Václav A. Hruška

Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 2, 86--97

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121914`

Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných.

Dr. techn. *Václav Hruška,* soukr. docent a asistent české vys. školy technicke v Praze.

(Dokončení.)

Předně tyto kongruence lze řešiti, neboť $NSM\,(e_1 \overset{(1)}{a}_{12},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{13},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{15},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{16},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{23},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{24},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{26},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{34},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{35},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{45},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{46},\ e_1 \overset{(1)}{a}_{56}.\ e_1 (\overset{(1)}{a}_{14} - \overset{(1)}{a}_{25}),\ e_1 (\overset{(1)}{a}_{14} - \overset{(1)}{a}_{36})) = e_1{}^2$ dělí prvý řádek v matici

$$22)\quad \left\| \begin{matrix} \overset{(1)}{K}_{12}, & \overset{(1)}{K}_{13}, & \overset{(1)}{K}_{15}, & \overset{(1)}{K}_{16}, & \overset{(1)}{K}_{23}, & \overset{(1)}{K}_{24}, & \overset{(1)}{K}_{26}, & \overset{(1)}{K}_{34}, & \overset{(1)}{K}_{35}, & \overset{(1)}{K}_{45}, & \overset{(1)}{K}_{46}, & \overset{(1)}{K}_{56}, & \overset{(1)}{K}_{14} - \overset{(1)}{K}_{25}, & \overset{(1)}{K}_{14} - \overset{(1)}{K}_{36} \\ e_1 \overset{(1)}{a}_{45}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{46}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{24}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{34}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{56}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{15}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{35}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{16}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{26}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{12}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{13}, & e_1 \overset{(1)}{a}_{23}, & e_1 (\overset{(1)}{a}_{14} - \overset{(1)}{a}_{25}), & e_1 (\overset{(1)}{a}_{14} - \overset{(1)}{a}_{36}) \end{matrix} \right\|$$

kdežto determinanty 2. řádu jsou vesměs dělitelny $e_1{}^3 e_2$ jak vidíme, jestli v Matici $(\overset{(1)}{\mathfrak{M}})$ odečteme sloupec $\overset{(1)}{K}_{14}, \overset{(1)}{a}_{14}, 1$ od sloupců $\overset{(1)}{K}_{25}, \overset{(1)}{a}_{25}, 1$ a $\overset{(1)}{K}_{36}, \overset{(1)}{a}_{36}, 1$.

Za druhé, je-li ω_2 nějaké řešení kongruencí (21′) pak vedle

$$\overset{(2)}{K}_{r,s} \equiv 0\ (r, s = 1, 2, \dots 6,\ r \not\equiv s \pmod 3)),\ \overset{(2)}{K}_{14} - \overset{(2)}{K}_{25} \equiv 0,$$

$$\overset{(2)}{K}_{14} - \overset{(2)}{K}_{36} \equiv 0$$

(mod $e_1\, e_2$) jest též $\overset{(2)}{K}_{14} \equiv 0 \pmod{e_1\, e_2}$, neboť mezi $\overset{(2)}{K}_{r,s}, \overset{(2)}{a}_{i,k}$ platí obdobné identity jako identity (18) mezi $\overset{(1)}{K}_{r,s}$ a $\overset{(1)}{a}_{i,k}$; jelikož všechny členy, kromě prvních, těchto identit jsou dělitelny $e_1{}^2 e_2$, musí i členy prvé býti dělitelny $e_1{}^2 e_2$ a jelikož $NSM\,(\overset{(2)}{a}_{i,k}, \overset{(2)}{a}_{14} - \overset{(2)}{a}_{25}, \overset{(2)}{a}_{14} - \overset{(2)}{a}_{36}) = e_1\ (i, k = 1, 2, \dots 6,\ r \not\equiv s \pmod 3))$, jest $\overset{(2)}{K}_{14}$ dělitelno $e_1\, e_2$. Pak ovšem z (21′) jde, že též bude $\overset{(2)}{K}_{25} \equiv 0$ a $\overset{(2)}{K}_{36} \equiv 0$ (mod $e_1\, e_2$), t. j. všechny

$$\overset{(2)}{K}_{r,s} \equiv 0 \pmod{e_1\, e_2}\ (r, s = 1, 2, \dots 6).$$

Kdyby nyní $NSM\,(\overset{(2)}{K}_{r,s}) = e_1\, e_2\, \delta\ (r, s = 1, 2, \dots 6)$. tu by musela NSM determinantů 3. řádu v matici $(\mathfrak{M}^{(2)})$ býti dělitelna $e_1{}^2 e_2\, \delta$; ale tato NSM je $e_1{}^2 e_2$, takže $\delta = 1$.

Zavedeme-li tedy do svazku transformaci parametru $\lambda = \omega_1 + e_1 \omega_2 + \lambda$, bude

$$A - \lambda E = A - (\omega_1 + e_1 \omega_2) E - \lambda E \quad \overset{(2)}{A} \quad \lambda E$$

kde forma

$$\overset{(2)}{A} = A - (\omega_1 + e_1 \omega_2) E = \sum_{i,k\,1}^{6} \overset{(2)}{a}_{i,k}\, x_i\, y_k$$

má tu vlastnost, že $NSM\,(\overset{(2)}{a}_{i\,k}) = e_1$ a $NSM\,(\overset{(2)}{K}_{r,s}) = e_1\, e_2$.

Jest. $\overset{(2)}{K} = K \quad L\,(\omega_1 \quad e_1\,\omega_2) + M\,(\omega_1 + e_1\,\omega_2)^2 \quad (\omega_1 + e_1\,\omega_2)^3 \neq 0$, *jelikož* $K \quad L\lambda + M\lambda^2 \quad \lambda^3$ *nemá racionální kořen*. Seznáváme tedy, že elementární dělitelé matice $\| \overset{(2)}{a}_{i,k} \|$ $(i, k = 1, 2, \ldots 6)$ budou $e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3$, kde je e_3 dáno: $e_3 = \dfrac{K^{(2)}}{e_1\, e_2}$, a že pro žádné celé ω nemůže matice formy

$$\overset{(3)}{A} = A - \omega E$$

míti prvé čtyři elementárné dělitele větší než e_1, e_1, e_2, e_2.

V následujícím budu předpokládati, že jsem nejprve provedl takovou transformaci parametru λ, *aby* $NSM\,(a_{i,k}) = e_1$, $(i, k = 1, 2, \ldots 6)$ *a* $NSM\,(K_{r,s}) = e_1\, e_2$ $(r, s = 1, 2, \ldots 6)$ *kde* $1, e_1, e_1\, e_2$ *jsou elementární dělitelé matice* $(\mathfrak{M})$. *Čísla* e_1, e_2 *jsou invariantní při každé lineární kogredientní transformaci o celých elementech formy* A. *Současně jest* $K \neq 0$.

5. Uvažujme matice

$$M_1 \quad \begin{Vmatrix} K_{45} & K_{46} & K_{24} & K_{34} \\ a_{12} & a_{13} & a_{15} & a_{16} \end{Vmatrix} \qquad M_2 \quad \begin{Vmatrix} K_{54} & K_{56} & K_{15} & K_{35} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{26} \end{Vmatrix}$$

$$M_3 \quad \begin{Vmatrix} K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \end{Vmatrix} \qquad M_4 \quad \begin{Vmatrix} K_{51} & K_{61} & K_{12} & K_{13} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} & a_{46} \end{Vmatrix}$$

$$M_5 \quad \begin{Vmatrix} K_{42} & K_{62} & K_{21} & K_{23} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{56} \end{Vmatrix} \qquad M_6 \quad \begin{Vmatrix} K_{13} & K_{3} & K_{31} & K_{32} \\ a_{61} & a_{62} & a_{64} & a_{65} \end{Vmatrix}$$

Je-li hodnost některé z těchto matic menší než 2, jsou všecky její elementy rovny nule.

Na př. M_1: Je-li $a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{16} = 0$, jest též

$$\begin{aligned} K_{45} &= \quad a_{12}\, a_{36} - a_{13}\, a_{26} + a_{16}\, a_{23} = 0, \\ K_{46} &\quad - a_{12}\, a_{35} + a_{13}\, a_{25} - a_{15}\, a_{23} = 0, \\ K_{24} &\quad - a_{13}\, a_{56} + a_{15}\, a_{36} - a_{16}\, a_{35} = 0, \\ K_{34} &= \quad a_{12}\, a_{56} - a_{15}\, a_{26} + a_{16}\, a_{25} - 0. \end{aligned}$$

Je-li naopak $K_{45} = K_{46} = K_{24} = K_{34} = 0$, jest vzhledem ke $K \neq 0$ a ke

$$\begin{aligned} 0 &= K_{34}\, K_{56} - K_{35}\, K_{46} + K_{36}\, K_{45} = K\, a_{12} \\ 0 &= K_{24}\, K_{56} \quad K_{25}\, K_{46} + K_{26}\, K_{45} = \quad K\, a_{13} \\ 0 &= K_{23}\, K_{46} \quad K_{24}\, K_{36} + K_{26}\, K_{34} = - K\, a_{15} \\ 0 &= K_{23}\, K_{45} \quad K_{24}\, K_{35} + K_{25}\, K_{34} = K\, a_{16} \end{aligned}$$

též $a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{16} = 0$.

Kdyby nyní ani všechny a_{12}, a_{13}, a_{15}, a_{16} ani všechny K_{45}, K_{46}, K_{24}, K_{34} nebyly rovny nule a přece hodnosť matice M_1 byla menší než 2, tu uvažujme matici $\overset{(1)}{M}_1$ utvořenou pro formu $\overset{(1)}{A} = A - \omega E$ právě tak, jako byla M_1 utvořena pro formu A; ω je vhodné celé racionálné číslo. Bylo by pak:

$$\overset{(1)}{a}_{12} = a_{12}, \quad \overset{(1)}{a}_{13} = a_{13}, \quad \overset{(1)}{a}_{15} = a_{15}, \quad \overset{(1)}{a}_{16} = a_{16},$$

$\overset{(1)}{K}_{45} = K_{45} - \omega\, a_{12}$, $\overset{(1)}{K}_{46} = K_{46} - \omega\, a_{13}$, $\overset{(1)}{K}_{24} = K_{24} - \omega\, a_{15}$, $\overset{(1)}{K}_{34} = K_{34} - \omega\, a_{16}$. Je-li tedy M_1 hodnosti menší než 2, lze ustanoviti ω tak, aby $\overset{(1)}{K}_{45} = \overset{(1)}{K}_{46} = \overset{(1)}{K}_{24} = \overset{(1)}{K}_{34} = 0$. Jelikož $\overset{(1)}{K} = K + L\omega + M\omega^2 + \omega^3 \neq 0$, musí býti též $a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{16} = 0$ a tedy též $K_{45} = K_{46} = K_{24} = K_{34} = 0$.

Musí tedy aspoň jedna z matic M_i ($i = 1, 2, \dots 6$) býti hodnosti 2. Kdyby všechny byly hodnosti menší, musely by $a_{i,k} = 0$ (i, $k = 1, 2 \dots 6$, $r \not\equiv s$ [mod 3]); avšak potom by

$$P(\lambda) = K + L\lambda + M\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda \quad a_{14})(\lambda - a_{25})(\lambda - a_{36})$$

bylo reducibilní.

6. Je-li $a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0$ nemůže dokonce žádný z determinantů

$$\begin{matrix} K_{15} & K_{16} \\ a_{24} & a_{34} \end{matrix}, \begin{vmatrix} K_{24} & K_{26} \\ a_{15} & a_{35} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} K_{34} & K_{35} \\ a_{16} & a_{26} \end{vmatrix}, \begin{matrix} K_{24} & K_{34} \\ a_{15} & a_{16} \end{matrix}, \begin{matrix} K_{15} & K_{35} \\ a_{24} & a_{26} \end{matrix}, \begin{matrix} K_{16} & K_{26} \\ a_{34} & a_{35} \end{matrix}$$

rovnati se nule. Jest totiž $K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0$ a pro formu $\overset{(1)}{A} = A - \omega E$ jest rovněž $\overset{(1)}{a}_{45} = \overset{(1)}{a}_{46} = \overset{(1)}{a}_{56} = 0$, $\overset{(1)}{K}_{12} = \overset{(1)}{K}_{13} = \overset{(1)}{K}_{23} = 0$, $\overset{(1)}{a}_{i,k} = a_{i,k}$ (i, $k = 1, 2, \dots 6$, $i \not\equiv k$ [mod 3]). Je-li na př. $\begin{vmatrix} K_{24} & K_{34} \\ a_{15} & a_{16} \end{vmatrix} = 0$, lze ustanoviti racionálné ω tak, aby bylo

$$\overset{(1)}{K}_{24} = K_{24} - \omega\, a_{15} = 0 \qquad \overset{(1)}{K}_{34} = K_{34} - \omega\, a_{16} = 0.$$

Z identit

$$\overset{(1)}{K}\,\overset{(1)}{a}_{15} = \overset{(1)}{K}_{23}\,\overset{(1)}{K}_{46} - \overset{(1)}{K}_{24}\,\overset{(1)}{K}_{36} + \overset{(1)}{K}_{26}\,\overset{(1)}{K}_{34}$$

$$\overset{(1)}{K}\,\overset{(1)}{a}_{16} = \overset{(1)}{K}_{23}\,\overset{(1)}{K}_{45} - \overset{(1)}{K}_{24}\,\overset{(1)}{K}_{35} + \overset{(1)}{K}_{25}\,\overset{(1)}{K}_{34}$$

jde pak vzhledem ke $\overset{(1)}{K} = K + L\omega + M\omega^2 + \omega^3 \neq 0$, že $\overset{(1)}{a}_{16} = a_{16} = 0$, $\overset{(1)}{a}_{15} = a_{15} = 0$.

Potom by ovšem nemohlo

$$P(\lambda) = K + L\lambda^2 + M\lambda^2 + \lambda^3 = -\begin{vmatrix} a_{14}-\lambda & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25}-\lambda & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36}-\lambda \end{vmatrix}$$

býti ireducibilní, neboť by mělo racionálný kořen $a_{11} = \lambda$. Nemůže tedy onen determinant rovnati se nule; podobně to ukážeme o všech ostatních.

7. Označme tedy Δ_i *NSM* determinantů matice M_i $(i = 1, 2 \dots 6)$. Lze transformovati formu A kogredientní transformací o celých racionáných elementech zachovávající formu E tak, aby $NSM\ (\Delta_i) = e_1{}^2 e_2$ $(i = 1, 2, \dots 6)$, t. j. aby $6\binom{4}{2} = 36$ determinantů z matic M_i $(i = 1, 2, \dots 6)$ mělo NSM $e_1{}^2 e_2$.

Nejprve proveďme takovou kogredientní transformaci o celých rac. elementech B zachovávající E, aby $a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0$.*) Pak jest též $\bar K_{12} = \bar K_{13} = \bar K_{23} = 0$. Uvažujme nyní transformaci o matici

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \nu & 0 & 1 & 0 \\ \mu & \nu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

kde λ, μ, ν jsou libovolná čísla celá. Jest $C'EC = E$. Koeficienty formy $\bar A = C'AC$ tedy budou

$$\bar a_{45} = \bar a_{46} = \bar a_{56} = 0, \quad \bar a_{i,k+3} = a_{i,k+3} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$\bar a_{12} = a_{12} + \lambda(a_{14} - a_{25}) - \mu a_{26} + \nu a_{16}$$

$$\bar a_{13} = a_{13} - \lambda a_{35} + \mu(a_{14} - a_{36}) + \nu a_{15}$$

$$\bar a_{23} = a_{23} - \lambda a_{34} + \mu a_{24} + \nu(a_{25} - a_{36})$$

Můžeme nyní najíti λ, μ, ν tak aby $\bar a_{12}$, $\bar a_{13}$, $\bar a_{23}$ neměly jiné společné míry kromě e_1, která je společnou měrou koeficientů na pravo.**)

V následujícím vynechme k vůli pohodlí oba pruhy nad a_{12}, a_{13}, a_{23} a předpokládejme, že jsme docílili předem, že $NSM\ (a_{12}, a_{13}, a_{23}) = e_1$. Uvažujme transformace o maticích:

*) Takovou transformaci viz v: „O systémech singulárních relací mezi periodami Abelových funkcí tří proměnných", Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. 48., str. 43—56.

**) Viz Frobenius, Theorie d. linearen Formen mit ganzen Coefficienten, Journal f. d. reine u. angew. Math., Bd. 86, S. 116—208, Art. 4.

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad C_2 = \begin{Vmatrix} 1 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad C_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & -\eta & 1 \end{Vmatrix} .$$

kde α, β, γ, δ, ε, η jsou celá čísla. Jest

$$C_i' \, E \, C_i = E \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dále po užiti kterékoliv z těchto transformací na formu A bude pro transformovanou formu $a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0$.

Po transformaci C_1 bude

$$a_{12} \quad a_{12} + \cdot \quad a_{32}\,\beta$$
$$a_{13} = a_{13} + a_{32}\,\alpha \quad \cdot$$
$$a_{23} = a_{23}.$$

Po transformaci C_2 bude

$$a_{12} = a_{12} + \cdot \quad - a_{13}\,\delta$$
$$a_{13} = a_{13}$$
$$a_{23} = a_{23} + a_{13}\,\gamma - \cdot$$

Po transformaci C_3 pak bude

$$a_{12} = a_{12}$$
$$a_{13} \quad a_{13} + \cdot + a_{12}\,\eta$$
$$a_{23} = a_{23} + a_{21}\,\varepsilon \quad \cdot$$

Buď na př. a_{12} nejmenši co do prosté hodnoty z a_{13}, a_{12}, a_{23}. Pak použitím transformace C_3 můžeme docíliti, že $|a_{13}| < |a_{12}|$, $|a_{23}| < |a_{12}|$. Je-li pak na př. a_{13} nejmenší co do prosté hodnoty z a_{12}, a_{13}, a_{23}, tu pomocí transformace C_2 docílíme, že $|a_{12}| < |a_{13}|$, $|a_{23}| < |a_{13}|$ atd. Postupným užitím těchto transformací docílíme, že jedno z čísel a_{12}, a_{13}, a_{23} bude rovno e_1 a ostatní dvě budou rovny nule. Buď na př. $a_{12} = a_{13} = 0$, $a_{23} = e_1$. Užijeme-li pak transformace C_1 při $\alpha = 1$, $\beta \;\; -1$, bude po všech těchto transformacích

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = e_1.$$

Vedle toho zůstává stále $a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0$.

Kdyby nyní $NSM\,(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = e_1^2 e_2 d$, tu uvažujme formu $\overset{(1)}{A} - A \;\; e_2\,\omega E$, kde ω je vhodné číslo celé. Utvoříme-li nyní matice $\overset{(1)}{M_1}$, $\overset{(1)}{M_2}$, $\overset{(1)}{M_3}$ vzhledem k formě $\overset{(1)}{A}$ právě tak, jako byly utvořeny matice M_1, M_2, M_3 vzhledem k formě A, tu seznáme, že NSM determinantů matice $\overset{(1)}{M_i}$ bude zase Δ_i $(i = 1, 2, 3)$; neboť $\overset{(1)}{M_i}$ vznikne z M_i odečteme-li v této $e_2\,\omega$ — nás. druhý řádek od prvého (srv. vzorce 14). Pak bude možno určiti ω tak, aby všechny elementy $\overset{(1)}{K}_{r\,s,}$ které se nacházejí v prvých řádkách matic $\overset{(1)}{M_1}$, $\overset{(1)}{M_2}$, $\overset{(1)}{M_3}$ byly dělitelny $e_1\;e_2\;d$. Bude stačiti k tomu dokonce řešiti pouze kongruence

$$
(23)\qquad
\left.
\begin{array}{l}
\overset{(1)}{K}_{1.} \quad K_{1.} \quad e_2\;\omega\;a_{1.} \equiv 0 \\
\overset{(1)}{K}_{4.} \quad K_{46} \quad e_2\;\omega\;a_{13} \equiv 0 \\
\overset{(1)}{K}_{.6} \quad K_{.6} - e_2\;\omega\;a_{23} \equiv 0
\end{array}
\right\} \pmod{e_1\;e_1\;d}
$$

Předně tyto kongruence lze řešiti, neboť jest $a_{12} = a_{13} - a_{23} = e_1$ a tedy vlastně se redukují na

$$
(23')\qquad
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{K_{1.}}{e_1\;e_2} - \omega \quad 0 \\
\dfrac{K_{16}}{e_1\;e_2} \quad \omega \quad 0 \\
\dfrac{K_{.6}}{e_1\;e_2} - \omega \quad 0
\end{array}
\right\} \pmod{d}
$$

a $\dfrac{K_{4.}\quad K_{46}}{e_1\;e_2}$, $\dfrac{K_{45}\quad K_{16}}{e_1\;e_2}$ jsou dělitelny d, neboť $e_1\;(K_{45} - K_{16})$ a $e_1\;(K_{4.}\quad K_{56})$ jsou determinanty matice M_1 resp. M_2.

Za druhé, jsou-li (23) splněny, pak bude též $\pmod{e_1\;e_2\;d}$:

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{a_{.}}{e_1}\overset{(1)}{K}_{1.} \quad \dfrac{a_{.}}{e_1}\overset{(1)}{K}_{1.} \quad \dfrac{a_{2}}{e_1}(K_{2.} \quad e_{.}\;a_{.5}) - \\
\dfrac{a_4}{e_1}(K_{4.} \quad e_2\,\omega\,a_{1.}) - \dfrac{1}{e}\;(a_{1.}\,K_{.1} \quad a_{15}\;K_{45}) \equiv 0 \\
\dfrac{a_{1.}}{e_1}\overset{(1)}{K} - \dfrac{a_{.}}{e}\overset{(1)}{K}_{1} \quad \dfrac{a_{12}}{e_1}(K_{1} \quad e\,\omega\,a_{1}) \\
\dfrac{a_{1.}}{e_1}(K_{4} - e_2\,\omega\,a_{1.}) = \dfrac{1}{e_1}(a_{1.}\,K_{11} - a_{.6}\;K_{1.}) \quad 0 \\
\dfrac{a_{12}}{e_1}\overset{(1)}{K}_{.} \quad \dfrac{a_{.1}}{e}\overset{(1)}{K}_{1.} \quad \dfrac{a_{.2}}{e_1}(K_{.} \quad e\,\omega\,a_{.1}) \\
\dfrac{a_{.1}}{e_1}(K_{1.} - e_{.}\,\omega\,a_{12}) - \dfrac{1}{e_{.}}(a_{1.}\;K_{1} \quad a_{.1}\;K_{45}) \quad 0 \\
\dfrac{a_{1}}{e_1}\overset{(1)}{K} - \dfrac{a_{.}}{e_1}\overset{(1)}{K} \quad \dfrac{a_{1.}}{e_1}(K_{.} \quad e_2\,\omega\,a_{26}) \\
\dfrac{a_{2.}}{e}(K_{1} - e_{.}\,\omega\,a_{12}) - \dfrac{1}{e_1}(a_{1.}\;K_{.} - a_{26}\;K_{45}) \equiv 0 \\
\dfrac{a_{13}}{e_1}\overset{(1)}{K}_{.6} - \dfrac{a_{34}}{e_1}\overset{(1)}{K}_{46} \quad \dfrac{a_{.3}}{e_1}(K_{16} - e_2\,\omega\,a_{34}) - \\
\dfrac{a_{34}}{e_1}(K_{16} - e_2\,\omega\,a_{13}) \quad \dfrac{1}{e_1}(a_{13}\;K_{16} - a_{34}\;K_{46}) \equiv 0
\end{array}
$$

$$\frac{a_{13}}{e_1}\overset{(1)}{K}_{26} - \frac{a_{35}}{e_1}\overset{(1)}{K}_{46} \quad \frac{a_{13}}{e_1}(K_{26} - e_2\,\omega\,a_{35}) - \frac{a_{35}}{e_1}(K_{16} - e_2\,\omega\,a_{13}) = \frac{1}{e_1}(a_{13}K_{26} - a_{35}K_{16}) \equiv 0$$

t. j. vzhledem k $a_{12} = a_{13} = e_1$ bude též

$$\overset{(1)}{K}_{24} \equiv \overset{(1)}{K}_{34} \equiv \overset{(1)}{K}_{15} \equiv \overset{(1)}{K}_{35} \equiv \overset{(1)}{K}_{16} \equiv \overset{(1)}{K}_{26} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ e_1\ e_2\ d).$$

Pak ovšem vzhledem k identitám

$$\overset{(1)}{a}_{12}\overset{(1)}{K}_{14} + \overset{(1)}{a}_{32}\overset{(1)}{K}_{34} + \overset{(1)}{a}_{52}\overset{(1)}{K}_{54} + \overset{(1)}{a}_{62}\overset{(1)}{K}_{64} = 0$$
$$\overset{(1)}{a}_{12}\overset{(1)}{K}_{25} + \overset{(1)}{a}_{13}\overset{(1)}{K}_{35} + \overset{(1)}{a}_{14}\overset{(1)}{K}_{45} + \overset{(1)}{a}_{16}\overset{(1)}{K}_{46} = 0$$
$$\overset{(1)}{a}_{13}\overset{(1)}{K}_{36} + \overset{(1)}{a}_{12}\overset{(1)}{K}_{26} + \overset{(1)}{a}_{14}\overset{(1)}{K}_{46} + \overset{(1)}{a}_{15}\overset{(1)}{K}_{56} = 0$$

bude též $\overset{(1)}{K}_{14}, \overset{(1)}{K}_{25}, \overset{(1)}{K}_{36}$ dělitelno $e_1\ e_2\ d$. Jelikož mimo to $\overset{(1)}{K}_{12} = \overset{(1)}{K}_{13} = \overset{(1)}{K}_{23} = 0$ jsou též dělitelny $e_1\ e_2\ d$, tu bychom měli všech $\binom{6}{2} = 15$ čísel $\overset{(1)}{K}_{r,s} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ e_1\ e_2\ d)$ $(r, s = 1, 2, \ldots 6)$ což odporuje konci odst. 4, že $\overset{(1)}{K}_{r,s}$ nemohou míti větší společnou míru než $e_1\ e_2$. Jest tedy $d = 1$.

Tudíž $NSM\ (\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3) = e_1{}^2 e_2$. *Tím spíše* $NSM\ (\varDelta_i) = e_1{}^2 e_2\ (i = 1, 2, \ldots 6)$.

8. Dokažme si, že formu A můžeme podrobiti takové transformaci $C \| c_{i,k} \|$, kogredientní, o celých elementech, neměnící formy E, aby po té transformaci byla NSM determinantů matice

$$M_1 \left\| \begin{matrix} K_{45} & K_{46} & K_{24} & K_{34} \\ a_{12} & a_{13} & a_{15} & a_{16} \end{matrix} \right\|$$

právě $e_1{}^2 e_2$.

Dle odst. 7. můžeme předpokládati, že jsme formu A podrobili předem takové transformaci neměnící formy E, že

(24) $a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0$ a $NSM\ (\varDelta_i) = e_1{}^2 e_2\ (i = 1, 2, \ldots 6)$.

Determinanty matice M_1 jsou až snad na znamení rovny od nuly různým determinantům matice

$$N_1 \left\| \begin{matrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{14} & K_{24} & K_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Tyto determinanty jsou dělitelny $e_1{}^2 e_2$. Kdyby byla $e_1{}^2 e_2 D$ jejich

NSM, tu by též $e_1{}^2 e_2 D$ dělila všechny determinanty matice $N_1 C^{-1}$. Vypočtěme si ji. Jest-li označíme

$$
(25) \quad
\begin{aligned}
K_s &= \sum_{r=1}^{3} (K_{r,\, s+3}\; c_{r+3,\, 1} - K_{r+3,\, s+3}\; c_{r,\, 1}) \\
K_{s+3} &= \sum_{r=1}^{3} (- K_{r\, s}\; c_{r+3,\, 1} + K_{r+3,\, s}\; c_{r,\, 1}),
\end{aligned}
\quad (s = 1, 2, 3)
$$

tu dle vzorců *(12)* a *(19)* bude

$$
(26) \quad
\begin{aligned}
K_{4,\, \sigma} &= \sum_{s=1}^{6} K_s\, c_{s,\, \sigma+3} \\
K_{4,\, \sigma+3} &= - \sum_{s=1}^{6} K_s\, c_{s\, \sigma}.
\end{aligned}
$$

Označme ještě

$$
(27) \quad a_s = \sum_{r=1}^{6} a_{r\, s}\, c_{r\, 1}
$$

takže je

$$
(28) \quad a_{1,\, \sigma} = \sum_{s=1}^{6} a_s\, c_{s\, \sigma}.
$$

Budou tedy státi v i-tém sloupci matice $\overline{N_1}\, C^{-1}$:

$$
K_{44}\, \gamma_{i1} + K_{45}\, \gamma_{i2} + K_{46}\, \gamma_{i3} + K_{14}\, \gamma_{i4} + K_{24}\, \gamma_{i5} + K_{34}\, \gamma_{i6} =
$$

$$
= - \sum_{s=1}^{6} K_s \sum_{\sigma=1}^{6} c_{s\, \sigma}\, \gamma_{i\, \sigma} = - K_i \text{ v řádku prvém a}
$$

$$
\sum_{\sigma=1}^{6} a_{1\, \sigma}\, \gamma_{i\, \sigma} = \sum_{s=1}^{6} a_s \sum_{\sigma=1}^{6} c_{s\, \sigma}\, \gamma_{i\, \sigma} = a_i \text{ v řádku druhém.}
$$

V řádku třetím budou čísla:

$$
\gamma_{14} = - c_{41},\; \gamma_{24} = - c_{51},\; \gamma_{34} = - c_{61},\; \gamma_{44} = c_{11},\; \gamma_{54} = c_{21},\; \gamma_{64} = c_{31}.
$$

Jest tedy:

$$
(29) \quad N_1 C^{-1} \quad
\begin{Vmatrix}
-K_1, & -K_2, & -K_3, & -K_4, & -K_5, & -K_6 \\
a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \\
-c_{41}, & c_{51}, & c_{61}, & c_{11}, & c_{21}, & c_{31}
\end{Vmatrix}
$$

Naopak NSM determinantů matice (*29*) dělí všechny determinanty matice N_1, jak vidíme, složíme-li ji s maticí C.

Dokažme si nyní, že lze celá čísla c_{i1} ($i = 1, 2 \ldots 6$) zvoliti tak, aby NSM determinantů 3 řádu matice (*29*) byla právě $e_1{}^2 e_2$, takže pak ani N_1 nebude moci míti jiné společné míry determinantů než $e_1{}^2 e_2$.

Determinanty matice (*29*) jsou kubické formy sextárních proměnných c_{i1} ($i = 1, 2, \ldots 6$), Počet jejich jest $\binom{6}{3} = 20$. Jejich koeficienty jsou lineárné kombinace determinantů matice (*16*) a tedy jsou vesměs dělitelny $e_1{}^2 e_2$. Jejich NSM jest právě $e_1{}^2 e_2$, jak vidíme, najdeme-li si koeficienty při nejvyšších mocninách proměnných. Tyto koeficienty najdeme tak, že vždy jednu proměnnou klademe rovnu $+1$ a ostatních pět klademe 0. Provedeme-li to, seznáme, že koeficienty nejvyšších mocnin proměnných v těchto formách, pokud nejsou rovny nule identicky (t. j. pro každé $a_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, \dots 6)$) jsou rovny determinantům matic $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ v odst. 5 (až snad na znamení). Ty pak měly za NSM $e_1{}^2 e_2$. Současně vidíme, že n e b u d o u pro tento náš systém forem splněny všechny kongruence (3) odst. 2.). Bude-li tedy splněna ještě podmínka o neodvislosti binárních forem uvedená v pomocné větě na počátku oddílu I, bude možno voliti za c_{i1} $(i = 1, 2, \dots 6)$ taková celá čísla, aby NSM determinantů matice $N_1 C^{-1}$ byla právě $e_1{}^2 e_2$.

Ona podmínka neodvislosti binárních forem pak je splněna. Kdyby na př. byly lineárně odvislé čtyři binárné formy, jež vzniknou z forem

$$(30)\ \begin{vmatrix} K_1, & K_2, & K_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ -c_{11}, & -c_{21}, & c_{61} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -K_1, & -K_2, & -K_4 \\ a_1, & a_2, & a_4 \\ c_{41}, & -c_{51} & c_{11} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -K_1, & K_2, & K_5 \\ a_1, & a_2, & a_5 \\ -c_{11}, & c_{31}, & c_{21} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} K_1, & -K_2, & -K_6 \\ a_1, & a_2, & a_6 \\ -c_{41}, & -c_{51}, & c_{31} \end{vmatrix}$$

položíme-li zde všechny proměnné kromě c_{41} a c_{11} rovny nule, t. j. kdyby existovala konstantní čísla A_3, A_4, A_5, A_6 taková, že by bylo pro každé c_{41} a c_{11}:

$$(31)\ A_3 \begin{vmatrix} K_1, & K_2, & K_3 \\ a_1 & a_2, & a_3 \\ c_{41}, & 0, & 0 \end{vmatrix} + A_4 \begin{vmatrix} -K_1, & K_2, & K_4 \\ a_1, & a_2, & a_4 \\ -c_{41}, & 0, & c_{11} \end{vmatrix} + A_5$$

$$+ A_5 \begin{vmatrix} K_1, & K_2, & K_5 \\ a_1, & a_2, & a_5 \\ -c_{41}, & 0 & 0 \end{vmatrix} + A_6 \begin{vmatrix} K_1, & K_2, & K_6 \\ a_1, & a_2, & a_6 \\ -c_{41}, & 0, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K_1, & K_2, & (K_3 A_3 + K_4 A_4 + K_5 A_5 + K_6 A_6) \\ a_1, & a_2, & a_3 A_3 + a_4 A_4 + a_5 A_5 + a_6 A_6 \\ c_{41}, & 0, & c_{11} A_4 \end{vmatrix} = 0 \text{ při } \begin{array}{l} c_{21} = c_{31} \\ c_{51} = c_{61} = 0 \end{array}$$

tu by patrně existovala další dvě konstantní čísla A_1, A_2 taková, že pro každé c_{41} a c_{11} při $c_{21} = c_{31} = c_{51} = c_{61} = 0$ by bylo:

$$(32)\ \begin{cases} K_1 A_1 + K_2 A_2 + K_3 A_3 + K_4 A_4 + K_5 A_5 + K_6 A_6 = 0 \\ a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 + a_5 A_5 + a_6 A_6 = 0 \\ -c_{41} A_1 + c_{11} A_4 = 0 \end{cases}$$

Odtud by tedy plynuly rovnice:

$$A_1 = 0, \quad A_4 = 0$$

$$(33)\ \begin{cases} K_{15} A_2 + K_{16} A_3 - K_{12} A_5 - K_{13} A_6 = 0 \\ a_{42} A_2 + a_{43} A_3 + a_{45} A_5 + a_{46} A_6 = 0 \\ -K_{45} A_2 - K_{46} A_3 + K_{42} A_5 + K_{43} A_6 = 0 \\ a_{12} A_2 + a_{13} A_3 + a_{15} A_5 + a_{16} A_6 = 0 \end{cases}$$

Předpokládali jsme však na počátku tohoto odstavce, že je $a_{15} = a_{16} = a_{26} = 0$ a tedy $K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0$. Tudíž A_2, A_3 by musely hověti rovnicím:

$$\begin{aligned} K_{15}\, A_2 + K_{16}\, A_3 &= 0 \\ a_{12}\, A_2 + a_{13}\, A_3 &= 0 \end{aligned}$$

odkud jde $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, jelikož dle odst. 6. jest $\begin{vmatrix} K_{15} & K_{16} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \neq 0$. A_5, A_6 by tedy musely hověti rovnicím

$$\begin{aligned} K_{12}\, A_5 + K_{13}\, A_6 &= 0 \\ a_{15}\, A_5 + a_{16}\, A_6 &= 0 \end{aligned}$$

kde opět je $\begin{vmatrix} K_{12} & K_{13} \\ a_{15} & a_{16} \end{vmatrix} \neq 0$ dle téhož odstavce; jest tedy též $A_5 = A_6 = 0$. Nejsou tedy vztahy *(31)* možny.

Jelikož jsou splněny všechny podmínky pomocné věty, lze zvoliti za c_{i1} $(i = 1, 2, \ldots 6)$ celá čísla tak, aby *NSM* determinantů matice $N_1 C^{-1}$ bylo $e_1{}^2 e_2$. Určíme-li nyní $c_{i,k}$ $(i = 1, 2, \ldots 6;$ $k = 2, 3, \ldots 6)$ tak, $C'EC = E$,*) tu *NSM* determinantů 3. řádu matice N_1 bude $e_1{}^2 e_2$. Bude pak též *NSM* determinantů 2. řádu matice M_1 $e_1{}^2 e_2$. Transformace v odst. 7. uvedené a právě určená C po sobě provedené jsou pak equivalentní s jedinou transformací kogredientní, zachovávající formu E a mající celé racionálné elementy.

Věta III. *Lze najíti kogredientní transformaci o celých racionálných elementech neměnící formy E tak, aby po této transformaci byla NSM determinantů matice*

$$M_1 \quad \begin{matrix} K_{15} & K_{46} & K_{24} & K_{34} \\ a_{12} & a_{13} & a_{15} & a_{16} \end{matrix}$$

rovna $e_1{}^2 e_2$.

9. V následujícím můžeme tedy předpokládati, že jsme formu A předem podrobili takové transformaci, že *NSM* determinantů matice

$$(34) \qquad M_1 \quad \begin{matrix} K_{15} & K_{46} & K_{24} & K_{34} \\ a_{12} & a_{13} & a_{15} & a_{16} \end{matrix} \quad \text{je } e_1{}^2 e_2.$$

Předpokládáme dále, že

$$P(\lambda) = K + L\,\lambda + M\,\lambda^2 + \lambda^3$$

nemá racionálného kořene (jest irreducibilní v oboru racionálných čísel). Pokusme se redukovati svazek $A - \lambda E$ methodou O. Nicolettiho.**) Odstavce tohoto spisu budu citovati značkou (*O.N.*).

*) Frobenius, Zur Theorie der Transformation der Thetafunktionen, Journal von Crelle, Bd. 89, 1880, S. 40.

**) Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari, Annali di Matematica (Brioschi), sec III, tomo XIV. (1908), p. 265–325.

Determinant svazku $A - \lambda E$ je $| a_{i,k} - \lambda \varepsilon_{i,k} | = P^2(\lambda)$ $(i, k = 1, 2, \ldots 6)$. *NSM* minorů determinantu $| a_{i,k} - \lambda \varepsilon_{i,k} |$ $(i, k = 1, 2, \ldots 6)$ bude pak $P(\lambda)$. Elementární dělitelé tohoto svazku forem jsou tedy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Predellova čísla $h = h_0 = 2$, $h_1 = 0$ (O. N. odst. 3). Elementy $x_k^{\varrho, u}$ $(\varrho = 1, 2;\ u = 0, 1, 2;\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ kanonické matice splňují rovnice (*O. N.* odst. 7., vzorec (*24*).*)

$$(35)' \quad \sum_{k=1}^{6} a_{i,k}\, x_k^{\varrho, u} - \sum_{k=1}^{6} \varepsilon_{i,k}\, x_k^{\varrho, u-1} + a_{3-u} \sum_{k=1}^{6} \varepsilon_{i,k}\, x_k^{\varrho, 2} = 0$$

$\varrho = 1, 2;\ u = 0, 1, 2;\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ x_k^{\varrho, -1} = 0;$ při tom je $a_3 = K$, $a_2 = L$, $a_1 = M$. Rovnice (*35*) tedy zní

$$(35) \quad \left.\begin{cases} \sum_{k=1}^{6} a_{i,k}\, x_k^{\varrho, 0} + K x_{i+3}^{\varrho, 2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{6} a_{i,k}\, x_k^{\varrho, 1} - x_{i+3}^{\varrho, 0} + L x_{i+3}^{\varrho, 2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{6} a_{i,k}\, x_k^{\varrho, 2} - x_{i+3}^{\varrho, 1} + M x_{i+3}^{\varrho, 2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{6} a_{i+3,k}\, x_k^{\varrho, 0} - K x_i^{\varrho, 2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{6} a_{i+3,k}\, x_k^{\varrho, 1} + x_i^{\varrho, 0} - L x_i^{\varrho, 2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{6} a_{i+3,k}\, x_k^{\varrho, 2} + x_i^{\varrho, 1} - M x_i^{\varrho, 2} = 0 \end{cases}\right\} \begin{matrix} (i = 1, 2, 3) \\ \varrho = 1, 2 \end{matrix}$$

Z těchto 2×6 rovnic o 2×6 neznámých jest pouze 2×4 neodvislých. Bude z nich možno vypočítati $x_i^{\varrho, 0}$ a $x_i^{\varrho, 1}$ pomocí $x_i^{\varrho, 2}$ ve tvaru:

$$(36) \begin{cases} x_i^{\varrho, 0} = \sum_{k=1}^{3} (K_{i,k}\, x_{k+3}^{\varrho, 2} - K_{i,k+3}\, x_k^{\varrho, 2}) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ \left.\begin{array}{l} x_i^{\varrho, 1} = M x_i^{\varrho, 2} - \sum_{k=1}^{6} a_{i+3,k}\, x_k^{\varrho, 2} \\ x_{i+3}^{\varrho, 1} = M x_{i+3}^{\varrho, 2} + \sum_{k=1}^{6} a_{i,k}\, x_k^{\varrho, 2} \end{array}\right\} (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$
$$(\varrho = 1, 2)$$

kde $x_r^{1, 2}$, $x_r^{2, 2}$ $(r = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ značí libovolných 12 čísel; budou-li tato čísla celá, budou též $x_r^{\varrho, 0}$ a $x_r^{\varrho, 1}$ $(r = 1, 2, 3, 4, 5. 6)$ celá. Proveďme kogredientní transformaci proměnných svazku $A - \lambda E$.

$$(37) \qquad S \left\{ \begin{aligned} x_i &= \sum_{\varrho=1}^{2} \sum_{t\varrho=0}^{2} x_i^{\varrho,\, t\varrho}\, \bar{x}_{\varrho,\, t\varrho} \\ y_k &= \sum_{\sigma=1}^{2} \sum_{\tau\sigma=0}^{2} x_k^{\sigma,\, \tau\sigma}\, \bar{y}_{\sigma,\, \tau\sigma} \end{aligned} \right\}$$

Dostaneme tak ze svazku $A - \lambda E$ svazek

$$\bar{A} - \lambda \bar{E} = \sum_{\varrho,\, \sigma=1}^{2} \sum_{t\varrho,\, \tau\sigma=0}^{2} (a_{\varrho,\, t\varrho;\, \sigma,\, \tau\sigma} - \lambda\, \bar{\varepsilon}_{\varrho,\, t\varrho;\, \sigma,\, \tau\sigma})\, \bar{x}_{\varrho,\, t\varrho}\, \bar{y}_{\sigma,\, \tau\sigma} =$$

$= S'\,(A - \lambda E)\, S$ v němž jest

$$(38) \left\{ \begin{aligned} \bar{a}_{\varrho,\, t\varrho;\, \sigma,\, \tau\sigma} &= \sum_{i,\, k=1}^{6} a_{i,\, k}\, x_i^{\varrho,\, t\varrho}\, x_k^{\sigma,\, \tau\sigma} \\ \bar{\varepsilon}_{\varrho\, t\varrho;\, \sigma,\, \tau\sigma} &= \sum_{i,\, k=1}^{6} \varepsilon_{i,\, k}\, x_i^{\varrho,\, t\varrho}\, x_k^{\sigma,\, \tau\sigma} = x_1^{\varrho,\, t\varrho} x_4^{\sigma,\, \tau\sigma} - x_4^{\varrho,\, t\varrho} x_1^{\sigma,\, \tau\sigma} \\ &+ x_2^{\varrho,\, t\varrho} x_5^{\sigma,\, \tau\sigma} - x_5^{\varrho,\, t\varrho} x_2^{\sigma,\, \tau\sigma} + x_3^{\varrho,\, t\varrho} x_6^{\sigma,\, \tau\sigma} - x_6^{\varrho,\, t\varrho} x_3^{\sigma,\, \tau\sigma} \end{aligned} \right.$$

(Pokračování.)

Nová methoda rozkladu reducibilních mnohočlenů jedné proměnné.

Napsal Prof. *Zdeněk Chládek* v Hodoníně.

Jsou známy dvě methody, jak stanoviti dělitele mnohočlenu reducibilního: methoda starší, Kroneckerova[1]) posléze zjednodušená Rungem,[2]) opírajíci se o interpolační vzorce, a druhá, Mandlova,[3]) která vypočítává součinitele dělitelů hledaných přímo pomocí diofantických rovnic, jež vzniknou ze vztahů platících mezi součiniteli danými a hledanými. Obě vyžadují mnoho počítání a jsou proto pro praxi nevýhodné.

V následujícím vyložím methodu novou, vzniklou zjednodušením a sloučením obou uvedených, která už proto, že obecně po krátkých úvahách umožňuje zjistiti, zda předložený mnohočlen jest vůbec reducibilní nebo ne, uspoří mnoho počítání pokusného, s použitím tabulek multiplikačních pak omezuje počet nutných operací na minimum.

Mnohočlen daný s celistvými součiniteli budiž

$$F\,(x) = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \ldots + c_n\, x^n, \text{ kde } c_n > 0.$$

Jest patrno, že $F\,(x) \equiv c_0$ (mod x) a každý dělitel $F\,(x)$ musí dle celistvého čísla co modulu, jež za x dosadíme, být shodný se svým absolutním členem.

[1]) Crelles Journ. sv. 92.
[2]) Crelles Journ. sv. 94.
[3]) Crelles Journ. sv. 113.