak

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \omega} = \frac{vc}{sc} = \frac{y}{qn};$$

avšak $\overline{qn} = \overline{on} \,.\, \sin \omega = b_1 \sin \omega$, kteroužto substitucí obdržíme z rovnice předešlé

$$\sin \varphi = \frac{y}{b_1}. \tag{2}$$

Součet zdvojmocněných rovnic (1) a (2) dává konečně

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{3}$$

což shoduje se s rovnicí ellipsy v soustavě dvou sdružených průměrů, jichž poloviny $= a_1$, b_1.

Je-li úsečka $\overline{pq} = \overline{pn} - \overline{qn} = a_1 - b_1 \sin \omega$ nepatrné délky, nedostáváme touto konstrukcí, užívajíce rejsovadel, jednotlivé tečky obrazu ellipsy $c \ldots s$ dostatečnou přesností. Přesnějšího výsledku doděláme se vždy *součtem* $(a_1 + b_1 \sin \omega)$. Jsou-li zase $\overline{om} = a_1$, $\overline{on} = b_1$ (obr. 5.) poloviny průměrů sdružených, učiníme-li $\overline{np} \perp X$, $\overline{np} = \overline{om} = a_1$, spojíme-li $\overline{op} \equiv P$, a posouváme-li bod p úsečky stálé délky $\overline{pq} = \overline{pn} + \overline{nq} = a_1 + b_1 \sin \omega$ po přímce P, bod q po ose X, vytvořuje bod n žádanou ellipsu. Je-li na př. rcs libovolná poloha hybné přímky, tedy $\overline{rs} = \overline{pq}$, $\overline{rc} = \overline{pn}$, přináleží bod c ellipse. Užijeme-li zde týchž pomocných čar a téhož označení bodů k vedení důkazu, jako v obr. 4., shledáme, že zde mají tytéž rovnice platnosti, jako ve případě předešlém, a že tedy i výsledek bude týž.

Drobné zprávy.

V „Mittheilungen der mathem. Gesellschaft in Hamburg" v č. 2. 1882 otištěna přednáška, kterou měl dne 11. června 1881 pan dr. Schubert „o počtu obrazů v zrcadle úhlovém" a v níž pravil:

„Již r. 1874 byl pan Hermann Klein ustanovil onen počet v Pogg. annalech ač cestou trochu rozvláčnou. Krom toho se přece onen počet v knihách, též i ve Wüllnerově, nesprávně udává. Proto nebude od místa následující jednoduché stanovení onoho počtu.

Svítícím bodem B veďme rovinu kolmo k daným zrcadlům S a S′ a opišme v ní kolem jejího průsečíku M s oběma zrcadly kružnici bodem B procházející; ta nechť protne S a S′ resp. v bodech A a A′. Na této kružnici se musejí dle zákonů o odrazu nalézati obrazy bodu B. Úhly BMA, BMA′, AMA′ označme resp. φ, φ', α. Ony z bodu B vycházející paprsky, které nejdříve na S dopadají, odrážejí se tak, jakoby vycházely z bodu B_1 položeného na kružnici tak, že se oblouk AB_1 rovná oblouku AB. Tudíž se rovná oblouk BB_1 úhlu 2φ. Paprsky zrcadlem S odražené dopadnou na S′ a odrazí se tak, jakoby vycházely z bodu B_2, jež má takovou polohu, že oblouk $B'B_1$ se rovná oblouku $A'B_2$. Rovná se tedy oblouk BB_2 úhlu $360^0 - 2\varphi - 2\varphi'$. Pokračujeme-li takto a měříme-li stále oblouky z B přes A, tu obdržíme

$$\text{oblouk } BB_{2n+1} = (2n+2)\varphi + 2n\varphi',$$
$$\text{oblouk } BB_{2n} = 360^0 - 2n\varphi - 2n\varphi'.$$

Druhou skupinu obrazů obdržíme, sledujeme-li ony z B vycházející paprsky, jež nejdříve dopadají na zrcadlo S′.

Označme B_k' takto po k-té reflekci vznikající obraz. Jde nyní o to, abychom ustanovili indexy *posledních* obrazů v obou skupinách. Patrně bude B_k tenkráte obrazem posledním, jestliže paprsky tento obraz vytvořující, byvše jedním zrcadlem odraženy, druhé zrcadlo již nezasáhnou, t. j. jestliže nazpět prodlouženy protínají prodloužené zrcadlo za průsečnou přímkou obou zrcadel. V tomto případu se ale nalézá B_k mezi body C a C′, v nichž AM a AM′ kružnici podruhé protínají. Je-li k liché, tu se poslední reflexe vyskytla v zrcadle S. Pak může B_k arci zapadnouti do bodu C′, však ne do bodu C; neb v tomto případu by B_k splynul s předcházejícím obrazem, jenž vznikl reflekcí na S′ a jež by pak za poslední platiti musil. Proto máme

$$180^0 - \varphi' \leqq BB_{2n+1} < 180^0 + \varphi,$$

aneb
$$180^0 - \varphi' \leqq 2n\varphi + 2n\varphi' + 2\varphi < 180^0 + \varphi,$$

aneb
$$\frac{180 - \varphi}{\alpha} \leqq 2n + 1 < \frac{180^0 - \varphi}{\alpha} + 1.\text{*)}$$

---

*) Uvažme, že lze vůči $\alpha = \varphi + \varphi'$ poslední nerovnosti psáti
$$180^0 - \varphi' \leqq (2n+1)\alpha + \varphi - \varphi' < 180^0 + \varphi,$$
aneb přidáme-li všude $\varphi' - \varphi$
$$180^0 - \varphi \leqq (2n+1)\alpha < 180^0 + \alpha - \varphi,$$
z čehož divisí α jdou odvozené nerovnosti. *W.*

Obdobně máme v případu, kdy poslední do oblouku CC′ zapadající obraz má sudý index:

$$180^0 - \varphi' < BB_{2n} \leqq 180^0 + \varphi,$$

aneb $$180^0 - \varphi' < 360^0 - 2n\varphi - 2n\varphi' \leqq 180^0 + \varphi,$$

aneb $$\frac{180^0 - \varphi}{\alpha} + 1 > 2n \geqq \frac{180^0 - \varphi}{\alpha}.$$

Jsou tedy meze pro číslo $2n$ tytéž, jako pro číslo $2n+1$ a proto vychází přesně počet x obrazů nečárkovaných z nerovností

$$(1) \qquad \frac{180^0 - \varphi}{\alpha} \leqq x < \frac{180^0 - \varphi}{\alpha} + 1.$$

Počet x' obrazů vznikajících paprsky, jež spadají nejdříve na zrcadlo S′, vychází obdobně z nerovností

$$(2) \qquad \frac{180^0 - \varphi'}{\alpha} \leqq x' < \frac{180^0 - \varphi'}{\alpha} + 1.$$

Počet všech obrazů jest $x + x'$. Výsledek ten lze takto vysloviti:

Stýkají-li se dvě zrcadla v úhlu α a rozděluje-li svítící bod tento úhel na části φ a φ', tu nalezneme počet vznikajících obrazů následujícím spůsobem. Doplněk úhlu φ na 180^0 dělme úhlem α. Vyjde-li divise, zaznamenejme si podíl, nevyjde-li, zaznamenejme nejblíže vyšší celistvé číslo. Pak učiňme právě tak s úhlem φ'. Součet obou takto zaznamenaných čísel jest počtem obrazů.

Diskuse tohoto výsledku v případech zvláštních ponechávám čtenáři. Při tom nutno si připomenouti, že v některých případech oba poslední mezi C a C′ zapadající obrazy se kryjí."

Věstník literární.

Rozhledy v oboru mechanických věd od dr. *A. Seydlera* tvoří číslo 2. II. serie ve sbírce přednášek a rozprav, kterou pořádají pp. J. Goll a O. Hostinský. Na padesáti stránkách tu podán velmi krásný přehled zenenáhlého vývinu mechaniky, objasňující spůsobem věcným a přece i neodborníku přístupným hlavní stránky této vědy. Odborníka pobádá čtení těchto rozhledů bezděky k hlubšímu vniknutí do úvah zde načrtaných a to umožní spůsobem nejvhodnějším výtečné dílo o theoretické fysice, jehož první částí autor naši vědeckou literaturu tak značně byl obohatil; kéž je máme co nejdříve celé před rukama. *W.*

Za laskavou podporu, kterou mně v redigování tohoto ročníku pp. prof. **Augustin Pánek**, prof. dr. **A. Seydler**, prof. **J. Sobička** poskytnouti ráčili, vzdávám nejsrdečnější díky. **Ed. Weyr.**