

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bartoloměj Navrátil

O některých základních pojmech proudů a strojů jedno- a vícefazových.
[II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 2, 113--140

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121920>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1898

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O některých základních pojmech proudů a strojů jedno- a vícefazových.

Napsal

Bartoloměj Navrátil,

ředitel vyšší reálné školy v Prostějově.

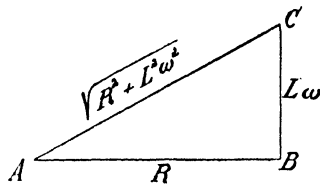
(Dokončení.)

Pro stejnosměrný a stálý proud mizí samoindukce, t. j. $L = 0$, takže

$$J = \frac{E}{R},$$

což jest známý výraz Ohmova zákona platného pro proudy stálé.

Nazývá se pak R *odporem Ohmovým*, $L\omega$ sluje *induktance*, $\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ *impedance*, dříve též *zdánlivý odpor* zvaná. Pro střídavé proudy platí tudíž Ohmův zákon, nahradíme-li Ohmův odpor impedancí. Souvislost těchto tří veličin znázorňuje Flemingův diagram (obr. 6.).



Obr. 6.

Rovnici (8) lze napsati v jiné podobě, zavedeme-li místo ω periodu nebo frekvenci proudu. Otočí-li se OA n -krát za sekundu, jest

$$\omega = 2\pi n,$$

a tudíž, poněvadž $n = \frac{1}{T}$,

$$(8') \quad J = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi nL}{R}\right)^2}} = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi L}{RT}\right)^2}}.$$

Je-li tedy frekvence n velmi veliká, po případě perioda T velmi malá, může jmenovatel při stálém L nabýti hodnoty tak veliké, že J v proudovodu nebo některé části či větvi jeho téměř úplně zmizí. Tím vysvětlují se známé zjevy a pokusy o impedanci.

Elektrická energie. Při stálém proudu měříme elektrickou energii součinem el. m. síly E a intensity proudu J . Při střídavých proudech jsou však obě tyto veličiny proměnný. K určení energie střídavého proudu bylo by tedy potřeba určití pro všechny po sobě následující okamžiky, na př. jedné periody, veličiny E a J , jež se zřetelem k úhlu aktuálního fasového pošinutí k sobě příslušejí, je znásobiti a součiny sečísti, což by byla práce velmi obtížná, již však snadno se vyhnouti lze, užijeme-li opět Blakesleyova theoremu. Značíž v obr. 4. OB maximální el. m. sílu E , OA maximální intensitu J střídavého proudu, φ úhel fasový. Pak jest

$$\frac{OC \cdot OD + OC' \cdot OD'}{2}$$

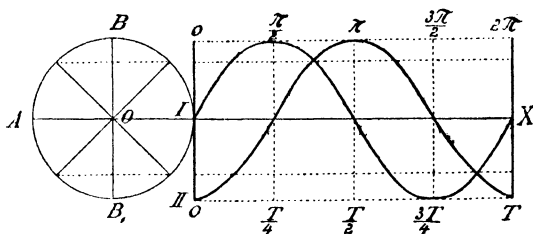
průměr elektrické energie pro dvě polohy o 90° od sebe odlehlé, takže elektrická energie střídavého proudu v 1 sek W přímo plyne z rovnice (2): jesti

$$(9) \quad W = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cos \varphi = \frac{1}{2} EJ \cos \varphi = e_j i_j \cos \varphi.$$

Obdržíme tedy elektrickou energii střídavého proudu, násobíme-li součin efektivní el. m. síly a intensity, kterýžto součin též názvem „zdánlivé wattý“ bývá označován, cosinem fasového úhlu. Skutečné měření vyžaduje tudíž v zásadě tři přístrojů: voltmetru (Kardewova), dynamometru a fasometru; přístroje posléze jmenovaného ku měření úhlu φ .

Proudy dvojfasetvé. Proudy dvojfasetvými slují takové dva proudy střídavé, jež jsou ve fasi k sobě pošínuty o čtvrtinu periody, t. j. vykazuje-li jeden z nich na př. I. (obr. 7.) své pozitivní maximum, počíná druhý právě nullou směrem k pozitivnímu maximu. V obr. 7. jest fasetvé pošínutí dáno úhlem $AOB_1 = \frac{\pi}{2}$. Dvojfasetvé proudy lze tedy vzbuditi dvěma gene-

ratorů na proudy střídavé, jichž armatury jsou vklíněny na společný hřídél a tak ovinuty, aby tomuto požadavku vyhověly.



Obr. 7.

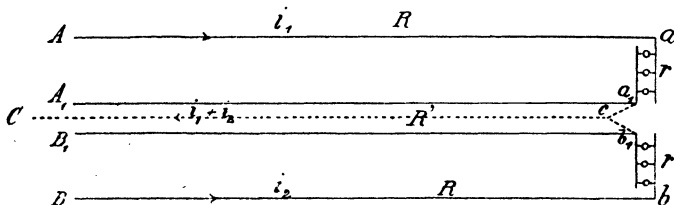
Místo dvou generatorů lze vzítí též jediný, opatříme-li jeho armaturu dvojm samostatným vinutím tak, aby roviny obou cívek stály na sobě kolmo. Také můžeme každý generator na proudy stejnosměrné upravití pro proudy dvojfasetvé, spojíme-li čtyři segmenty kolektoru o 90° od sebe odlehle se 4 izolovanými kroužky na hřídél armatury navlečenými, z nichž proud vhodnými kontakty do proudovodu odvádíme. Nemůžeme zde naším úkolem obšírně popisovati různé konstrukce dvojfasetvých generatorů; v té příčině zde nelze než odkázati k dílům odborným.*) Přijmeme toliko, že mezi svorkami generatoru, z něhož se do proudovodu dvojfasetvý proud vysílá, ať je konstrukce jeho jakákoliv, vznikají el. m. síly e_1 a e_2 o úhel $\frac{\pi}{2}$ k sobě pošínuté, charakterisované rovnicemi

*) Viz na př. Kraemer, Der Drehstrom, seine Erzeugung und Anwendung in der Praxis. Jena 1896. Slovo „Drehstrom“ vyjadřujeme zde terminem „proudy více- nebo proudy mnohofasetvé.“

$$(10) \quad \begin{aligned} e_1 &= e_f \sqrt{2} \sin \omega t \\ e_2 &= e_f \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

předpokládajíc zároveň jakožto případ nejjednodušší, že v okruhu proudu není ani patrné kapacity ani indukce. Srovnaj rovnici (1') a (4).

Elektrický stav v proudovodu s proudy dvojfazovými. Budtež v obr. 8. AA₁ a BB₁ svorky, jimiž do proudovodu Aaa₁A₁ a Bbb₁B₁ vcházejí dva dvojfazové proudy. Napjetí mezi AA₁ budiž e₁, mezi BB₁ pak e₂, Ohmův odpor proudovodu at jest R a r odpor větví aa₁ a bb₁. Pokud proudovody Aaa₁A₁ a Bbb₁B₁ jsou samostatny, jest stav elektrický jednoho nezávislý na elektrickém stavu druhého, jsa toliko podmíněn prostým (jednofazovým) střídavým proudem jím kolujícím.



Obr. 8.

Nahradíme-li však zpětná vedení A₁a₁ a B₁b₁ jediným Cc, může proud jeden pozměnit druhý a pravidlem také pozmění. Jest nyní úkolem naším naléztí výrazy pro sflu proudu ve větvích Aa, Bb a Cc, jež pořadem označíme i₁, i₂, i₁₊₂. Za východiště přijmeme rovnice 10., v nichž e₁ nyní značí napjetí mezi A a C, e₂ napjetí mezi B a C v okamžiku t.

Dle Kirchhofova zákona platí pro okruh proudový, v němž účinkují el. m. síly E₁, E₂, E₃, ... a v jehož jednotlivých částech o odporu R₁, R₂, R₃, ... obíhají proudy intensity J₁, J₂, J₃, ..., rovnice

$$\Sigma JR = \Sigma E.$$

Platí tedy pro okruhy proudové AacC a BbcC, je-li R' odpor zpátečního vedení Cc, rovnice

$$\begin{aligned} e_1 &= (R + r) i_1 + R' (i_1 + i_2) \\ e_2 &= (R + r) i_2 + R' (i_1 + i_2) \end{aligned}$$

čili se zřetelem k rovnicím (10)

$$\begin{aligned} e_f \sqrt{2} \sin \omega t &= (R + r) i_1 + R' (i_1 + i_2) \\ e_f \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) &= (R + r) i_1 + R' (i_1 + i_2), \end{aligned}$$

z nichž plyne

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= \frac{2e_f}{R + r + 2R'} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \\ i_1 - i_2 &= \frac{2e_f}{R + r} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Sečteme-li tyto rovnice a odečteme-li je od sebe, vyjme-li ze součtu i rozdílu $\frac{1}{R + r + 2R'}$, a zavedeme-li pomocný úhel φ , takže

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R + r + 2R'}{R + r} = 1 + \frac{2R'}{R + r},$$

obdržíme po jednoduché redukci

$$(11) \quad \begin{aligned} i_1 &= \frac{e_f \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{R + r + 2R'} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi \right) \\ i_2 &= \frac{e_f \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{R + r + 2R'} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} - \varphi \right) \end{aligned}$$

a pro vedení zpáteční

$$i_1 + i_2 = i_{1+2} = \frac{2e_f}{R + r + 2R'} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right).$$

Dle toho jest efektivní síla proudu pro větve Aa a Bb

$$\frac{e_f \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{R + r + 2R'}$$

a pro větev Cc

$$\frac{e_f \sqrt{2}}{R + r + 2R'}.$$

Zároveň vidíme, že jsou tyto proudy jak mezi sebou tak i k el. m. silám ve fazi pošinuty. Fasové pošinutí dvou veličin, na př. e a i , označíme \underline{ei} a určíme je odečtením fasového úhlu veličiny stojící na místě druhém od fasového úhlu veličiny na místě prvním. Kladná hodnota rozdílu znamená pak, že druhá veličina se opozďuje za první o úhlovou hodnotu nalezenou, záporný rozdíl opak. Dle toho jest

$$\underline{e_1 i_1} = \frac{\pi}{4} - \varphi$$

$$\underline{e_2 i_2} = -\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

t. j. oč i_1 se opozďívá za e_1 , o tolikéž i_2 předbíhá e_2 . Dále jest

$$\underline{e_1 i_{1+2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\underline{e_2 i_{1+2}} = -\frac{\pi}{4},$$

z čehož plyne, že zpětný proud $i_1 + i_2$ se opozďuje o $\frac{\pi}{4}$ čili o $\frac{1}{8}$ periody T za e_1 a o tolikéž e_2 předbíhá. Podobně jest

$$\underline{i_1 i_{1+2}} = \varphi,$$

$$\underline{i_2 i_{1+2}} = -\varphi,$$

$$\underline{i_1 i_2} = 2\varphi.$$

Poněvadž dle rovnice úhel φ určující jest všeobecně $\operatorname{tg} \varphi > 1$, bude též

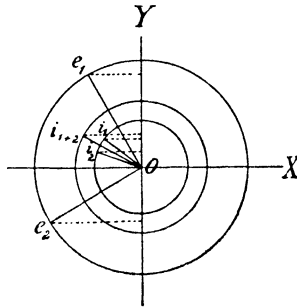
$$\varphi > \frac{\pi}{4} \quad \text{a} \quad 2\varphi > \frac{\pi}{2}.$$

Čím větší jest $R + r$ proti $2R'$, tím více se φ blíží $\frac{\pi}{4}$ a 2φ hodnotě $\frac{\pi}{2}$.

Pro $R + r = \infty$ jest $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a $2\varphi = \frac{\pi}{2}$. Touž měrou blíží se pak nulle fasová pošinutí $\underline{e_1 i_1}$ a $\underline{e_2 i_2}$, vzájemně rovnosti se blíží $\underline{e_1 i_{1+2}}$ a $\underline{i_1 i_{1+2}}$, $\underline{e_2 i_{1+2}}$ a $\underline{i_2 i_{1+2}}$ a konečně $\underline{i_1 i_2}$ hodnotě $\frac{\pi}{2}$.

Zvláště poslední požadavek jest velmi závažný, k čemuž ještě ukážeme později. Ač mu v praktickém provedení úplně vyhověti nelze, může se rozdíl mezi φ a $\frac{\pi}{4}$ alespoň učiniti tak malým, že jej v praxi pominouti možno.

Grafické znázornění el. m. sil a proudů podává zvonkový diagram v obr. 9., v němž poloměry Oe_1 , Oe_2 , Oi_1 , Oi_2 , Oi_{1+2} značí polohy a maximální hodnoty veličin e_1 , e_2 , i_1 , i_2 , i_{1+2} pro jistý všem společný okamžik ($\omega t = \frac{3\pi}{8}$). Skutečné hodnoty pro týž okamžik poskytují jich průměty na osu Y. Průběh jich za



Obr. 9.

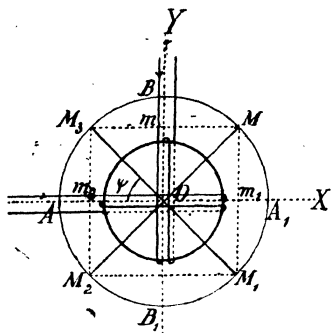
jednu periodu obdržíme, otočíme-li veškerý úsečky jakožto tuhou soustavu úseček postupně o 2π . Provedení zůstaveno budiž čtenáři.

Motor dvojfazový. Mnohofasové proudy docházejí v nejnovejší době rozšíření čím dále tím většího. Charakteristickou účinnost jich vysvětlíme na motoru dvojfazovém, jehož se sice užívá jen málo, jenž však svou jednoduchostí k vysvětlení principu nejlépe se hodí. Budtež (obr. 10.a) AA_1 a BB_1 dvě cívky, zastupující větve ac a bc v obr. 8., jichž roviny jsou na sobě i na rovině papíru kolmy; vedme jimi dva střídavé proudy i_1 a i_2 ve fazi o $\frac{\pi}{2}$ k sobě pošinuté, dané všeobecně rovnicemi

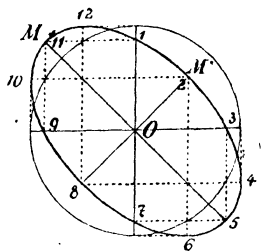
$$i_1 = J \sin \omega t$$

$$i_2 = J \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Jakmile kterou cívkou obíhá proud, povstává magnetické pole kolmé k rovině dotyčné cívky, jehož intenzita, pokud magnetický odpor jest veličinou stálou, se mění tímto způsobem



Obr. 10a.



Obr. 10b.

jako proud sám. Značí-li H jeho maximální intenzitu, příslušnou síle proudu J , v obr. 10a.) znázorněnou délkou $OA = OB$, budou silám proudu i_1 a i_2 odpovídati intenzity magnetického pole

$$h_1 = H \sin \omega t$$

$$h_2 = H \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

které pro

$$\omega t = \frac{3\pi}{4} \text{ čili pro } t = \frac{3}{8} T$$

označeny jsou délkami Om a Om_1 . Obě tyto intenzity se sdruží dle principu rovnoběžníku sil ve výslednici OM . Takto bez obtíží určití lze směr a intenzitu magnetického pole pro libovolné okamžiky periody proudové. Zvětšujeme-li t o $\frac{T}{8}$ vycházejíce na př.

od $\omega t = \frac{\pi}{2}$, nalezneme pro směr a intenzitu magnetického pole pořadem OB , OM , OA_1 , OM_1 atd. Při konstrukcích těchto s výhodou upotřebiti lze obr. 7., v němž pořadnice sinusoid jsou přímo úměrný (po případě rovny dle toho, jaké měřítko přijmeme)

intenzitě magnetického pole*). Pořadnice kladné nanášíme k levé ruce, záporné k pravé ruce orientační figurky Ampéreevy. Jest tedy výsledná intenzita magnetického pole veličina stálá a rovná maximální hodnotě pole jedné z obou složek, což ostatně též snadno odvoditi lze z posledních dvou rovnic. Neboť umocníme-li dvěma a sečteme-li, obdržíme

$$h_1^2 + h_2^2 = H = OM.$$

Zároveň jest

$$\operatorname{tg} m_2 OM_3 = \operatorname{tg} \psi = \frac{Om}{Om_2} = \operatorname{tg} \omega t',$$

takže

$$\psi = \omega t' = \frac{2\pi t'}{T},$$

t. j. projde-li t' všemi hodnotami od 0 — T, proběhne úhel ψ všemi hodnotami od 0 — 2π , t. j. magnetické pole se během jedné periody otočí jednou kolem do kola. Vložíme-li tedy do dutiny cívek magnet otáčivý okolo osy O, bude sledovati oběh magnetických čar silových a otáčeti se zároveň s magnetickým polem. Magnet lze též nahraditi prostou deskou ocelovou nebo válcem ovitým drátem vhodným způsobem. Přístroj takový představuje pak dvojfazový motor, deska nebo válec jeho kotvu. Od motorů na proudy stejnosměrné nebo prosté střídavé liší se tedy motor dvojfazový (a dodejmež hned mnohofazový vůbec) tím, že, kdežto u prvých moment otáčecí vzniká v nehybném poli magnetickém účinkem zevnějších proudů kotvou obíhajících, u motorů dvoj- a vícefazových se magnetické pole samo otáčí, sdělujíc svůj pohyb pohyblivé části motoru.

U našeho motoru jsme přijali fázové posunutí přesně rovné $\frac{\pi}{2}$. Viděli jsme však, že tomu není tak vždy; objevilot se při našem dřívějším vyšetřování, že jest z pravidla

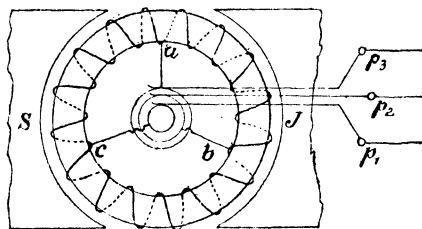
$$2\varphi > \frac{\pi}{2}.$$

*) Skutečné a soustavné provádění četných konstrukcí budiž pro případ tento i pro případy další čtenáři zvlášť doporučeno.

V tomto případě dají sice dvojfásové proudy opět magnetické pole otáčivé, avšak intenzita jeho se periodicky mění, t. j. magnetické pole vykazuje pulsace, jež technickému upotřebení motorů dvojfásových velikou jsou závadou. Proměnnou velikost magnetického pole ukazuje obr. 10b, kdež přijato fázové posunutí proudů rovné 120° . Jest pak OM maximální, OM' minimální hodnota magnetického pole. Celá konstrukce jeví zřejmou podobnost s konstrukcí známých obrazců Lissajouových.

Nemají-li proudy odchylky fázové, nepovstává otáčivé pole magnetické, nevzniká otáčecí moment. Přístroj, jehož schematický náčrtek podává obr. 10a, může tedy též sloužiti k určení, zdali dané dva proudy střídavé mají jakou fázovou odchylku, po případě jak jest tato odchylka veliká. Když se přístroje k tomuto účelu má uživati, opatří se otáčivá část párem spirálním, jehož pružnost sice odchylku od polohy rovnovážné dovoluje, avšak neobmezené otáčení zamezuje. Z velikosti odchylky souditi lze o velikosti fázového posunutí. Přístroj sluje pak fasometr čili fasoměr.

Proudy trojfásové. Proudy trojfásovými zoveme tři střídavé proudy, jež se svou fází od sebe odchyľují o úhel $\frac{2\pi}{3}$ čili 120° . Vytvořiti bychom je mohli třemi generátory na proudy střídavé,



Obr. 11.

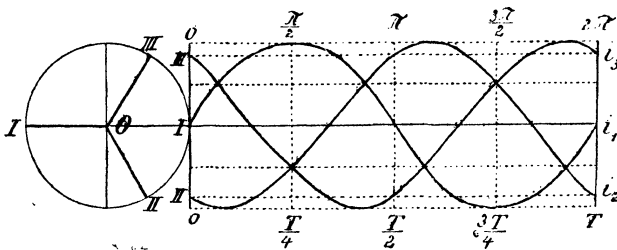
jichž armatury by navlečeny byly na společný hřídel a tak ovinuty, aby této podmínce vyhověly. K vedení by pak potřebí bylo šesti vodičů, tvořících 3 samostatné okruhy proudové. Však místo tří generatorů lze opět sestrojiti jediný, jenž pak sluje generátorem trojfásovým. Odkazující v této příčině opět k cito-

vanému dílu Kramerovu, podotkneme jen, že každý bubnový nebo Grammeův stroj upraviti lze též na trojfazový tím, že na hřídel armatury navlíkneme tři od sebe i od hřídele izolované kroužky, jež spojíme s třemi segmenty kolektoru o 120° od sebe odlehlými, z nichž se proudy vhodnými kontakty odvádějí do proudovodu. Náčrtek tohoto zařízení podává obr. 11. Části *ab*, *bc* a *ca* dají při otáčení induktoru proudy o $\frac{2\pi}{3}$ ve fazi k sobě pošinuté, jak se čtenář znající konstrukci a účinnost Grammeova stroje přesvědčiti může.*)

Mathematický výraz proudů trojfazových podávají všeobecně rovnice:

$$\begin{aligned} i_1 &= J \sin \omega t \\ i_2 &= J \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_3 &= J \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Graficky jsou zobrazeny v obr. 12., kdež za východiště přijato jest $t = 0$.

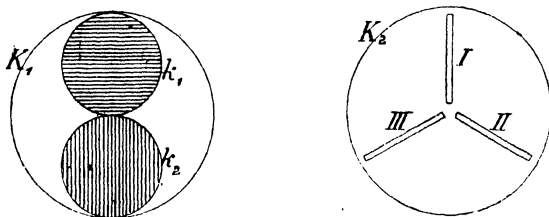


Obr. 12.

Průběh trojfazových proudů lze též snadno znázorniti jednoduchým mechanickým zařízením, jež zakládá se na tom, co už dříve o znázorňování střídavých proudů (viz obr. 2) bylo řečeno. Na kotouči K_1 (obr. 13.) z bílého tuhého papíru narýsuje dva kruhy k_1 a k_2 , jež ku zvýšení kontrastu můžeme položití barvou

*) Takto upraven jest stroj realky Innsbrucké, o němž na jiném místě už zmínka byla učiněna.

červenou a zelenou. Do středu zasadíme hřídelk, na nějž navlíkneme otáčivý kotouč K_2 , opatřený třemi radiálními výřezy I, II, III, svírajícími úhly 120° . Délka tetiv kruhů k_1 a k_2 , jež v těchto výřezích v daném okamžiku jsou viditelné, předsta-



Obr. 13.

vují intenzity trojfazových proudů, zbarvení jich směr, při čemž jest lhostejno, značíme-li směr pozitivní zbarvením červeným nebo zbarvením zeleným.

Elektrický stav v proudovodu s proudy trojfazovými. Spojení tří cívek okruhu generatoru s místem, na němž se účinnost elektřiny jeví, a jež stručně okruhem motorovým nazveme, žádá na pohled 6 vodičů. Přihledneme-li však blíže, shledáme, že dostačí i jen 3 vodiče. Způsob spojení cívek generatoru mezi sebou s proudovodem a okruhem motorovým může býti různý. Zejména užívá se a) spojení uzavřeného čili trojúhelníkového, b) otevřeného čili hvězdivého a c) smíšeného. Případy tyto stručně rozebereme, leč opět jen pro nejjednodušší případ, kdy není patrné kapacity ani samoindukce, a že všechny větve motorového okruhu jsou stejně zatíženy. *)

a) *Spojení uzavřené čili trojúhelníkové* jest schematicky znázorněno obr. 14. ABC jest okruh generatoru, abc okruh motoru. V cívkách generatoru AB, BC, AC vzbudíme el. m. síly e_I , e_{II} , e_{III} opožďující se ve fasi postupně o $\frac{2\pi}{3}$, takže je vyjádřiti lze rovnicemi

$$e_I = e\sqrt{2} \sin \omega t$$

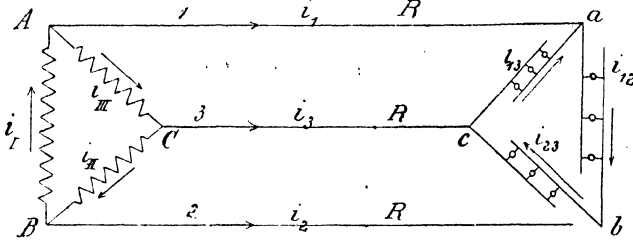
*) Viz Rodet et Busquet, Les courants polyphasés. Paris, 1893.

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad e_{II} &= e_f \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 e_{III} &= e_f \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right),
 \end{aligned}$$

kdež e_f jest opět efektní el. m. síla. Sečteme-li je, nalezneme po jednoduchých redukcích

$$(\beta) \quad e_I + e_{II} + e_{III} = 0.$$

Budiž dále R ohmův odpor v částech proudovodu Aa , Bb , Cc , r odpor v částech okruhu motorového ab , bc , ca ; intensita proudu v cívkách okruhu generatoru at jest i_I , i_{II} , i_{III} (obr. 14.), v proudovodu i_1 , i_2 , i_3 , v okruhu motorovém i_{12} , i_{23} , i_{13} , a připomeňme si zákon Kirchhoffův o rozvětvených proudech, dle něhož



Obr. 14.

pro všechny větve ve společném bodě se stýkající algebraický součet intenzit proudů musí být roven nulle, když totiž všechny proudy směřující k bodu rozvětvení přijmeme za kladné a ostatní za záporné nebo naopak. Pak jest pro body A , B , C , a , b , c

$$\begin{aligned}
 (\gamma) \quad i_1 &= i_I - i_{III} = i_{12} - i_{13} \\
 i_2 &= i_{II} - i_I = i_{23} - i_{12} \\
 i_3 &= i_{III} - i_{II} = i_{13} - i_{23},
 \end{aligned}$$

z čehož pouhým sečtením plyne

$$(\delta) \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

t. j. ze tří vodičů, jež jsme přijali k spojení okruhu generato-

rového s okruhem motorovým, lze v každém okamžiku kterýkoli z nich považovati za vodič zpětný pro ostatní dva.

Dle druhého zákona Kirchhoffova už dříve užitého platí též pro okruhy proudové $ABba$, $BCcb$, $ACca$

$$\begin{aligned} e_I &= R(i_1 - i_2) + ri_{12} \\ (\varepsilon) \quad e_{II} &= R(i_1 - i_3) + ri_{23} \\ e_{III} &= R(i_3 - i_1) + ri_{13}, \end{aligned}$$

z nichž pouhým sečtením nalezneme se zřetelem k rov. β ., že

$$(\xi) \quad i_{12} + i_{23} + i_{13} = 0.$$

Totéž ostatně plyne dle zákona Kirchhoffova z proudového okruhu abc .

Dále odvodíme snadno z rov. (γ) — (ξ) :

$$\begin{aligned} (\eta) \quad i_1 + i_2 &= 2i_{23} + i_{12} \\ i_2 + i_3 &= 2i_{13} + i_{23} \\ i_1 + i_3 &= 2i_{12} + i_{13} \end{aligned}$$

a podobně z rov. (β) , (γ) , (ε) :

$$\begin{aligned} (\theta) \quad i_1 - i_2 &= 3i_{12} = 3i_I \\ i_2 - i_3 &= 3i_{23} = 3i_{II} \\ i_3 - i_1 &= 3i_{13} = 3i_{III} \end{aligned}$$

z rov. (η) a (θ) :

$$(\iota) \quad i_1 = 2i_{12} + i_{23}; \quad i_2 = 2i_{23} + i_{13}; \quad i_3 = 2i_{13} + i_{12}.$$

Konečně vysvitá z rov. (α) , (ε) , že

$$\begin{aligned} i_{12} &= \frac{e_I}{3R + r} = \frac{e_f \sqrt{2}}{3R + r} \sin \omega t, \\ (12) \quad i_{23} &= \frac{e_{II}}{3R + r} = \frac{e_f \sqrt{2}}{3R + r} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_{13} &= \frac{e_{III}}{3R + r} = \frac{e_f \sqrt{2}}{3R + r} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

a pomocí (γ) po stručných redukcích

$$(13) \quad \begin{aligned} i_1 &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3R + r} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right) \\ i_2 &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3R + r} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\ i_3 &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3R + r} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Rovnicemi těmi jest elektrický stav v trojúhelníkovém spojení trojfasovém zřetelně charakterisován, ovšem s obmezením, jež jsme si uložili hned na počátku odstavce. Jak z rov. (12) a (13) patrnó, jest efektívní intensita proudu v proudovodu

$$\frac{e_f \sqrt{3}}{3R + r}$$

a v okruhu motorovém

$$\frac{e_f}{3R + r},$$

poměr obou tudíž $\sqrt{3} = 1.732$. Totéž poměrné číslo platí též pro maximální intensity střídavých proudů v proudovodu a v okruhu motorovém. Dále vidíme z rov. (α) a (12), že

$$\underbrace{e_{I_{12}}}_{=} = \underbrace{e_{II_{23}}}_{=} = \underbrace{e_{III_{13}}}_{=} = 0,$$

t. j. mezi el. m. silami okruhu generatoru a intensitami proudu v příslušných větvích okruhu motorového rozdílu fasového není. Mimo to jest, jak z rov. (12) a (13) na jevo jde

$$\underbrace{i_{12} i_1}_{=} = \underbrace{i_{13} i_3}_{=} = \underbrace{i_{23} i_2}_{=} = \frac{\pi}{6}.$$

Rovnice (12) a (13) lze též, jak se snadno přesvědčíme, seřaditi takto:

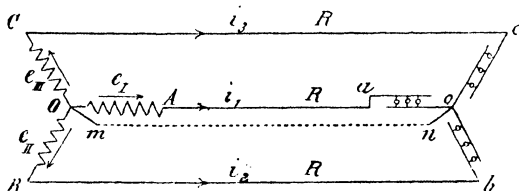
$$(13) \quad \begin{aligned} i_{12} &= M \sin \omega t, & i_1 &= N \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right) \\ i_{31} &= -M \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right), & i_3 &= -N \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\ i_{23} &= M \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), & i_2 &= N \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right), \end{aligned}$$

v nichž pro stručnost položeno bylo

$$\frac{e_f \sqrt{2}}{3R + r} = M \quad \text{a} \quad \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3R + r} = N.$$

Tvoří tedy $i_{12}, i_1, -i_{31}, -i_3, i_{23}$ a i_2 soustavu 6 proudů, při nichž fázové posunutí každého předcházejícího k následujícímu obnáší $\frac{\pi}{6}$ čili 30° . Této vlastnosti jich s prospěchem užijeme při konstrukci trojfázového motoru.

b) *Spojení otevřené čili hvězdové* jest načrtnuto v obr. 15. Buďte OA, OB, OC tři cívky generatoru a e_I, e_{II}, e_{III} pořadem rozdíly potenciálové mezi středem O a koncovými body A, B,



Obr. 15.

C. Tyto rozdíly potenciálové buďtež opět charakterisovány rov. (α) předešlého odstavce, takže o nich rovněž platí rov. (β) téhož odstavce. Pak jsou rozdíly potenciálové mezi body

A a B:

$$e_I - e_{II} = e_f \sqrt{3} \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$$

B a C:

$$(*) \quad e_{II} - e_{III} = e_f \sqrt{3} \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$$

D a A:

$$e_{III} - e_I = e_f \sqrt{3} \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right).$$

Konce A, B, C spojme vodiči Aa, Bb, Cc, jichž odpor jest R, s konci a, b, c okruhu motorového, rovněž hvězdovitě

uspořádaného, jehož jednotlivé větve mají odpor r ; intensity proudů ve vodičích buďtež i_1, i_2, i_3 . Pak jest se zřetelem k bodu o dle prvního zákona Kirchofova

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

a dle druhého zákona pro okruhy proudové $OoBb, BbCc$ a $OocC$ pořadem.

$$\begin{aligned} e_I - e_{II} &= (R + r)(i_1 - i_2) \\ e_{II} - e_{III} &= (R + r)(i_2 - i_3) \\ e_{III} - e_I &= (R + r)(i_3 - i_1), \end{aligned}$$

z nichž odečteme-li je po dvou, plyne se zřetelem k základním rovnicím (α) odstavce předcházejícího

$$(14) \quad \begin{aligned} i_1 &= \frac{e_I}{R+r} = \frac{e_f \sqrt{2}}{R+r} \sin \omega t \\ i_2 &= \frac{e_{II}}{R+r} = \frac{e_f \sqrt{2}}{R+r} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_3 &= \frac{e_{III}}{R+r} = \frac{e_f \sqrt{2}}{R+r} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Z toho tedy plyne:

a) Fase el. m. sil v cívkách generatoru jsou tytéž jako fase proudů v proudovodu.

b) Poněvadž $e_I + e_{II} + e_{III} = 0$, jest rozdíl potenciálový mezi body O a o stále roven nulle, alespoň potud, pokud všechny motorové větve stejně jsou zatíženy; není-li tomu tak, obsahuje-li na př. jedna větev více lamp než kterákoliv z obou ostatních, potřebí jest kompenzačního vedení zpětného, jež v obr. 15. naznačeno jest tečkovanou čarou mn .

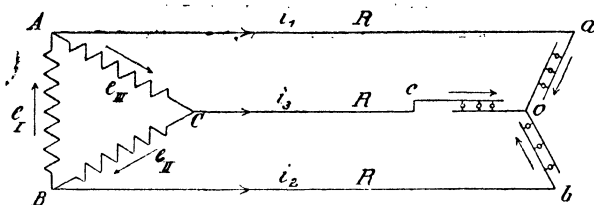
c) El. m. síly mezi A a B , B a C , C a A jsou dle rov. (κ) a (α) k el. m. silám mezi bodem O a body A, B, C ve fasi posunutý o $\frac{\pi}{6}$. Mimo to jest efektivní hodnota prvních $e_f \sqrt{3}$ dle ro-

vníc (κ) a druhých e_f , tedy poměr obou $\sqrt{3} = 1.732$. Je-li tedy na př. mezi O a A efektivní napjetí 100 voltů, obnáší napjetí mezi A a B 173 voltů.

d) Efektivní intenzita proudu v proudovodu jest dle (14)

$$\frac{e_f}{R+r}.$$

c) *Spojení smíšené*, t. j. trojúhelníkové v okruhu jednom, hvězdové v okruhu druhém. Budiž na př. okruh generatorový uspořádán v trojúhelníku a okruh motorový ve hvězdě. (obr. 16.)



Obr. 16.

Pro okruh generatorový platí opět rov. (a) odst. a). Pak nalezneme způsobem podobným jako v odst. a) a b) pro intenzity proudu v proudovodu a okruhu motorovém

$$(15) \quad \begin{aligned} i_1 &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3(R+r)} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right) \\ i_2 &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3(R+r)} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\ i_3 &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3(R+r)} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Kdyby naopak cívky generatoru byly seřaděny ve hvězdě, okruh motorový však v trojúhelníku, nalezneme bychom — z týchž rovnic vycházejíce — pro intenzity proudu v proudovodu

$$(16) \quad \begin{aligned} i_1 &= \frac{3e_f \sqrt{2}}{3R+r} \sin \omega t \\ i_2 &= \frac{3e_f \sqrt{2}}{3R+r} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_3 &= \frac{3e_f \sqrt{2}}{3R+r} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

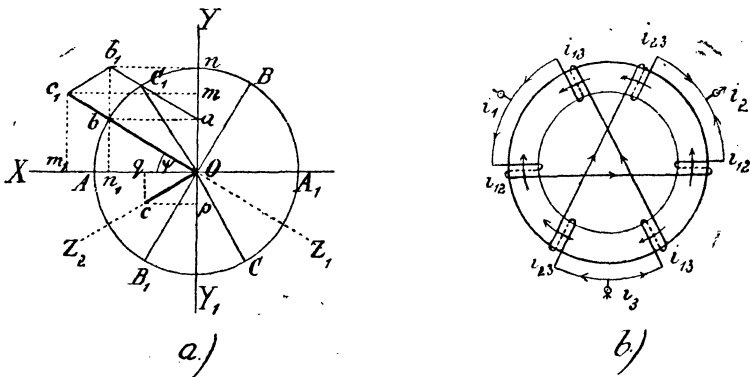
a v okruhu motorovém

$$(16') \quad \begin{aligned} i_{12} &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3R+r} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \\ i_{23} &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3R+r} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \\ i_{13} &= \frac{e_f \sqrt{3} \sqrt{2}}{3R+r} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Z posledních 6 rovnic pak rovněž odvoditi lze, že seřadíme-li je v pořádku: i_{13} , i_3 , $-i_{23}$, $-i_2$, i_{12} , i_1 , obdržíme soustavu proudů, v níž pro dva bezprostředně za sebou následující členy rozdíl fasový obnáší $\frac{\pi}{6}$ podobně jak jsme našli při spojení čistě trojúhelníkovém.

Jakožto všeobecná vlastnost proudů v okruhu motorovém o sobě budiž dle rov. (12), (14), (15) a (16') vyřčeno, že vzájemné jejich fasové posunutí obnáší vždy $\frac{2\pi}{3}$.

Motor trojfazový. V obr. 17a) buďte AA_1 , BB_1 , CC_1 tři cívky, jichž roviny stojí kolmo k rovině papíru a jež od sebe jsou o $\frac{2\pi}{3}$ odkloněny. AA_1 , BB_1 , CC_1 označujte přední polovice cívek a první písmeno každé cívky bod, jímž proud do



Obr. 17.

motoru vstupuje. Prochází-li cívkami proud, vzniká účinkem každé z nich magnetické pole, jehož směr pozitivní (severní) padá dle pravidla Ampérea do OY, OZ₁, OZ₂. V případě, o něž nám zde běží, procházejí cívkami proudy střídavé ve fazi o $\frac{2\pi}{3}$ k sobě pošinuté. Za týchž podmínek jako u motoru dvojfásového můžeme i zde okamžitou intenzitu magnetického pole považovati za úměrnou okamžité intenzitě proudu, takže

$$\begin{aligned} h_1 &= H \sin \omega t \\ h_2 &= H \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ h_3 &= H \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

kdež h a H mají obdobný výraz jako při motoru dvojfásovém. Abychom vypočetli pro jistý okamžik t výslednou hodnotu magnetického pole, položíme, že poloměr kruhu K , na př. OA, představuje v jistém měřítku, jinak libovolném, maximální intenzitu magnetického pole H , jež jedna cívka o sobě může vzbuditi.

Přijmeme-li, že doba t určena jest podmínkou $\omega t = \frac{\pi}{6}$, to jest

$t = \frac{T}{12}$, jest $h_1 = Oa$, $h_2 = Ob$, $h_3 = Oc$. Výslednou intenzitu magnetického pole nalezneme, když složíme veličiny h dle principu mnohoúhelníku sil. Pro výpočet jeví se vhodnějším, zachovati metodu průmětů na dvě osy na sobě kolmé. Jest pak součet průmětů na osu Y

$$y = Om = Oa \cos 60^\circ - Oc \cos 60^\circ = \frac{3}{4} H$$

a na osu X

$$x = Om_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4} H,$$

tedy výslednice

$$V = Oc_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2} H.$$

Výsledek tento platí zatím ovšem jen pro $t = \frac{T}{12}$. Lze však ukázati, že platí všeobecně.

Uvážíme-li totiž, že úhel, o nějž v našem motoru cívky od sebe se odklánějí, jest stálý a rovný $\frac{2\pi}{3}$ a že rovina první cívky obsahuje v sobě osu X, jsou zajisté součty průmětů jednotlivých magnetických polí na osy Y a X

$$y = h_1 + h_2 \cos \frac{2\pi}{3} + h_3 \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$x = h_2 \sin \frac{2\pi}{3} + h_3 \sin \frac{4\pi}{3}$$

čili, když dosadíme a redukujejeme,

$$y = \frac{3}{2} H \sin \omega t,$$

$$x = -\frac{3}{2} H \cos \omega t,$$

kdež v poslední rovnici, poněvadž se nám jen o číselné hodnoty jedná, znaménko — vynechati lze. Z toho plyne

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2} H,$$

t. j. výsledná intenzita magnetického pole, nejsouc závislá na t , jest veličina stálá, s dobou neproměnná a co do velikosti o polovici větší než maximální hodnota magnetického pole, jež jedna cívka o sobě může vzbuditi.

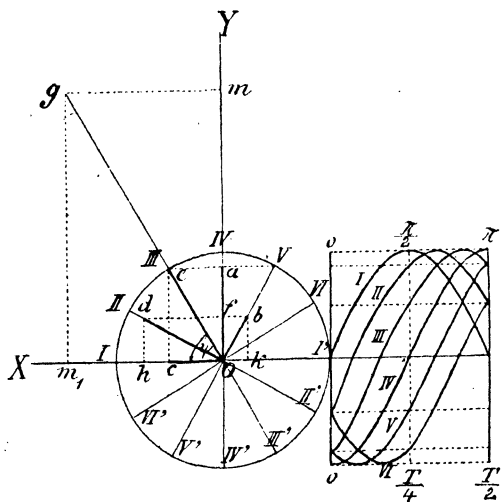
Zároveň vidíme z obr. 17a), že pro jistý okamžik t' jest

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \omega t',$$

takže $\psi = \omega t' = \frac{2\pi t'}{T}$; pro $t' = T$ obdržíme $\psi = 2\pi$, t. j. za jednu periodu T otočí se též jednou magnetické pole jako u motoru dvojfásového.

Obr. 17b) představuje schematicky způsob vinutí závěrečného na Grammeův prsten. Šípy ležící v čarách označují směry proudů, šípy prstenem volně letící směr magnetického pole pro $\omega t = \frac{\pi}{6}$ čili $t = \frac{T}{12}$.

Jak dříve bylo podotčeno (rov. 13'), tvoří při spojení uzavřeném i_{12} , i_1 , $-i_{13}$, $-i_3$, i_{23} a i_2 soustavu proudů o fasovém rozdílu rovném $\frac{\pi}{6}$. Okolnost tu využítkoval v. Dolivo-Dobrovolski tím způsobem, že k vytvoření otáčecího pole magnetického použil nejen proudů i_{12} , i_{23} , i_{13} , nýbrž i proudů proudovodu samého i_1 , i_2 , i_3 veda okolo cívek motoru napřed proudy posléze jmenované samy a rozvětňuje každý z nich teprv potom ve dvě větve. Tím místo dřívějších tří obdržel šest účinných cívek, jež uspořádal tak, že uzavírají spolu úhel $\frac{\pi}{6}$. Tytéž rov. (13') ukazují dále, že veškery tyto intensity nejsou stejny. Aby se pak každou cívkou nabylo téže maximální hodnoty magnetického pole, nahrazeno to, čeho se na intenzitě proudů i_{12} , i_{23} , i_{13} nedostávalo, rozmnožením závitů v poměru $\sqrt{3} = 1.732$ na cívkách, jimiž tyto proudy procházejí.



Obr. 18.

Abychom účinnost tohoto zařízení lépe poznali, označmež v obr. 18. I I', II II', III III', IV IV', V V', VI VI' oněch 6

cívky. Intensity magnetických polí jednotlivých cívek jsou dle (13') dány rovnicemi

$$\begin{aligned} h_{12} &= H \sin \omega t, & h_3 &= H \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \\ h_1 &= H \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right), & h_{23} &= H \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \\ h_{13} &= H \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right), & h_2 &= H \sin \left(\omega t - \frac{5\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Průběh intenzit těchto znázorňují za první polovici periody T sinusoidy v témž obr. 18.

Pro $\omega t = \frac{\pi}{3}$ čili $t = \frac{T}{6}$ jest magnetické pole vzbuzené cívkami I, II, IV, V, VI pořadem znázorněno tlustšími úsečkami Oa, Ob, Oc, Od, Oe , magnetické pole cívky III se právě rovná nulle. Pomocí rovnoběžníku sil nalezneme pak, že výsledná intenzita magnetického pole $V = Og$ pro okamžik nahoře udaný. Tutéž veličinu určíme též snadno výpočtem, užívajíc opět průmětů na osy X a Y . Jak z obrazce patrné, jest

$$\begin{aligned} y &= 2Of + 2Oa = \frac{3\sqrt{3}}{2} H, \\ x &= 2Oc + Oh - Ok = \frac{3}{2} H, \end{aligned}$$

tudíž

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = 3H.$$

Také zde lze bez obtíží dokázati, že relace tato platí všeobecně. Dle téhož obr. 18. jest zajisté

$$\begin{aligned} y &= h_{12} + h_1 \cos 30^\circ + h_{13} \cos 60^\circ + h_3 \cos 90^\circ + h_{23} \cos 120^\circ \\ &\quad + h_2 \cos 150^\circ, \\ x &= h_{12} \sin 0^\circ + h_1 \sin 30^\circ + h_{13} \sin 60^\circ + h_3 \sin 90^\circ + h_{23} \sin 120^\circ \\ &\quad + h_2 \sin 150^\circ. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za h hodnoty, obdržíme po několika redukcích

$$\begin{aligned} y &= 3H \sin \omega t, \\ x &= -3H \cos \omega t, \end{aligned}$$

kdež bychom znaménko — též vynechati mohli, poněvadž běží jen o absolutní hodnoty. Z toho plyne, že

$$(17) \quad V = \sqrt{x^2 + y^2} = 3H.$$

Jest tedy výslednice V nezávislá na t , t. j. magnetické pole jest veličinou stálou.

Dále jest

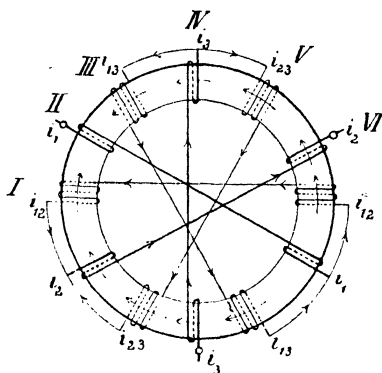
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{m_1 g}{O m_1} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \omega t',$$

tudíž opět

$$\psi = \omega t' = \frac{2\pi t'}{T}.$$

Z toho týž důsledek plyne jako dříve.

Podrobněji ukazuje vnutí dle Dobrovolského na Grammeův prsten (obr. 19.), v němž šípky ležící v čarách opět udávají směry proudů pro $t = \frac{T}{12}$ a letící šípky v prstenu ukazují k místu, kde ve zmíněném okamžiku povstal pol severní.



Obr. 19.

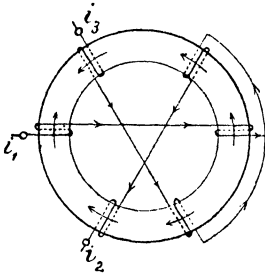
Je-li vnutí motorové otevřené, řídí se otáčivé pole magnetické rovnicemi (14), jež mimo stálý součinitel úplně souhlasí s rovnicí (12). Magnetické pole bude se tudíž nyní shodovati s magnetickým polem při okruhu zavřeném, toliko maximální

jeho hodnota H , vzbuzená jednou cívkou o sobě, se zvětší v poměru

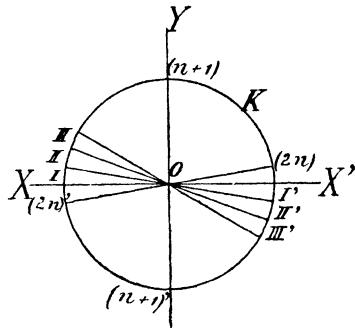
$$\frac{e_f \sqrt{2}}{R+r} : \frac{e_f \sqrt{2}}{3R+r} = \frac{3R+r}{R+r} = 1 + \frac{2R}{R+r}.$$

Netřeba tedy o tom šířiti se dále. Připojujeme toliko v obr. 20. schematický způsob vinutí na prstenový induktor a elektrický a magnetický stav v něm pro $t = \frac{T}{12}$.

Dodatek o motorech s proudy mnohofasovými. Mimo motory trojfasové užívá se též nezřídka motorů mnohofasových, aby se získalo magnetické pole co možná stejnoměrné. Přijmeme



Obr. 20.



Obr. 21.

tedy jakožto obecnější případ, že na buben K (obr. 21.) navinuto jest $2n$ cívek $I I'$, $II II'$, $III III'$ atd., jichž roviny jsou opět kolmy k rovině papíru. Cívka $(n+1)$ budiž prostřední a osa Y leží v rovině její, cívka $2n$ buď poslední, takže cívka $(2n+1)$ už by splývala s cívkou $I I'$, v jejíž rovině nechť leží osa X . Položme dále, že každá cívka o tolik jest odkloněna od cívky první (osy X), oč proud její ve fazi se opožďuje za proudem cívky $I I'$, a že intenzita magnetického pole jisté cívice příslušejícího opět jest úměrna intenzitě proudu v dotčeném okamžiku jí procházejícího. Je-li odklon dvou sousedních cívek,

tedy též fasový rozdíl jejich proudů δ , jest všeobecný výraz pro magnetické pole cívky k -té

$$h_k = H \sin [\omega t - (k - 1) \delta].$$

K výrazu pro výsledné pole magnetické dospějeme tímto elementárním způsobem: Pro cívku $(n + 1)$ jest fasový rozdíl

$n\delta = \frac{\pi}{2}$ a magnetické pole její

$$H \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Průměty jeho na osy X a Y jsou tedy

$$H \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad H \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2}.$$

Vyvolme si dvě cívky od prostřední souměrně na levo a na pravo o úhel δ odchýlené, tedy cívku n a $(n + 2)$; pak jsou jejich magnetická pole

$$H \sin \left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{a} \quad H \sin \left(\omega t - \delta - \frac{\pi}{2} \right)$$

a průměty jich na osu Y

$$H \sin \left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\delta - \frac{\pi}{2} \right)$$

a

$$H \sin \left(\omega t - \delta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\delta + \frac{\pi}{2} \right),$$

takže jich součet dá, jak se snadno přesvědčíme,

$$(A) \quad 2H \sin \omega t \sin^2 \delta.$$

Vezmeme-li pak místo δ postupně 2δ , 3δ , ..., $n\delta$, obdržíme za součty průmětů vždy dvou souměrně k ose Y položených párů postupně dále

$$2H \sin \omega t \sin^2 2\delta$$

$$2H \sin \omega t \sin^2 3\delta$$

.....

$$2H \sin \omega t \sin^2 (n - 1) \delta$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2H \sin \omega t \sin^2 n\delta = H \sin \omega t,$$

kdež zlomek $\frac{1}{2}$ v poslední rovnici tím se vysvětluje, že výraz ten vztahuje se pouze k cívce II', která jiné k sobě přidružené nemá. Poněvadž mimo to průmět pole cívky $(n+1)$ na osu Y jest roven nulle, platí pro součet průmětů na osu Y

$$(u) \quad y = H \sin \omega t [1 + 2 \sin^2 \delta + 2 \sin^2 2\delta + \dots + 2 \sin^2 (n-1)\delta].$$

Docela podobně nalezneme, že průměty polí cívek n a $(n+2)$ na osu X jsou

$$H \sin \left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\delta - \frac{\pi}{2} \right)$$

a

$$H \sin \left(\omega t - \delta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(-\delta - \frac{\pi}{2} \right),$$

jichž součet jest

$$2H \cos \omega t \cos^2 \delta,$$

takže pro úhrnný součet veškerých průmětů na osu X plyne

$$(v) \quad x = H \cos \omega t [1 + 2 \cos^2 \delta + 2 \cos^2 2\delta + \dots + 2 \cos^2 (n-1)\delta].$$

Není pak nesnadno ukázati, že výrazy uzávorkované v rovnicích (u) a (v) jsou sobě rovny. Nebo, jak už určeno bylo, $n\delta = \frac{\pi}{2}$, tedy též všeobecně — značí-li k číslo kladné a celé —

$$(n-k)\delta = \frac{\pi}{2} - k\delta,$$

takže

$$\sin (n-k)\delta = \cos k\delta,$$

z čehož dosazením za k hodnot 1, 2 ... $(n-1)$ plyne rovnost obou výrazů. Nazveme-li hodnotu jejich K, můžeme stručněji napsati

$$\begin{aligned} y &= KH \sin \omega t, \\ x &= KH \cos \omega t, \end{aligned}$$

tudíž výsledná hodnota magnetického pole

$$(18) \quad V = KH.$$

Konečně lze též řady v rovnicích (μ) a (ν) vyjádřiti výrazem uzavřeným. V odstavci, v němž určována byla střední intensita proudu, byla mezi jinými nalezena relace

$$1 + \cos \delta + \cos 2\delta + \dots + \cos n\delta = \frac{\sin(n+1)\frac{\delta}{2} \cos n\frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}},$$

z níž plyne, položíme-li 2δ místo δ a zastavíme-li se u členu n -tého,

$$1 + \cos 2\delta + \cos 4\delta + \dots + \cos(n-1)2\delta = \frac{\sin n\delta \cos(n-1)\delta}{\sin \delta}.$$

Dle známého goniometrického vzorce jest však všeobecně

$$\cos(k-1)2\delta = 2\cos^2(k-1)\delta - 1,$$

z čehož odvodíme, dosadíme-li za k hodnoty 2, 3, ..., n ,

$$\begin{aligned} 1 + 2\cos^2\delta + 2\cos^2 2\delta + \dots + 2\cos^2(n-1)\delta \\ = n - 1 + \frac{\sin n\delta \cos(n-1)\delta}{\sin \delta}. \end{aligned}$$

Pomocí této relace nalezneme, majíce na paměti, že $n\delta = \frac{\pi}{2}$,

$$K = n,$$

takže rovnice (18) zní pak

$$(18') \quad V = nH.$$

Jest tedy při našem zařízení výsledná intensita magnetického pole veličinou konstantní a tolikerym násobkem H , kolik cívek jsme přijali, děleným dvěma.

Tomuto způsobu vinutí a uspořádání jednotlivých cívek odpovídá z případů dříve uvedených motorové zařízení Dobrovolského, načrtnuté v obr. 19., kdež $\delta = 30^\circ$ a počet cívek $2n = 6$, takže dle rovnice (18')

$$V = 3H,$$

což úplně souhlasí s rovnicí (17).

V Prostějově, 1896.