Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bronisłav Knaster

Přehled teorie nerozložitelných kontinuí

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 8, 310--337

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121903

Přehled teorie nerozložitelných kontinuí.*)

Bronisław Knaster.

(Došlo 31. března 1933.)

I. Úvod. Názvy a označení. Rozbor příkladu. Obecné věty. Ireducibilní kontinua.

1. U D. Hilberta a S. Cohn-Vossena čteme (*Anschauliche Geometrie*, Berlín 1932, str. 254): „Později se ukázalo, že topologické věty přes svoji zdánlivou neurčitost souvisí právě s nejpřesnějšími abstraktními kvantitativními výroky v matematice, totiž s algebrou, s teorií funkcí komplexní proměnné a s teorií grup. V přítomnosti mezi všemi větvemi matematiky topologická badání náležejí k nejplodnějším a k nejúspěšnějším.“ Obecnost množinového a grupového základu moderních topologických metod, tak odlišných od běžné techniky klasických partií matematiky, dává topologii zvláštní půvab, budí však také dojem těžké přístupnosti této nauky u těch, kdo se dají snadno odstrašiti zdánlivě nezbytnou spoustou předběžných vědomostí. Taková obava není nikterak oprávněna. Neboť při studiu topologie, jako mnoha jiných větví geometrie, je vydatným ulehčením *názornost* předmětu, která často dovoluje i do těžkých otázek vniknouti a jim porozuměti pouhou představou.

Ve svých přednáškách chci podati co nejnázorněji přehled výsledků speciální partie moderní množinové topologie, která však jako žádná jiná uvádí přímo ve střed reje topologických zvláštností, a ukázati, jak zevrubné studium těchto zvláštností odkrývá netušenou harmonii a zákonitost, jakož i nové vztahy a obecně platné věty, které místy vedou k novým hlediskům a řetězům problémů v jiných partiích matematiky. Zvolil jsem právě *teorii nerozložitelných kontinuí* také jednak proto, že k jejímu rozvoji značně přispěli moji učitelé, kolegové a žáci, jednak proto, že doplňuje naši zásobu *individuelně známých* geometrických obrazců novými typy zcela zvláštní struktury, které sotva mohou nevzbuditi pozornost kteréhokoli geometra. Při tom budiž zdůrazněno, že složitá *geometrická* struktura nerozložitelných kontinuí je ku podivu spojena s výjimečnou *logickou* prostotou pojmu samého, jež vysvětluje překvapující fakt, že tyto útvary se vyskytují ve velké řadě zdánlivě spolu nesouvisících topologických problémů.

*) Přednášky, které měly býti prosloveny v březnu 1933 na Masarykově universitě v Brně na pozvání přírodovědecké fakulty. Přeložil E. Čech.

Kontinuum je nerozložitelné prostě tehdy, když není součtem dvou od něho různých kontinuí.

2. Náhodou mají nerozložitelná kontinua i *historicky* svou zvláštnost: jejich objev byl totiž způsoben chybou. Podle známé věty C. Jordana rovinná jednoduchá zavřená křivka (jedno-jednoznačný a oboustranně spojitý obraz kružnice) roztíná rovinu v právě dvě oblasti a je společnou hranicí těchto dvou oblastí. Hledaje obrácení této věty vyšetřoval A. Schönfliess pojem zavřené křivky, t. j. společné hranice dvou rovinných oblastí a předpokládal, že taková zavřená křivka roztíná rovinu vždy v právě dvě oblasti [*24*,*) str. 124, XIV]. Tento omyl byl užitečný a plodný. Velký holandský topolog L. E. J. Brouwer brzy nato ukázal, že existují řezy, které roztínají rovinu v *libovolný* (konečný nebo spočetný) počet oblastí a které jsou hranicí každé z těchto oblastí [*1*; v. též *2*]. Byly to arci spíše popisy než matematické definice, spíše nástiny důkazu než přesné dedukce. Ovšem sama povaha takových řezů činí jejich strukturu hodně složitou. Stačí však na př. prohlédnouti si barevné obrazce ve *Vorlesungen über Topologie I* od B. v. Kerékjártó (Berlín 1923), str. VIII a 118, nebo přečísti si názorný popis (v podstatě podle Yoneyamy [*30*, str. 60**)]) v *Einfachste Grundbegriffe der Topologie* od P. Alexandrova (Berlín 1932), str. 4, abychom byli přesvědčeni, že vhodné zjednodušení geometrického vzhledu těchto příkladů může vésti k odhalení jejich tajemství a k soustavnému studiu jejich topologických vlastností. To provedli pozdější badatelé: Z. Janiszewski, K. Kuratowski, S. Mazurkiewicz a j. Tu se složitost oněch příkladů objevila aspoň přehnanou a ukázalo se dále, že mají společnou důležitou vlastnost *vnitřní* (t. j. definovatelnou beze vztahu k ostatním bodům roviny) a kterou jejich tvůrce s počátku nepostřehl, totiž *nerozložitelnost*.

Existují nerozložitelná kontinua neroztínající rovinu. Počneme nejjednodušším takovým příkladem.

3. Budeme užívati obvyklého označení a operátoru $\overline{A}$ (K. Kuratowski, *10*). Píšeme $a \varepsilon A$ ve smyslu, že bod a náleží do [jest *prvkem* (élément)] množství A; $A \subset B$ ve smyslu, že množství A je *části* (sous-ensemble) množství B. $A = B$ znamená, že $A \subset B$ i $B \subset A$ současně. Když $A \subset B$ a $A \neq B$, jest A *vlastní* (vrai) částí B. Symboly $A + B$, $A \,.\, B$ a $A - B$ znamenají po řadě *součet* (somme), *průřez* (partie commune, produit) a *rozdíl* (différence) množství A a B, t. j. množství těch prvků, které jsou v A *nebo* v B, v A *i* v B a v A, *ne však* v B.

Když A je celý uvažovaný prostor, množství $A - B$ nazývá se *komplement* B (complémentaire) a značíme je $\complement B$. Zřejmě vždy $A - B = A \,.\, \complement B$.

E_n znamená euklidovský n-rozměrný prostor.

*) Ležaté číslice odkazují na bibliografii na konci článku.

**) Idea tohoto příkladu pochází od Wady.

Množství A a B, jejichž průřez je *prázdný* (vide), tedy $AB = 0$, nazveme *disjunktní* (disjoints).

Součet množství A a množství jeho *hromadných bodů* (points d'accumulation) nazývá se *uzavřený obal* (fermeture) množství A a značí se $\overline{A}$. Když $A = \overline{A}$, A jest *uzavřené* (fermé). Když $\complement A = \overline{\complement A}$, A jest *otevřené* (ouvert). Množství $F(A) = \overline{A} \,.\, \overline{\complement A}$ je *hranice* (frontière) množství A.

Uzavřené množství, jehož každá nekonečná část má aspoň jeden hromadný bod, nazývá se *kompaktní* (compact). Množství v E_n je kompaktní, když a jen když jest uzavřené a *ohraničené* (borné).

Nechť $A \subset B$. Pravíme, že A je *husté* (dense) nebo *řídké* (non dense) v B, když $B \subset \overline{A}$, resp. když $B \subset \overline{B - \overline{A}}$. Je-li B uzavřené, lze psáti $=$ místo $\subset$.

Množství A a B nazývají se *oddělená* (séparés), když žádné z nich neobsahuje bodu hromadného pro druhé, t. j. když $\overline{A}B + A\overline{B} = 0$. (Uzavřená A, B jsou oddělená, jakmile jsou disjunktní.) Množství M nazývá se *souvislé* (connexe), když není součtem dvou oddělených neprázdných množství, t. j. když $M = A + B$, $A \neq 0 \neq B$ implikuje, že $\overline{A}B + A\overline{B} \neq 0$. Kompaktní souvislé množství nazývá se *kontinuum* (continu). Otevřené souvislé množství jmenuje se *oblast* (région).

Když A jest a $A - B$ není souvislé, pravíme, že B je *řezem* A nebo, že A *roztíná* (coupe) B. Pravíme, že B je řezem *mezi dvěma body*, když $A - B$ je součet dvou oddělených množství, z nichž každé obsahuje jeden z obou bodů.

Množství A nazývá se *ireducibilní* (irréductible) vzhledem k nějaké vlastnosti, když ji má samo, ne však žádná jeho vlastní část. A nazývá se *nasycené* (saturé) vzhledem k nějaké vlastnosti, když ji má samo, ne však žádné množství, jehož je A vlastní částí. Množství ireducibilní vzhledem k vlastnosti býti kontinuem a obsahovati dva dané body nazývá se *ireducibilní kontinuum mezi těmi body*. Obdobné jsou definice (*úplného*) *ireducibilního řezu a ireducibilního řezu mezi dvěma body*.

Množství A nasycené vzhledem k vlastnosti býti souvislou částí B nazývá se *komponentou* (composante) množství B. Komponenty uzavřeného množství jsou kontinua.

Funkce $\varrho(a, b)$ dvou proměnných bodů daného množství nazývá se jeho *metrikou* (métrique), když není záporná, je $= 0$ pouze pro $a = b$ a vyhovuje trojúhelníkové nerovnosti $\varrho(a, b) + \varrho(a, c) \geqq \varrho(b, c)$. Její hodnota v bodech a, b je *vzdálenost* (distance) těchto bodů.

Dolní hranice vzdáleností $\varrho(a, b)$, kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, nazývá se *vzdálenost* množství A, B; znak $\varrho(A, B)$. Horní hranice vzdáleností $\varrho(a, b)$, kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon A$ nazývá se *průměr* (diamètre) množství A; znak $\delta(A)$.

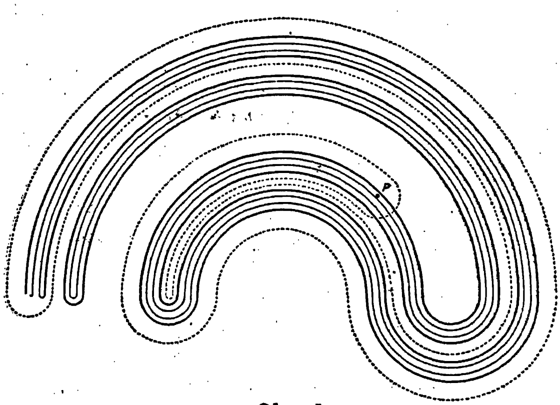
Množství hodnot funkce $f(p)$ definované na množství A, t. j. pro všecky $p \varepsilon A$, nazývá se *obraz* A (image); znak $f(A)$. Funkce (korespondence, transformace) jednojednoznačná a oboustranně spojitá (biunivoque et bicontinue) nazývá se *homeomorfie* (homéomorphie) nebo *topologická transformace*; dvě množství A, B, pro něž taková funkce $f(A) = B$ existuje, jsou *homeomorfní* (homéomorphes).

Na konec poznamenejme, že se stalo zvykem nazývati kontinuum A, které je řídké v jiném kontinuu B (tedy $B = \overline{B - A}$), *kontinuem zhuštění* (continu de condensation) kontinua B.

4. *Nerozložitelné kontinuum* B_t. V E_2 nechť C_0 je dokonalé řídké Cantorovo množství, t. j. množství těch bodů úsečky [0, 1] na ose X, jejichž souřadnice lze v triadické soustavě číselné psáti

bez cifry 1. Zvolíme-li $t \varepsilon C_0$ jakkoli, lze *jedním a jen jedním způsobem* rozložiti C_0 v posloupnost $\{C_i\}$, kde $i=1, 2, \ldots$, množství C_i disjunktních, geometricky podobných množství C_0 a takových, že $\delta(C_i) = 1 : 3^i$, $C_0 = t + \sum_{i=1}^{\infty} C_i$. Jest $t = \lim_{i \to \infty} C_i$. Na př. pro $t = 0$ množství C_i skládá se z bodů $(x, 0)$, kde $2 : 3^i \leq x \leq 1 : 3^{i-1}$. Nechť c_i je střed množství C_i.

Nechť D_i je součet polokružnic o středu c_i procházejících každým jednotlivým bodem z C_i *nad* nebo *pod* osou X podle toho, zda $i = 0$ či $i > 0$. Položme $\mathsf{B}_t = \sum_{i=1}^{\infty} D_i$. B_t je nerozložitelné kontinuum.



Obr. 1.

Zkoumejme nejprve strukturu množství B_0. Spojitý tah v obr. 1 udává aproximaci tohoto množství (sr. *11*, str. 209). Označme W spočetné množství „triadicky racionálních" bodů z C_0, t. j. těch $t \varepsilon C_0$, které jsou krajními body (ohraničených i neohraničených) intervalů *styčných* (contigus) k C_0 (komponent množství $E_1 - C_0$). Jest $C_0 = \overline{W} = \overline{C_0 - W}$. Vidíme, že z bodu $(0, 0) \varepsilon C_0$ jde nahoru polokružnice do bodu $(1, 0)$, pak dolů do bodu $(\frac{2}{3}, 0)$, nato nahoru do $(\frac{1}{3}, 0)$ a tak dále, střídavě nad a pod osou X. Čára složená z těchto polokružnic vychází z bodu $(0, 0)$ a projde *v jistém charakteristickém pořádku* (stále „hustěji") každým bodem z W. Označme $\mathfrak{P}_0$ tuto čáru a nazveme $(0, 0)$ jejím *počátečním bodem*. Můžeme si $\mathfrak{P}_0$ představiti tak, že nějakou polopřímku „balíme" podél ní samé, takže tvoří stále blíž a blíž sama sebe rostoucí oscilace a „kondensuje" se asymptoticky sama k sobě. Tato okolnost je velmi podstatná, neboť má za důsledek, že každý, sebe delší, interval deformované polopřímky je pro ni *kontinuem* *zhuštění* a tedy tím spíš pro B_0, neboť $\mathfrak{P}_0 \subset \mathsf{B}_0$. Vlastnost zde pozorovaná jest, jak uvidíme, charakteristická pro nerozložitelná kontinua.

Zároveň vidíme, že čára $\mathfrak{P}_0$ je v B_0 hustá (jako W v C_0). Tedy $\overline{\mathfrak{P}_0} = \mathsf{B}_0$; B_0 jest uzavřený obal souvislého množství a tedy *kontinuum*. Ježto $C_0 = \overline{C_0 - W}$, je také $\mathsf{B}_0 = \overline{\mathsf{B}_0 - \mathfrak{P}_0}$, t. j. i komplement $\mathfrak{P}_0$ je v B_0 hustý.

Všimněme si nyní *libovolného* „triadicky iracionálního" bodu z C_0, t. j. bodu z $C_0 - W$, na př. bodu $(\frac{1}{4}, 0)$. Vidíme, že z něho vychází nyní *v obou směrech* čára složená zase z polokružnic střídavě nad a pod osou X a obsahující spočetné množství husté v $C_0 - W$, tedy v C_0. Označme tuto čáru $\mathfrak{P}_1$. Jest opět hustá v B_0 a *neprotne čáru* $\mathfrak{P}_0$, od které se liší tím, že *nemá počátečního bodu*: obdrží se z celé přímky tak jako $\mathfrak{P}_0$ z polopřímky. Každá z takových čar $\mathfrak{P}_t$ protne C_0 ve spočetném množství; každým bodem množství C_0 (které je dokonalé, tedy nespočetné) prochází jedna z čar $\mathfrak{P}_t$. Tedy *kontinuum* B_0 *je součet nespočetného systému množství* $\mathfrak{P}_t$ *disjunktních a v* B_0 *hustých*. To platí u každého nerozložitelného kontinua, ale množství $\mathfrak{P}$ nejsou vždy čáry, nýbrž mohou míti velmi složitou strukturu (v. III, str. 332, při K_3). Ale v každém nerozložitelném kontinuu kardinální číslo systému množství $\mathfrak{P}$ je *rovné kardinálnímu číslu kontinua*, jak ukázal S. Mazurkiewicz [*20*]; důkaz spočívá na idei, která nebyla nikterak nasnadě.

V B_0 pozorujeme ještě tuto vlastnost: dva body p, q ležící na stejné čáře $\mathfrak{P}$ dají se spojiti *vlastním* subkontinuem B_0 (složeným z konečného počtu oblouků kružnic). Dá se ukázati, že když vlastní subkontinuum B_0 protne $\mathfrak{P}_0$, je úplně obsaženo v $\mathfrak{P}_0$ [v. *9*, str. 41; čárkovaný tah v obr. 1 týká se tohoto důkazu]. Přímým důsledkem toho jest, že *kontinuum* B_0 *jest ireducibilní mezi každým bodem množství* $\mathfrak{P}_0$ *a každým bodem množství* $\mathsf{B}_0 - \mathfrak{P}_0$, *hustého v* B_0, na př. mezi body $(0, 0)$ a $(\frac{1}{4}, 0)$.

5. Uvidíme, že tato vlastnost je *charakteristická* pro nerozložitelnost. Označme obecně $\mathfrak{P}(a, K)$ množství takových $p \varepsilon K$, že K je reducibilní mezi a a p (na př. $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}[(0, 0), \mathsf{B}_0]$). Ukážeme, že *následující vlastnosti jsou ekvivalentní:*

(1) *K je nerozložitelné kontinuum;*

(2) *každé vlastní subkontinuum je kontinuem zhuštění pro K;*

(3) *pro každý bod $a \varepsilon K$ množství $\mathfrak{P}(a, K)$ je v K prvé kategorie* (ve smyslu R. Bairea), *t. j. je součtem nejvýš spočetného systému množství řídkých v K;*

(4) *existují tři body a, b, c takové, že K jest ireducibilní kontinuum mezi kterýmikoli dvěma z nich;*

(5) *pro každý bod $p \varepsilon K$ množství $K - \mathfrak{P}(p, K)$ je husté v K;*

(6) *pro každý bod $p \varepsilon K$ jest $\mathfrak{P}(p, K) \neq K$;*

(7) *existuje bod* $a \varepsilon K$ *takový, že* $K - \mathfrak{P}(a, K)$ *je husté v* K.

Podle (7) a podle konce odst. 4 B_0 je tedy nerozložitelné kontinuum. Totéž platí o každém B_t, $t \varepsilon C_0$.

Stačí odvoditi implikace (1) → (2) → (3) → (4) → (5) → (6) → (7) → 1.

(1) *implikuje* (2). Nechť naopak existuje kontinuum $Q \subset K$, $Q \neq K \neq \overline{K - Q}$. Kdyby $\overline{K - Q}$ bylo kontinuum, rozklad $K = Q + \overline{K - Q}$ byl by v rozporu s (1). Tedy existují dvě *neprázdná, uzavřená a disjunktní* množství A, B taková, že $\overline{K - Q} = A + B$. Pak součet a průřez množství $M = Q + A$, $N = Q + B$ jsou kontinua: $M + N = Q + A + B = Q + \overline{K - Q} = K$; $MN = Q + AB = Q$ (neboť $AB = 0$). Ale, když součet a průřez uzavřených množství M, N jsou kontinua, také M, N jsou kontinua [v. *5*, str. 211, th. I]. Každé z obou kontinuí M, N je $\neq K$, neboť na př. $K = M = Q + A$ by implikovalo $K - Q \subset A$, tedy $\overline{K - Q} \subset \overline{A} \subset A$; ježto $B \subset \overline{K - Q}$, bylo by $B \subset A$, což je spor, nebo $AB = 0$. Tedy rozklad $K = M + N$ je v rozporu s (1).

(2) *implikuje* (3). Pro jednoduchost nechť K leží v euklidovském prostoru. Nechť $\{S_n\}$ je posloupnost vnitřků všech těch koulí s racionálním poloměrem a s racionálními souřadnicemi středu, pro něž $KS_n \neq 0$, *ne však* $a \varepsilon S_n$. Nechť Q_n je komponenta bodu a v uzavřeném množství $K - S_n$. Tedy $q \varepsilon Q_n \subset K - S_n$, $Q_n S_n \neq 0$, $Q_n \neq K$. Podle (2) Q_n je kontinuum zhuštění pro K, takže $\sum\limits_n Q_n$ je prvé kategorie v K. Zbývá odvoditi, že $\mathfrak{P}(a, K) \subset \sum\limits_n Q_n$. Zvolme $p \varepsilon \mathfrak{P}(a, K)$. Máme dokázati $p \varepsilon \sum\limits_n Q_n$. Ježto $p \varepsilon \mathfrak{P}(a, K)$, body a a p leží na vlastním subkontinuu P kontinua K. Zvolme bod $q \varepsilon K - P$, dále bod r s racionálními souřadnicemi a racionální číslo s tak, že $\varrho(r, q) < s < \varrho(r, P)$. Vnitřek S koule o středu r a poloměru s protne K (neboť $a \varepsilon S$), ne však P, takže není $a \varepsilon S$. Tedy S se vyskytne v posloupnosti $\{S_n\}$; nechť $S = S_{n_0}$. Pak $P \subset K - S_{n_0}$; ježto $a \varepsilon P$ a P je souvislé, jest $P \subset Q_{n_0}$ podle definice Q_{n_0}. Ježto $p \varepsilon P$, jest $p \varepsilon Q_{n_0}$, tedy $p \varepsilon \sum\limits_n Q_n$, j. b. d.

(3) *implikuje* (4). Podle definice $\mathfrak{P}(a, K)$ kontinuum K jest ireducibilní mezi a a každým bodem b z množství $K - \mathfrak{P}(a, K)$, které je $\neq 0$ podle (3) a podle obecné věty Baireovy. Avšak množství $I = \mathfrak{P}(a, K) + \mathfrak{P}(b, K)$ podle (3), jak známo, je zase prvé kategorie v K, tedy mohu opět zvoliti bod $c \varepsilon K - I$, načež K jest ireducibilní i mezi a a c, i mezi b a c.*)

(4) *implikuje* (5). Dokažme napřed, že množství $\mathfrak{P}(a, K)$, $\mathfrak{P}(b, K)$, $\mathfrak{P}(c, K)$ jsou disjunktní. V opačném případě existoval by třeba bod $q \varepsilon \mathfrak{P}(a, K) . \mathfrak{P}(b, K)$. Podle definice existovala by dvě vlastní subkontinua A, B taková, že $(a) + (q) \subset A \subset \mathfrak{P}(a, K)$, $(b) + (q) \subset B \subset \mathfrak{P}(b, K)$. Pak by $S = A + B$ bylo subkontinuum $\subset \mathfrak{P}(a, K) + \mathfrak{P}(b, K)$ a obsahující body a, b. Ježto K jest ireducibilní mezi a a b, bylo by $S = K$, tedy $\mathfrak{P}(a, K) + \mathfrak{P}(b, K) = K$, tedy $c \varepsilon \mathfrak{P}(a, K)$ nebo $c \varepsilon \mathfrak{P}(b, K)$, což je v rozporu se (4).

Nechť nyní p je libovolný bod z K. Ježto množství $\mathfrak{P}(a, K)$, $\mathfrak{P}(b, K)$, $\mathfrak{P}(c, K)$ jsou disjunktní, bod p je nejvýš v jednom z nich, takže mohu předpokládati, že p není ani v $\mathfrak{P}(a, K)$ ani v $\mathfrak{P}(b, K)$. Pak K jest ireducibilní mezi a a p i mezi b a p a ovšem i mezi a a b. Tedy množství $\mathfrak{P}(a, K)$, $\mathfrak{P}(b, K)$,

*) Podle uvedené věty S. Mazurkiewicze [*20*] existuje za našich předpokladů dokonce část K *s kardinálním číslem kontinua* (obsahující po jednom bodu z každého $\mathfrak{P}$) taková, že K jest ireducibilní mezi kterýmikoli dvěma body z té části. Význam slabší vlastnosti (4) je však v tom, že *stačí* pro nerozložitelnost.

$\mathfrak{P}(p, K)$ jsou opět disjunktní. Zejména $\mathfrak{P}(a, K) \subset K - \mathfrak{P}(p, K)$. Avšak podle obecné věty z teorie kompaktních ireducibilních kontinuí [5, str. 221, th. VIII] množství $\mathfrak{P}(a, K)$ je v K husté, tedy $K = \overline{\mathfrak{P}(a, K)} \subset \overline{K - \mathfrak{P}(p, K)} \subset K$, takže $\overline{K - \mathfrak{P}(p, K)} = K$, j. b. d.

(5) *implikuje* (6). Podle (5) $K - \mathfrak{P}(p, K) \neq 0$, tedy $\mathfrak{P}(p, K) \neq K$.

(6) *implikuje* (7). Nechť $a \varepsilon K$. Podle (6) existuje $b \varepsilon K - \mathfrak{P}(a, K)$, takže K jest ireducibilní kontinuum mezi a a b. Víme již, že pak $K = \overline{\mathfrak{P}(b, K)}$. Stačí ukázati, že $\mathfrak{P}(a, K) . \mathfrak{P}(b, K) = 0$, neboť pak $K = \overline{\mathfrak{P}(b, K)} \subset \overline{K - \mathfrak{P}(a, K)} \subset K$, tedy $\overline{K - \mathfrak{P}(a, K)} = K$, j. b. d. Kdyby však existoval bod $q \varepsilon \mathfrak{P}(a, K) . \mathfrak{P}(b, K)$, existovala by jako výše vlastní subkontinua A, B taková, že $(a) + (q) \subset A$, $(b) + (q) \subset B$, tedy jednak $(a) + (b) \subset A + B$, z čehož $A + B = K$ (neboť K jest ireducibilní mezi a a b), za druhé však $A \subset \mathfrak{P}(q, K)$, $B \subset \mathfrak{P}(q, K)$, takže by bylo $\mathfrak{P}(q, K) = K$, což je v rozporu s (6).

(7) *implikuje* (1). Nechť naopak K je rozložitelné, t. j. $K = A + B$, kde A, B jsou vlastní subkontinua. Pro určitost nechť bod a s vlastností (7) náleží do A. Pak $A \subset \mathfrak{P}(a, K)$, z čehož $K - \mathfrak{P}(a, K) \subset K - A \subset B = \overline{B}$, tedy $\overline{K - \mathfrak{P}(a, K)} \subset B$. Avšak podle (7) je $\overline{K - \mathfrak{P}(a, K)} = K$, takže vychází spor $B = K$.

6. Právě dokázaný obecný teorém ukazuje, že nerozložitelná kontinua náležejí do obecné třídy *kontinuí ireducibilních mezi dvěma body*. Podrobná teorie této třídy je dílem K. Kuratowského [11] a tvoří dnes důležitou kapitolu topologie, nezbytnou zejména při topologickém studiu hranic rovinných oblastí. Pojem kontinua ireducibilního mezi dvěma body zavedl L. Zoretti [31], maje za cíl topologicky charakterisovati jednoduchý oblouk (topologický obraz úsečky), ale brzy se ukázalo, že tento pojem je nečekaně obecný: netoliko není vždy možné lineárně uspořádati jeho *body* (jako u jednoduchého oblouku), ba ani jej rozložiti v lineárně uspořádaná *subkontinua*. Arci, vyjmeme-li případ, kdy ireducibilní kontinuum K je součtem *nejvýš spočetného* systému kontinuí nerozložitelných a kontinuí v K řídkých, takový lineární rozklad*) v subkontinua, zvaná *vrstvy* (tranches) — dokonce *nejjemnější* takový rozklad — je možný. Až na uvedenou výjimku rozklad ve vrstvy dává pravý obraz celé struktury kontinua K ireducibilního mezi dvěma body. Zejména se ukazuje, že K jest ireducibilní pouze mezi body svých dvou krajních vrstev. Tak tomu je na př. u ireducibilního kontinua $\overline{S' + S''}$, kde S' znamená čáru $y = \sin \frac{\pi}{x}$ $(0 < x \leqq 1)$ a S'' je souměrné s S' vzhledem k ose $x = 1$. Krajní vrstvy jsou úsečky $-1 \leqq y \leqq 1$ přímek $x = 0$ a $x = 2$. Naproti tomu v uvedeném případě výjimečném celé kontinuum je svou *jedinou* vrstvou. Na př. *neexistuje topologický lineární pořádek subkontinuí ani*

*) V topologickém smyslu; rozklad je totiž podroben důležité limitní podmínce; nazývá se *polospojitý lineární rozklad* (décomposition linéaire semicontinue). Bližší u K. Kuratowského, Fundam. Math. XI (1928), str. 169—185 a *11*.

množství $\mathfrak{P}(p, K)$ *u nerozložitelného kontinua* K. Ba zdá se nemožné definovati *efektivně* (ve smyslu W. Sierpińského; v. na př. Fundam. Math. II, str. 112—118 a str. 251) množství $H \subset K$, které by obsahovalo *přesně jeden* bod z každého $\mathfrak{P}(p, K)$, kde $p \varepsilon K$. Zejména je neřešen následující problém, který je v souvislosti s problémem jmenovati efektivně množství neměřitelné podle Lebesguea (v. *13*), a to *i v individuelním případě kontinua* B_0 (kde se lze ostatně omeziti na množství $H \subset C_0$):

Problém I. Dokázati, že takové množství H nemůže míti dokonalou část.

Jest poznamenati, že podle vět Z. Janiszewského a S. Mazurkiewicze v každém kontinuu každý pár bodů dá se spojiti kontinuem ireducibilním mezi nimi (v. třeba *11*, str. 218), a když celé kontinuum je spojitým obrazem úsečky, dokonce jednoduchým obloukem. Podle vlastností (1) a (5) tedy žádné nerozložitelné kontinuum není spojitým obrazem úsečky. (Naproti tomu třeba v B_0 každá čára $\mathfrak{P}_t$ je spojitým obrazem přímky, tedy úsečky bez krajních bodů.)

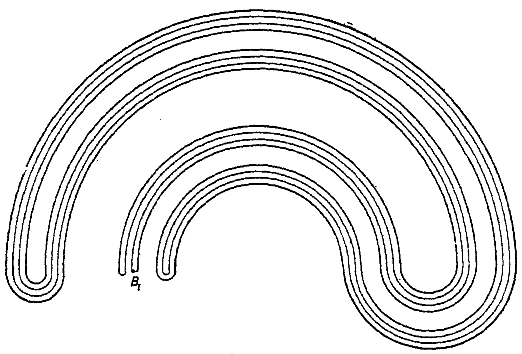
Nerozložitelná kontinua, která se dosud vyskytla, jsou *křivky* (t. j. kontinua jednorozměrná ve smyslu Menger-Urysohnově) a dají se parametricky vyjádřiti pomocí funkcí prvé Baireovy třídy (limit konvergentních posloupností spojitých funkcí). Rovněž tak tomu je u rozložitelného kontinua $\overline{S' + S''}$ uvedeného na str. 316. Existují však ireducibilní kontinua, rozložitelná i nerozložitelná, dimense $n > 1$ libovolně veliké (*27*, str. 225—226); ovšem podle vlastnosti (2) každé nerozložitelné kontinuum v E_n má dimensi $\leqq n - 1$. Existuje také v E_3 nerozložitelné „neohraničené kontinuum", jehož každé množství $\mathfrak{P}$ je homeomorfní s přímkou; existence podobného příkladu v E_2 není dosud dokázána.

Upozorním ještě na tyto zvláštnosti nerozložitelných kontinuí, které patří k jejich *vnitřním* (v. str. 311) vlastnostem: Každý bod a stejně každé vlastní subkontinuum $Q \subset K$ *roztíná* (coupe) K (t. j. $K - Q$ obsahuje body, které v $K - Q$ nelze spojiti kontinuem), ale žádné Q *nerozděluje* (divise) K (t. j. $K - Q$ je vždy souvislé); to plyne ihned ze souvislosti množství $\mathfrak{P}(p, K)$ a z jejich hustoty v K. Každé nerozložitelné kontinuum K obsahuje souvislé množství M, jehož každá souvislá část je hustá v K, tedy v M [*25*], neobsahuje však v K hustého souvislého množství, které by bylo lze topologicky lineárně uspořádati [*8*]. Žádná z těchto vlastností nestačí k tomu, aby celé K bylo nerozložitelné, ale všecky jsou jaksi sdruženy s přítomností nerozložitelných kontinuí ve smyslu precisovaném v několika obecnějších větách.

II. Homogennost. Strong transitivity. Přístupnost. Společné hranice $n > 2$ oblastí a jejich struktura.

7. Jako nás vedlo vyšetřování struktury kontinua $\mathbf{B}_0$ k obecným větám o topologických vztazích mezi různými vlastnostmi libovolného nerozložitelného kontinua, tak při srovnávání kontinuí celé soustavy $\mathbf{B}_t$ ($t \varepsilon C_0$) postřehnou se zjevy, jejichž význam tu a tam přesahuje hranice celé topologie.

Všimněme si, že v každém $\mathbf{B}_t$ čára, kterou jsme označili $\mathfrak{P}_t$ (na př. $\mathfrak{P}_0$ v $\mathbf{B}_0$) liší se od ostatních množství $\mathfrak{P}(p, \mathbf{B}_t)$ tím, že má *počáteční bod.* Tento bod dá se charakterisovati *vnitřní* vlastností (vlastností kontinua samého, nezávislou na jeho komplementu), totiž tím, že nerozděluje žádné subkontinuum jej obsahujícího



Obr. 2.

množství $\mathfrak{P}$, což neplatí o žádném jiném bodě z $\mathbf{B}_t$ (to je ostatně názorně jasné). Tuto vlastnost má tedy bod (0, 0) v $\mathbf{B}_0$ nebo bod ($\frac{1}{4}$, 0) v $\mathbf{B}_{\frac{1}{4}}$. (Obr. 2 dává aproximaci kontinua $\mathbf{B}_{\frac{1}{4}}$). V důsledku toho ta čára $\mathfrak{P}$, která obsahuje počáteční bod, není topologickým obrazem žádné jiné $\mathfrak{P}$. Z toho plyne snadno, že počáteční bod porušuje *homogennost* v $\mathbf{B}_t$. Množství M nazývá se totiž podle W. Sierpińského topologicky *homogenní*, když pro každý pár p, q jeho bodů existuje topologická transformace h množství M v M s vlastností $h(p) = q$. Je několik stupňů homogennosti; na př. můžeme žádati, aby bylo současně $h(p) = q$, $h(q) = p$. Zřejmě pro bod $t \varepsilon \mathbf{B}_t$ nemůže býti $h(t) \varepsilon \mathbf{B}_t - \mathfrak{P}(t, \mathbf{B}_t)$.

Velmi poučné příklady nerozložitelných křivek v E_3 udal a studoval D. v. Dantzig [3]. Jeho „solenoidy", pozoruhodné i tím, že souvisí s Henselovými g-adickými čísly a s Bohrovými skoroperiodickými funkcemi, jsou nerozložitelná kontinua velmi homogenní: dva libovolné body solenoidu S dají se převésti jeden ve druhý *involutorní* topologickou transformací S v S. Naproti tomu neřešen je problém:

Problém II. Existuje *v rovině* homogenní nerozložitelné kontinuum?

Jediné dosud známé (kompaktní) homogenní kontinuum v rovině jest *jednoduchá zavřená křivka* (topologický obraz kružnice). S. Mazurkiewicz ukázal [*19*], že je to *jediné* homogenní kontinuum, které je spojitým obrazem úsečky a *leží v rovině*. Není známo, zda poslední podmínka není zbytečná.

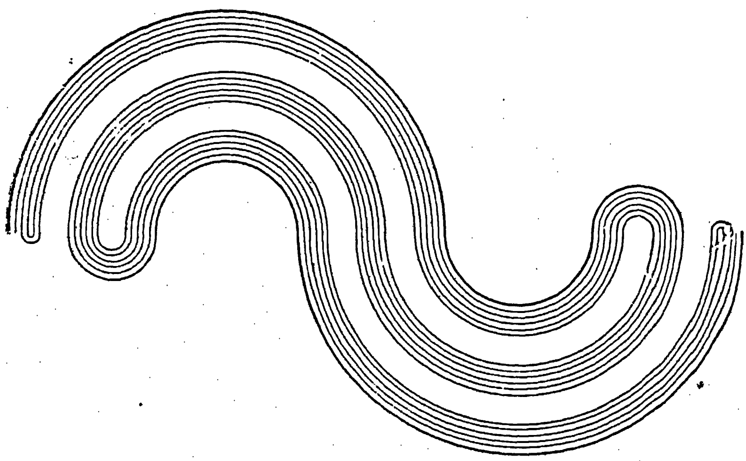
Zde se zmíním o důležité otázce, kterou mi sdělil W. Hurewicz a která také není řešena, zda totiž každé homogenní kontinuum M je *stejnoměrně homogenní*, přesně řečeno, zda každému $\sigma > 0$ lze přiřaditi $\eta > 0$ tak, aby pro $p \varepsilon M$, $q \varepsilon M$, $\varrho(p, q) < \eta$ existovala topologická transformace h množství M v M taková, že $\varrho[a, h(a)] < < \sigma$ pro všecka $a \varepsilon M$.

8. Naproti tomu známost přesné aritmetické struktury kontinuí B_t dovolila Kuratowskému [*17*] konstatovati u nich nečekanou regularitu struktury, úplně obdobnou té, jež se vyskytuje u systémů čar uvažovaných v teoretické mechanice, totiž u systémů splňujících kvasiergodickou hypotesu statistické mechaniky. G. D. Birkhoff (Proc. Nat. Acad. of Sc. 17 (1931), str. 650 a 656) nazývá *strongly transitive* (ve smyslu míry) každý systém disjunktních čar takový, že každý částečný systém tvoří množství buďto míry 0 nebo míry 1 (nebo neměřitelné). Analogický pojem ve smyslu kategorie obdržíme požadujíce, aby každý částečný systém tvořil buďto množství prvé kategorie nebo komplement množství prvé kategorie (nebo množství nesplňující Baireovu podmínku). Tu lze ukázati, že systém všech čar $\mathfrak{P}$ kontinua B_t (při každém $t \varepsilon C_0$) je strongly transitive ve smyslu kategorie. Mimoto: Spojitým zobrazením B_0 na čtverec, při němž až na jedinou výjimku (již tvoří $\mathfrak{P}_0$) každé množství $\mathfrak{P}$ se transformuje jednojednoznačně a oboustranně spojitě, dostane se rozklad čtverce v systém čar, který je strongly transitive ve smyslu míry. Ale následující problém nebyl studován:

Problém III. Náležejí vlastnosti „strong transitivity" systému čar $\mathfrak{P}$ *každému* nerozložitelnému kontinuu, nebo aspoň v. Dantzigovým homogenním kontinuím?

9. Pohlédněme ještě naposled na kontinua B_t, načež definitivně opustíme studium jejich vnitřních vlastností. Pokud těchto vlastností se týče, neliší se kontinua B_t mezi sebou: každé je jednojednoznačným oboustranně spojitým obrazem druhého. Když obě čísla t, t' náležejí do W, lze toto zobrazení prodloužiti na celou rovinu; když $t \varepsilon W$, $t' \varepsilon C_0 — W$, nikoli; když $t \varepsilon C_0 — W$, $t' \varepsilon C_0 — — W$, není o tom nic známo.

Každé z našich kontinuí B_t má *právě jeden* „počáteční" bod; je otázka, zda nerozložitelné kontinuum může míti takových bodů několik. Kontinuum z obr. 3 má takové body dva. Označme je K_1; ještě se k němu vrátíme. Je sestrojeno pomocí řídkého dokonalého množství N_0 těch bodů $(x, 0)$, jejichž souřadnici x lze psáti v pentadické soustavě bez cifer 1 a 3. Toto množství je dvěma způsoby rozloženo: $N_0 = (0, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} N'_i$ a $N_0 = (1, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} N''_i$, kde N'_i je množství bodů $(x, 0)\, \varepsilon\, N_0$, $2 : 5^{i+1} \leqq x \leqq 1 : 5^i$; N''_i je množství



Obr. 3.

bodů $(1 - x, 0)$, $(x, 0)\, \varepsilon\, N'_i$. Označme D'_i součet soustředných polokružnic nad osou X spojujících body z N'_i a D''_i obdobný součet pro N''_i, ale pod osou X. Pak $\mathsf{K}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} D'_i + \sum_{i=1}^{\infty} D''_i$ (v. *11*, str. 216). Toto kontinuum jest ireducibilní na př. mezi kterýmikoli dvěma ze tří bodů $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$.

W. A. Wilson [*29*] udal příklad nerozložitelného kontinua v rovině, které má nespočetný systém (s kardinálním číslem kontinua) čar $\mathfrak{P}$ s počátečním bodem. Neřešen však je problém:

Problém IV. Existuje v rovině nerozložitelné kontinuum, jehož *každá* čára $\mathfrak{P}$ má počáteční bod?

Je-li odpověď záporná, pak to asi souvisí s důležitou vlastností vnější, k níž teď přistoupíme, totiž s *přístupností.*

Pravíme, že množství M v prostoru E je ve svém bodě p *přístupné* (accessible), nebo že p je jeho přístupný bod, když existuje kontinuum $L \subset E$ takové, že $L \, . \, M = p$, $L - p \neq 0$. Je známo [v. *9*, str. 38, pozn. [3])], že když prostor E jest euklidovský a když množství M jest uzavřené, lze pak L voliti tak, že jest jednoduchým obloukem. Když M je v E řídké, na př. když M je hranice oblasti G v E, množství A bodů $p \varepsilon M$ přístupných z G je vždy v M husté, ale může se státi — a na př. u nerozložitelných kontinuí se také jistě stane — že také $M - A$ je v M husté. Pojem přístupnosti byl hojně studován, ale nejméně snad u nerozložitelných kontinuí, kde právě možná by se dalo dospěti k důležitým zobecněním některých okrajových problémů analysy.

Uvedl jsem, že žádnou topologickou transformací celé roviny nemůže přejíti na př. kontinuum B_0 v $B_{\frac{1}{4}}$ nebo obráceně. V obr. 1 a 2 vidíme ihned rozdíl: B_0 je přístupné *jen* v bodech čáry $\mathfrak{P}_0$, $B_{\frac{1}{4}}$ však *mimoto* v počátečním bodě $(\frac{1}{4}, 0)$ čáry $\mathfrak{P}_{\frac{1}{4}}$. Naskytuje se tu otázka: může nerozložitelné kontinuum v rovině býti přístupné ve *všech* svých bodech, jako úsečka nebo křivka $\overline{S'} + \overline{S''}$ (str. 316)? Ač uvedený příklad W. A. Wilsona má přístupné body na nespočetně mnoha čarách $\mathfrak{P}$, ukázal S. Mazurkiewicz [*21*], že obecně u každého nerozložitelného kontinua součet všech $\mathfrak{P}$ s přístupným bodem je prvé kategorie, a že počet těch $\mathfrak{P}$, která mají více než jeden přístupný bod, je nejvýš spočetný. *Obdobný problém pro n-rozměrná nerozložitelná kontinua v E_{n+1} je neřešen.*

Nic není známo, ani v případě roviny, jak tomu je, když *celkovou nepřístupností* množství $\mathfrak{P}(a, K)$ nerozložitelného kontinua K rozumíme nejen nepřístupnost jednotlivých bodů, nýbrž i částečných kontinuí, t. j. neexistenci kontinua $L \subset E_2$ takového, aby bylo $LK \subset \mathfrak{P}(a, K)$, LK kontinuum, $L - K \neq 0$.

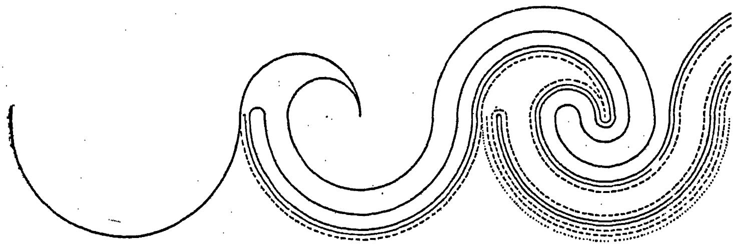
Následující vnější vlastnost jest ekvivalentní s nerozložitelností kontinua K (v. K. Kuratowski, *16*):

(8) *K je v rovině řídké a obsahuje bod p takový, že každé p obsahující vlastní subkontinuum obsahuje jen nepřístupné body kontinua K.*

Všecky tyto vlastnosti mohli bychom si znázorniti na příkladech kontinuí B_t, $t \varepsilon C_0$. *Žádné z těchto kontinuí neroztíná rovinu:* každé je hranicí jediné oblasti, totiž svého komplementu. Mnohem méně speciální roli budou však hráti další příklady, důležité při studiu nerozložitelných kontinuí s hlediska počtu oblastí, ve které *roztínají* rovinu.

10. Počněme jistou čarou $\mathfrak{A}$, která *zdánlivě* nemá nic společného s nerozložitelnými kontinui, nebo lépe, která s nimi má tolik společného jako čára $\mathfrak{P}_0$ kontinua B_0, kterou jsme dostali (str. 313) vhodným zkroucením polopřímky. Jako dříve omezím se na konstrukce a na zcela stručný nástin důkazů; další podrobnosti konstrukce a důkazy najdou se v *7*.

Nechť N_0 je dokonalé množství, které se vyskytlo na str. 320, a nechť N_{ni} (kde $n \geqq 0 < i$) jest obdobné množství bodů $(x, 0)$, kde $n + 1 - 5^{-(i-1)} \leqq x \leqq n + 1 - 2 \cdot 5^{-i}$. Takto určená N_{ni} jsou vesměs disjunktní; každé z nich je souměrné vzhledem ke svému středu $(n + 1 - \frac{1}{2} \cdot 5^{-i}, 0)$ a klademe-li $N_n = (n + 1, 0) + \sum_{i>0} N_{ni}$, každé N_n vznikne z N_0 pošinutím o délku n do prava (a stejně vznikne N_{ni} z množství označeného N''_i na str. 320). Tedy N_n je dokonalé množství řídké v intervalu $[n, n + 1]$ osy x. Konečně nechť V_n (jako W na str. 313) je spočetné množství krajních bodů všech (i neohraničených) intervalů osy X styčných s N_n.



Obr. 4.

Určíme si nyní posloupnost $U_0 = \{a_k\} \subset \sum_n V_n$ zvolenou tak, aby pro $n \to \infty$ měla stále více hromadných bodů v blízkosti bodu $(2n, 0)$. Položíme totiž $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, načež obecně bude a_{2k} bod souměrný s a_{2k-1} vzhledem ke středu nejbližší úsečky tvaru $[2n, 2n + 1]$ a bod a_{2k+1} bude souměrný s a_{2k} vzhledem ke středu toho z množství N_{ni}, které obsahuje bod a_{2k}. Dále spojíme body $a_0, a_1, a_2, \ldots$ polokružnicemi $D_0, D_1, D_2, \ldots$ střídavě nad a pod osou X, při čemž však body a_{2k} a a_{2k+1} $(k \geqq 1)$ nespojíme přímo, nýbrž vždy *třemi* polokružnicemi, z nichž prvá a třetí spojuje pod osou X příslušný bod s bodem s ním souměrným vzhledem k nejbližšímu bodu tvaru $2n + 1$. Takto vznikne čára $A_0 = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$, která vychází z bodu $(0, 0)$, je jednojednoznačným a *jednostranně* obrazem spojitým polopřímky a táhne se s řadou oscilací po celé délce intervalu $[0, \infty]$ osy X (v. spojitý tah v obr. 4).

Čára A_0 má pozoruhodnou geometrickou zvláštnost: *blíží se asymptoticky své translaci A_1 tvaru $x' = x + 2$, $y' = y$ a tudíž i všem translacím A_n tvaru $x' = x + 2n$, $y' = y$, $n = 2, 3, \ldots$, s nimiž je disjunktní.* (V obr. 4 jest A_1 znázorněna čárkovaným a A_2 tečkovaným tahem.)

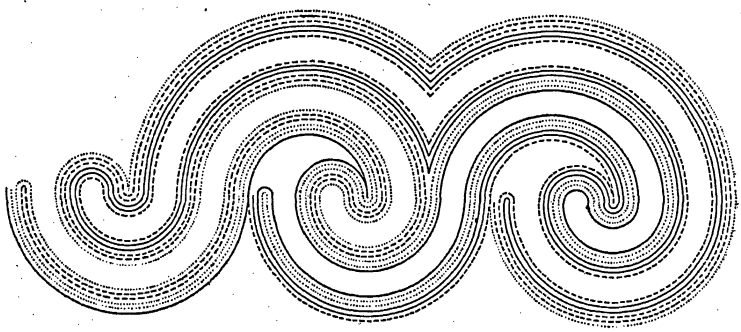
Nechť nyní $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$. Tedy $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}} = \overline{A_0} = A_0 + \overline{A_1} = \ldots$ a „zbytky" řady množství $\sum_n A_n$ tvoří posloupnost „neohraničených křivek", z nichž každá je v předchozí obsažena, tvoříc její „kontinuum zhuštění". Obr. 4 ukazuje jasně, že $\mathfrak{A}$ roztíná rovinu v nekonečný počet oblastí $R_0, R_1, R_2, \ldots$, kde $F(R_0) = \overline{A_0 - D_0} = \overline{\mathfrak{A} - D_0}$ a každá oblast R_n [a podobně i její hranice $F(R_n)$] vznikne z R_0 translací $x' = x + 2n$, $y' = y$.

S touto vlastností $\mathfrak{A}$ je spojena jiná zajímavá topologická vlastnost. Je známo, že každé množství, které rozděluje euklidovský prostor mezi dvěma body, obsahuje ireducibilní řez *mezi těmito body* (v. na př. *12*, str. 133, th. I), nemusí však vždy (dělí-li prostor v nekonečně mnoho oblastí) obsahovati úplný ireducibilní řez. Na př. v $\mathfrak{A}$ tvoří $F(R_n)$ ireducibilní řez roviny mezi body p, q, kde $p \varepsilon R_n$, $q \varepsilon R_{n-1}$, avšak $\mathfrak{A}$ *neobsahuje žádný úplný ireducibilní řez roviny*. Jiný takový příklad sestrojil již dříve O. Nikodym, nebyl však uveřejněn. $\mathfrak{A}$ je neohraničené, ale inversí z jakéhokoli pólu $v \varepsilon R_2 - \mathfrak{A}$ dostaneme *kompaktní* kontinuum $\mathfrak{A}^*$ se stejnou singularitou. Dostane se tak negativní řešení, už pro dimensi $n = 1$, problému nedávno položeného P. Alexandrovem (*Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106, str. 227, problém III).

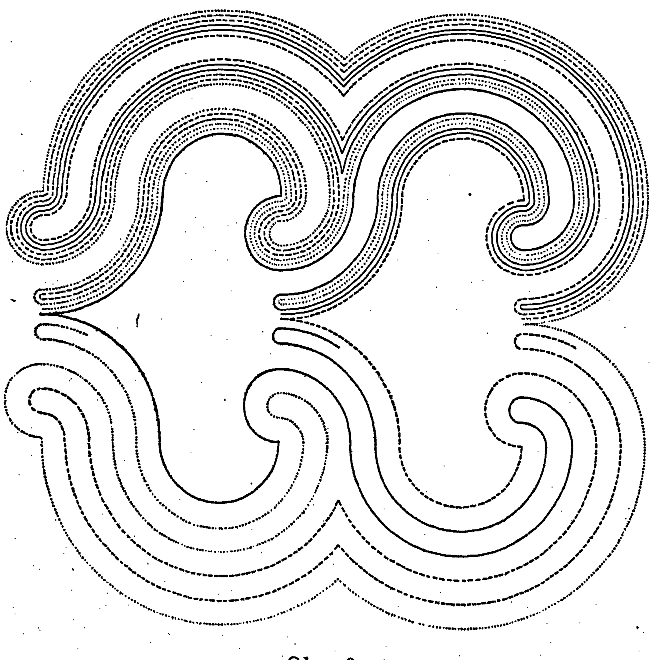
Naproti tomu každý řez roviny mezi dvěma body, který je spojitým obrazem úsečky, obsahuje ireducibilní řez mezi těmito body, který jest jednoduchou zavřenou křivkou, tedy úplným ireducibilním řezem (v. K. Kuratowski, *12*).

Pomocí množství $\mathfrak{A}$ sestrojíme pro každé přirozené n *nerozložitelné kontinuum* B_n, *které roztíná* E_2 *přesně v* n *oblastí a je společnou hranicí každé z nich.*

Za tím účelem „zavineme" $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{A}$ podobně, jako jsme zkroutili polopřímku v čáru $\mathfrak{P}_0$ kontinua B_0. „Zavineme" napřed posloupnost $U_0 = \{a_i\}$ (v. str. 322). Nechť $U_0^{(n)}$ je posloupnost bodů $\{b_i\}$ tvaru $(a_i - 2nk, 0)$, kde $a_i = U_0 \,.\, V_{2j+1}$ a $nk \leq j < n(k+1)$. Tedy posloupnost $U_0^{(n)}$ vznikne z posloupnosti U_0 tím, že *lineární pořádek* množství $U_0 \,.\, V_{2j+1}$ na ose X nahradíme *cyklickým pořádkem* (s periodou $2n$) jejich obrazů v $U_0^{(n)}$. (Na př. obraz množství $U_0 \,.\, V_{2n+1}$ v $U_0^{(n)}$ jest umístěn znova ve V_1 atd.) Tato periodicita trvá při přenesení čar $A_0, A_1, A_2, \ldots$ z $\mathfrak{A}$ do B_n, kde místo těchto *nekonečně mnoha* čar z $\mathfrak{A}$ (a podobně místo komplementárních oblastí $R_0, R_1, R_2 \ldots$) objeví se přesně n čar z B_n (a tolikéž je oblastí v $E_2 - \mathsf{B}_n$). Neboť, když nyní, vycházejíce z bodu (0, 0), spojujeme postupně polokružnicemi jednotlivé body z $U_0^{(n)}$, obdržíme místo čáry A_0, která se asymptoticky blížila svým lineárním translacím, jistou čáru $B_0^{(n)}$, která se asymptoticky blíží svým „cyklickým translacím" (s periodou $2n$) $B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \ldots$, takže kontinuum $\mathsf{B}_n = \overline{B_0^{(n)}} = \overline{B_1^{(n)}} = \ldots$ roztíná rovinu ne v nekonečný počet oblastí, nýbrž v počet „redukovaný mod n". Označíme-li je $R_0^{(n)}, R_1^{(n)}, \ldots, R_{n-1}^{(n)}$, dá se přesně ukázati, že jejich hranice $F(R_0^{(n)})$, $F(R_1^{(n)}), \ldots, F(R_{n-1}^{(n)})$ jsou (jako v případě $\mathfrak{A}$) resp. rovné $\overline{B}_0^{(n)}, \overline{B}_1^{(n)}, \ldots, \overline{B}_{n-1}^{(n)}$, takže kontinuum B_n je *společnou hranicí těchto oblastí* (v. důkaz v 7). Zároveň každá z těchto čar, a rovněž její komplement v B_n, je hustá v B_n, z čehož následuje úsudkem



Obr. 5.



Obr. 6.

snadným, ač ne zcela triviálním, že každé *vlastní* subkontinuum B_n jest jeho kontinuem zhuštění: *kontinuum* B_n *je tedy nerozložitelné*.

Obr. 5 znázorňuje kontinuum B_3; vidíme, že je geometricky jednodušší než starší příklady Brouwerovy. Jeho numerická definice (v. 7, str. 274) dovoluje studovati jeho strukturu; konstatuje se na př., že čára $\mathfrak{P}[(\frac{1}{2}, 0), B_n]$ obsahuje vždy body rozvětvení řádu 3.

Z příkladu B_n vznikne velmi snadno kontinuum C_n, *které je součtem dvou nerozložitelných kontinuí, roztíná rovinu přesně v n oblastí a jest jejich společnou hranicí*. Konstrukce je naznačena v obr. 6. Horní polovina liší se od B_n pouze tím, že dolní polokružnice v B_n, které zdola ohraničovaly oblasti $R_0^{(n)}$, $R_1^{(n)}$, . . ., nahradí se čtvrtkružnicemi. Po této deformaci kontinuum zůstane nerozložitelné, ale neroztíná už rovinu a jeho čára $\mathfrak{P}[(0, 0), B_n]$ rozpadne se v n čar, z nichž každá má počáteční bod. Je to ovšem kontinuum ireducibilní mezi kterýmikoli dvěma z těchto bodů, v nichž právě popsaná horní polovina C_n dotýká se poloviny dolní, souměrné s prvou vzhledem k ose $y = -1$.

Tato okolnost není náhodná, ale má svůj obecný důvod, v důležité větě K. Kuratowského a W. A. Wilsona o společné hranici $n \geqq 2$ oblastí, o níž bude v brzku řeč. Upozorněme ještě, že podobný postup vede ke konstrukci *společné hranice nekonečně mnoha oblastí*, a to zase buďto nerozložitelného kontinua nebo součtu dvou nerozložitelných kontinuí.

Struktura kontinuí B_n a C_n má důležité topologické vlastnosti, jejichž rozbor vede k obecným větám, platným nejen pro kontinua, která, jako B_n a C_n, jsou společnou hranicí *všech* oblastí, ve které roztínají rovinu, nýbrž vůbec pro kontinua, která jsou hranicí $m \geq 2$ oblastí.

Taková kontinua dostaneme z B_n nebo C_n *dilatací* roviny ve vhodně zvoleném bodě kontinua, jíž vznikne nová oblast. Uvažujme bod $p \in N_0 - V_0$, třeba bod $(\frac{1}{2}, 0)$ kontinua B_n, a funkci $f(q)$ definovanou (*pouze* v $E_2 - p$) takto: $q' = f(q)$ je ten bod polopřímky $\overrightarrow{pq}$, jehož vzdálenost od p je o 1 větší než $\varrho(p, q)$. Žádaný příklad poskytne kontinuum $\overline{f(B_n)}$.

11. Zmíněné obecné věty udali K. Kuratowski [*14*; toto dílo obsahuje bibliografii] a W. A. Wilson [*29*]. Nejprve se lehko ukáže, že pojem společné hranice $n \geq 2$ oblastí splývá s pojmem řezu roviny ireducibilního mezi každým párem bodů zvolených ve dvou z těch oblastí. Každý ireducibilní řez mezi dvěma body (tedy i každý úplný ireducibilní řez) je kontinuum. *Když kontinuum C je společnou hranicí n* $>$ 2 *oblastí v rovině, buďto je nerozložitelné nebo je součtem dvou nerozložitelných kontinuí* [*14*, str. 36, th. III; velmi jednoduchý důkaz v *15*, str. 236, pozn. [2])]. Kontinua B_n a C_n realisují tyto dva případy. Když $n = 2$ a když C není svou vlastní vrstvou, dá se C *cyklicky* rozložiti ve vrstvy stejně jako lze kontinua ireducibilní mezi dvěma body rozložiti *lineárně* ve vrstvy (v. str. 316). Dále dokázali K. Kuratowski a W. A. Wilson větu

(v. *15*, str. 235, th. VII): Aby *rozložitelné* kontinuum C bylo ireducibilním řezem mezi dvěma body, je nutné a stačí, aby bylo $C = A + B$, kde A a B jsou kontinua, jejichž průřez AB se skládá ze dvou disjunktních uzavřených množství M a N takových, že A i B jsou kontinua ireducibilní mezi p a q, kdykoli $p \varepsilon M$, $q \varepsilon N$. Důkaz tohoto teorému opírá se o pojem *separátoru* (séparateur), zavedený a studovaný K. Kuratowským [*15*]; lze z něho odvoditi následující větu, která v tomto tvaru nebyla publikována:

Aby rozložitelné *kontinuum C bylo úplným ireducibilním řezem roviny* (společnou hranicí *všech* komponent $E_2 - C$), *je nutné a stačí, aby $C = A + B$, kde A a B jsou vlastní subkontinua C neroztínající rovinu, jejichž průřez AB není souvislý a která jsou ireducibilní mezi každým párem bodů, zvoleným ve dvou různých komponentách AB.*

Podmínka je *nutná.* Předně, ježto C jest úplný ireducibilní řez, jeho vlastní subkontinua A a B neroztínají rovinu. Za druhé AB není souvislé podle obecné věty Z. Janiszewského (moderní důkaz této věty najde se na př. u K. Kuratowského, Fundam. Math. XIV, str. 304—310), která praví, že, když žádné z obou kontinuí A a B neroztíná rovinu, součet $A + B$ ji roztíná *tehdy a jen tehdy*, když AB není souvislé. Za třetí, kdyby třeba A bylo *reducibilní* mezi $p \varepsilon P$ a $q \varepsilon Q$, kde P a Q jsou dvě různé komponenty AB, existovalo by *vlastní* subkontinuum $L \subset A$, $p \varepsilon L$, $q \varepsilon L$ a součin LB nebyl by souvislý. *Vlastní* subkontinuum $L + B \subset C$ by pak, znovu podle Janiszewského věty, bylo řezem roviny proti předpokladu.

Podmínka *stačí.* Za našich předpokladů o A a B množství $A - B$ a $B - A$ jsou totiž *souvislá* podle jedné věty K. Kuratowského a S. Straszewicze (Fundam. Math. XII, str. 153), takže [*15*, str. 220, korolár I] existuje *normální separátor* (séparateur normé) mezi $A - B$ a $B - A$, který [*15*, str. 225] protne *všecky* komponenty $E_2 - C$. Tedy [*15*, str. 223, th. VI] C jest ireducibilní řez mezi každým párem bodů zvoleným ve dvou různých komponentách $E_2 - C$, tedy C jest úplný ireducibilní řez, j. b. d.

Otázka byla studována i *kvantitativně* (v. *29*): množství AB a $E_2 - C$ mají stejný počet komponent. V příkladě $\mathbf{C}_n$ se ty komponenty AB redukují na body dotyku horní a dolní poloviny.

Je pozoruhodné, že v prostoru E_3 nejen předchozí věty neplatí, nýbrž v E_3 existují společné hranice $n > 2$ oblastí (i *úplné* ireducibilní řezy), které jsou spojitými obrazy úsečky. Dosti jednoduchý takový příklad sestrojil K. Borsuk ve svém sdělení *O jednom peanovském kontinuu* na II. sjezdu polských matematiků ve Wilně 1931 [vyjde tiskem; sr. C. R. 194, str. 951, pozn. [4]) a Fundam. Math. XIX, str. 221, pozn. [4])].

12. V uvedené větě K. Kuratowského a W. A. Wilsona vrcholí *vnitřní* charakterisace ireducibilních řezů roviny (zejména z ní následuje jejich *topologická invariance*). Naproti tomu studium jejich vlastností *vnějších* tvoří široké neprobadané pole. Už při pohledu na naše příklady se strany oblastí jimi ohraničených vznikají mnohé otázky, které, jako třeba otázka *přístupnosti* zmíněná na str. 320, vedou k řadě problémů, důležitých na př. pro

teorii konformního zobrazení. Stačí se zmíniti o souvislosti s teorií *prvokonců* (Primenden) C. Carathéodoryho (sr. P. Urysohn, *26*). Naše příklady společných hranic $n > 2$ rovinných oblastí jeví pozoruhodné vlastnosti, pozorujeme-li strukturu jimi realisovaných prvokonců. Takto vznikající obecný problém zůstává však otevřen pro nová badání.

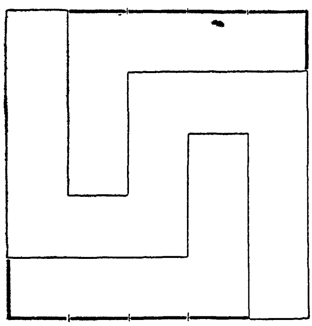
III. Kontinuum, jehož každé subkontinuum je nerozložitelné. Aplikace a problémy. Věta Mazurkiewiczova. Role spojitých transformací. Závěr.

13. Definovali jsme dosud své příklady nerozložitelných kontinuí (třeba kontinuum K_1 se dvěma počátečními body, obr. 3) způsobem jaksi *přímým* a teprve dodatečně jsme v nich našli jakousi čáru, jejímž uzavřeným obalem je celé kontinuum. Mohli jsme také definovati napřed onu čáru a pak kontinuum jako její uzavřený obal nebo jako limitní množství jejích aproximací; důkazy byly by trochu delší. Avšak, a to je velmi důležitá metoda v topologii, mohli jsme také definovati totéž kontinuum K_1 jako průřez posloupnosti nejjednodušších obrazců, totiž polygonálních ploch (stále tenčích) a odvoditi vlastnosti K_1 z této definice. Touto konstruktivní metodou [nazval jsem ji *metodou pásů* (méthode des bandes)] budeme se nyní podrobněji obírati. Povede nás k velmi zvláštnímu příkladu, totiž ke kontinuu K_3 *dědičně nerozložitelnému* (jehož každé subkontinuum je nerozložitelné), které tedy zejména *neobsahuje žádný jednoduchý oblouk.*

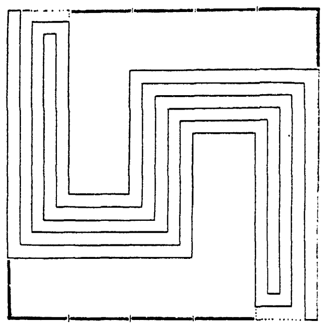
Položme K_1 na jednotkový čtverec Q_0 tak, aby množství N_0 padlo do diagonály [(0, 1), (1, 0)] a nahraďme každou polokružnici z K_1 lomenou čarou složenou ze dvou rovnoběžek s osami. Topologicky nic se nezmění: bude to stále kontinuum K_1, ale pozorujeme ve čtverci Q_0 řadu pásů tenčích a tenčích, které aproximují K_1 a jejichž průřezem je K_1 (v. obr. 7 a 8 v textu a obr. III ve Fundam. Math. III, str. 270).

Pokusme se blíže definovati přechod od pásu B_n, který je n^{tou} aproximací, k pásu B_{n+1} do B_n vepsanému. Za tím účelem označme R_n čtvercovou síť (s délkou stran 5^{-n}), kterou vytínají přímky $x = k \,.\, 5^{-n}$ a $y = k \,.\, 5^{-n}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Dva čtverce z R_n nazveme *přilehlé* (adjacents), když mají společnou právě jednu stranu. Nyní každý pás B_n skládá se z konečné řady $C_1, C_2, \ldots, C_m$ čtverců z R_n, z nichž každý je přilehlý k předcházejícímu a k následujícímu, ale už k žádnému jinému; dokonce dva čtverce pásu jsou disjunktní, kdykoli rozdíl indexů převyšuje 2. Nazveme *příčkou* (cloison) pásu B_n každou společnou stranu dvou sousedních čtverců; *pevně zvolenou* stranu čtverce C_1, resp. C_m, která není příčkou, nazveme *počáteční* a *koncovou základnou* pásu (base initiale et finale). Na každé z obou základen zvolme jeden krajní bod, který nazveme resp. *počátečním* a *koncovým bodem* pásu (point initial, point final). Zejména když pás se skládá z jediného čtverce, můžeme zvoliti základny libovolně, počáteční a koncový bod zvolíme však vždy mezi sebou různé.

Každý pás je tedy polygonální plocha, jejíž obvod (v případech, které jediné nás zajímají) rozpadá se po odstranění obou základen ve dvě lomené čáry, které nazveme *stranami* pásu. Tato konstruktivní metoda je ovšem propracována ve všech podrobnostech a ve všech možných eventualitách (v. *6*); zde se omezím na názorný nástin vedoucích myšlenek.



Obr. 7.



Obr. 8.

Nyní do pásu B_n zaveďme, vycházejíce z jeho počátečního bodu, pás čtverců sítě R_{n+1} (tedy pětkrát menších), který se táhne podél té strany pásu B_n, na které leží počáteční bod. Postupujíce takto podél řečené strany směrem ke koncové základně, zastavme se, než se té základny dotkneme, tedy v *předposledním* čtverci z R_{n+1} a vracejme se po prostřední řadě čtverců z R_{n+1} uvnitř B_n rovnoběžně s cestou již proběhnutou. Po této prostřední řadě putujme nyní zpět k počáteční základně, ale než se jí dotkneme, tedy zase v předposledním čtverci z R_{n+1}, obraťme se k té straně pásu B_n, na které je koncový bod, a podél této strany putujme až ke koncovému bodu, kde se zastavíme. Čtverce z R_{n+1}, jimiž jsme dohromady prošli, tvoří nový pás vepsaný do B_n, který označíme $\mathrm{f}(B_n)$. Obrazce 7 a 8 znázorňují případy $B_n = Q_0$ a $B_n = \mathrm{f}(Q_0)$; v obecném případě průběh pásu $\mathrm{f}(B_n)$ je zcela obdobný. Vidíme, že pás $\mathrm{f}(B_n)$

1⁰ je pětkrát užší než B_n;

2⁰ je jeho *průchodním pásem* (bande de passage), t. j. jeho základny leží na příslušných základnách pásu B_n;

3^0 tvoří *dvojí oscilaci* mezi oběma základnami pásu B_n nebo spíše „skoro“ mezi těmito základnami.

Vlastnost 3^0 je podstatná. Zaručuje, že

4^0 v blízkosti ($\leq 5^{-n}$) každého čtverce (nebo bodu) C_i z $\mathfrak{f}(B_n)$ existuje jiný čtverec (nebo bod) C_j z $\mathfrak{f}(B_n)$ takový, že každé kontinuum $M \subset \mathfrak{f}(B_n)$, které je spojuje, vnikne do čtverce *zvoleného* mezi oběma krajními čtverci daného pásu B_n.

Nazveme *kusem* (portion) pásu B_n každý pás $W \subset B_n$. Nechť S je libovolně zvolené množství úseček sítě R_n a nechť $\mathsf{S} = \{F_{i_0}, F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}\}$ $(i_0 < i_1 < \ldots < i_k)$ je řada, ve které členy F_{i_0} a F_{i_k} jsou resp. počáteční a koncová základna B_n, kdežto ostatní členy jsou ty a jen ty příčky pásu B_n, které leží na některé úsečce z S. Množství S určuje tedy jakési rozdělení pásu B_n v kusy $P_1, \ldots, P_k$, totiž v částečné pásy vždy „mezi“ párem sousedních úseček systému S. Tyto úsečky zvolme za základny příslušného kusu a proveďme na každý kus operaci $\mathfrak{f}$. Obdržíme množství $\mathfrak{f}(B_n, S) = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{f}(P_i)$. Ukáže se, že se to dá provésti tak, že $\mathfrak{f}(B_n, S)$ je zase pás sítě R_{n+1}; dokonce můžeme vždy vyjíti od počátečního bodu pásu B_n.

V důsledku toho pás $\mathfrak{f}(B_n, S)$ má zase vlastnosti 1^0 a 2^0 pásu $\mathfrak{f}(B_n)$. Ostatně operace $\mathfrak{f}(B_n)$ je zvláštním případem $\mathsf{S} = \{F_{i_0}, F_{i_k}\}$ operace $\mathfrak{f}(B_n, S)$. Jinak je tomu s vlastností 3^0: pás $\mathfrak{f}(B_n, S)$ netvoří už oscilace v *celém* pásu B_n, nýbrž řadu oscilací menší amplitudy v jednotlivých kusech B_n. Místa těchto oscilací závisí na volbě S.

14. Nechť nyní $B_0 = Q_0$ je jednotkový čtverec; základny nechť jsou vodorovné, a počáteční a koncový bod nechť jsou resp. (0, 1) a (1, 0). Nechť $\{S_n\}$ je nekonečná posloupnost množství, jejíž každý člen S_n je libovolný systém úseček sítě R_n. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť $Q_n = \mathfrak{f}(Q_{n-1}, S_{n-1})$. Položme $\mathsf{K} = \prod_n Q_n$.

Jako průřez klesající posloupnosti pásů (tedy kontinuí), obsahujících bod (0, 1) a body osy X, takto definované množství K je kontinuum, které obsahuje bod (0, 1) a protíná osu X. Další vlastnosti K závisí na volbě posloupnosti $\{S_n\}$. Tato závislost je vyjádřena větou, kterou v brzku vyslovíme a v níž se soustřeďuje celý topologický obsah metody pásů.

Nazveme každé kontinuum $L \subset \mathsf{K}$ *průchodním kontinuem* (continu de passage), když $L = \prod_n B_n$, kde B_n je kus Q_n a B_{n+1} je průchodní pás pásu B_n. Snadno se dokáže, že takové L protne obě základny každého B_n. Zejména je kontinuem průchodním $\mathsf{K} = \prod_n Q_n$ samo a vlastnost 4^0 v tomto případě dává:

5^0 v blízkosti každého $p \varepsilon \mathsf{K}$ existuje $q \varepsilon \mathsf{K}$ tak, že každé kontinuum $M \subset \mathsf{K}$, které obsahuje p i q, protne kteroukoli (předem zvolenou) z obou základen Q_0.

Odtud se odvodí dvě další vlastnosti:

6^0 když dvě průchodní kontinua se protnou, jejich součet je zase průchodní kontinuum;

7^0 každé kontinuum $M \subset \mathsf{K}$ obsahuje nekonečnou posloupnost $\{L_n\}$ průchodních kontinuí takovou, že pro každou nekonečnou posloupnost $\{L_{n_k}\}$ vybranou z $\{L_n\}$ jest $M = \overline{\sum_n L_{n_k}}$.

Platí pak věta:

Je-li $L = \prod_n B_n$ průchodní kontinuum a je-li $B_{n+1} = \mathsf{f}(B_n)$ pro nekonečně mnoho indexů n, pak L je nerozložitelné kontinuum.

Podle vlastnosti (2) na str. 314 stačí dokázati, že každé *vlastní* subkontinuum $M \subset L$ je kontinuem zhuštění pro L; t. j. že k danému $p \varepsilon M$ a k danému $\sigma > 0$ existuje $q \varepsilon L - M$, $\varrho(p, q) < \sigma$. Nyní ze 2^0 plyne, že pro každé n dosti veliké a takové, že $B_{n+1} = \mathsf{f}(B_n)$, jest $5^{-(n+1)} < \sigma$ a M neprotne jeden z obou krajních čtverců C_e pásu B_{n+1}, tedy ani příslušný krajní čtverec kteréhokoli B_m, $m > n$.*) Podle 4^0 v B_m existuje čtverec C_i takový, že $\varrho(p, C_i) \leqq 5^{-m}$ a že každé subkontinuum K spojující p s C_i protne C_e. Ježto L jako průchodní kontinuum protne *každý* čtverec každého B_n, stačí tedy zvoliti libovolně $q \varepsilon L \,.\, C_i$, načež $q \varepsilon L - M$, $\varrho(p, q) \leqq 5^{-m} < \sigma$.

Z právě dokázané věty následuje známý nám fakt, že kontinuum K_1 je nerozložitelné, neboť u K_1 jest $B_{n+1} = \mathsf{f}(B_n)$ pro *každé* n.

15. Abychom obdrželi dědičně nerozložitelné kontinuum K_3, stačí, jak zjistíme, definovati posloupnost $\{S_n\}$ takovým způsobem, aby mezi *každým* párem základen a příček *každého* pásu Q_n nekonečně mnohokrát se provedla operace f. Takovou posloupnost $\{S_n\}$ můžeme si opatřiti po částech induktivně zároveň s pomocnou posloupností $\{u_n\}$ přirozených čísel. Položme $u_1 = 1$ a $S_1 =$ oběma základnám Q_0. Za předpokladu, že při určitém n byla již definována všecka čísla u_i pro $i \leqq n$ a všecky systémy úseček S_j pro $j \leqq u_n$, sestavme si *všecky páry* složené ze základen nebo příček pásu $Q_{u_n} = \mathsf{f}(Q_{u_n-1}, S_{u_n-1})$ v konečnou posloupnost $\{\sigma\}$ a označme N_n počet těch párů. Položme pak $u_{n+1} = u_n + N_n$ a $S_{u_n+i} = i^{\text{tému}}$ páru posloupnosti $\{\sigma\}$. Tím jsou definovány další členy $S_{u_n+1}, S_{u_n+2}, \ldots$ $\ldots, S_{u_{n+1}}$ posloupnosti $\{S_n\}$. Takto postupujíce, definujeme postupně celou posloupnost $\{S_n\}$.

---

*) Zvolme bod $a \varepsilon L - M$; nechť n je takové, že $5^{-n} < \varrho(a, M)$ a $B_{n+1} = \mathsf{f}(B_n)$. Pak čtverec pásu B_{n+1}, v němž leží a, je disjunktní s M, kdežto podle 2^0 by jej M protínalo, kdyby protínalo oba krajní čtverce tohoto pásu.

Snadno se ukáže, že takto definované kontinuum $K_3 = \prod_n Q_n$ má následující topologické vlastnosti:

8⁰ *Každé průchodní kontinuum* $L \subset K_3$ *je nerozložitelné.*

Vskutku nechť $L = \prod_n B_n$, kde B_n je průchodní pás pro B_{n-1}. Z popsané definice posloupnosti $\{S_n\}$ následuje, že pro nekonečně mnoho hodnot n, totiž vždy pro jedno n v mezích $u_i \leqq n < u_{i+1}$, jest S_n = oběma základnám B_n, tedy $B_{n+1} = f(B_n)$, z čehož plyne nerozložitelnost L podle věty na str. 00.

9⁰ *Je-li dáno libovolně kontinuum* $M \subset K_3$, *každé průchodní subkontinuum* $L \subset M$, *které je* $\neq M$, *je řídké v* M.

Máme ukázati, že $M \subset \overline{M - L}$. Podle 7⁰ existuje posloupnost $\{L_n\}$ průchodních kontinuí taková, že $M = \overline{\sum_k L_{n_k}}$ pro každou částečnou posloupnost $\{L_{n_k}\}$. Existuje-li tedy nekonečně mnoho hodnot n_k takových, že $L_{n_k} . L = 0$, jest $\sum_k L_{n_k} \subset M - L$, tedy $\overline{\sum_k L_{n_k}} = M \subset \overline{M - L}$. Kdyby však pro všecka dosti veliká n bylo $L_n . L \neq 0$, pak by také pro všecka dosti veliká n bylo $L \neq L + L_n$.*) Ale nerovnost $L_n . L \neq 0$ implikuje podle 6⁰, že $L + L_n$ je průchodní kontinuum, tedy nerozložitelné, takže by z nerovnosti $L \neq L + L_n$ následovalo, že kontinuum L je řídké v $L + L_n$, tím spíše v $M \supset L + L_n$, takže i v tomto případě $M \subset \overline{M - L}$.

10⁰ *Aby libovolné kontinuum* $H \subset K_3$ *obsahovalo průchodní kontinuum* $L \subset K_3$, *k tomu stačí, aby* H *protínalo* L, *nebylo však částí* L.

Máme ukázati, že $H = H + L$. Podle 9⁰ L je kontinuum zhuštění pro $H + L$, t. j. $\overline{(H + L) - L} = H + L$, z čehož podle identity $(H + L) - L = H - L$ následuje $\overline{H - L} = H + L$, takže ve formuli obecně platné pro uzavřená množství $\overline{H - L} \subset H \subset H + L$ znamení $\subset$ lze nahraditi znamením $=$, což právě dává $H = H + L$.

Tyto tři vlastnosti 8⁰—10⁰ kontinua K_3 stačí, abychom dokázali, že *každé kontinuum* $M \subset K_3$ *je nerozložitelné*, t. j., že každé *vlastní* subkontinuum H kontinua M je řídké v M. Vskutku nechť podle 7⁰ $M = \overline{\sum_n L_n}$, kde L_n jsou průchodní kontinua, tedy podle 8⁰ kontinua nerozložitelná. Nechť *předně* H *je částí některého* L_n. Ježto víme, že L_n je nerozložitelné, potřebujeme se zabývati pouze případem $L_n \neq M$. Avšak podle 9⁰ L_n je řídké v M, takže také $H \subset L_n$ je řídké v M. Když *za druhé existuje nekonečně mnoho hodnot* n_k *takových, že* $H . L_{n_k} = 0$, jest $\sum_k L_{n_k} \subset M - H$, tedy

*) V opačném případě pro nekonečně mnoho hodnot n_i by bylo $L = L + L_{n_i}$, tedy také $L = L + \sum_i L_{n_i} = L + \overline{\sum_i L_{n_i}}$, tudíž podle 7⁰ $L = L + M = M$ proti předpokladu $L \neq M$.

$\overline{\Sigma L_{n_k}} \subset \overline{M - H}$, tedy podle 7° $M \subset \overline{M - H}$, takže opět H je řídké
$\scriptstyle k$
v M. Avšak třetí případ, ve kterém by tedy existovalo nekonečně mnoho hodnot n_k takových, že $H \cdot L_{n_k} \neq 0$, aniž H je částí některého L_{n_k}, je nemožný. Neboť podle 10° by pak každé L_{n_k} bylo částí H, tudíž i $\sum_k L_{n_k} \subset H$, tedy podle 7° $M = \overline{\sum_k L_{n_k}} \subset H$ proti předpokladu, že $H \subset M$ a $H \neq M$. Tím je dědičná nerozložitelnost kontinua K_3 odvozena.

Právě dokázaná základní vlastnost kontinua K_3 má za důsledek řadu dalších topologických vlastností této křivky, jež tvoří tolikéž řešení problémů, dříve v literatuře položených. Jsou podrobně analysovány v pojednání *6*; sr. též *28*. V *6*, str. 276 nalezne se také obrazec znázorňující čtyři prvé aproximace (pásy) kontinua K_3.

Uvedli jsme již, že tato křivka neobsahuje zejména žádný oblouk; neobsahuje ani žádného množství ireducibilně souvislého mezi žádným párem svých bodů. Naproti tomu obsahuje K_3 nespočetný systém (s kardinálním číslem kontinua) disjunktních*) nerozložitelných kontinuí a také nespočetný klesající systém (s týmž kardinálním číslem) nerozložitelných kontinuí, z nichž každé je kontinuem zhuštění všech předchozích (a tím spíše obsahuje klesající transfinitní posloupnosti nerozložitelných kontinuí libovolně předepsaného dobře uspořádaného spočetného typu). Ač leží v rovině, jeví se takto křivka K_3 z nejobecnějšího geometrického hlediska jako *nejkomplikovanější ze všech dosud individuelně známých a studovaných geometrických obrazců.* Zároveň do jisté míry opravuje a rozšiřuje obvyklou představu křivky (v. níže str. 333).

Křivky K_3 bylo několikrát zajímavým způsobem užito. Na př. G. Nöbeling [23] z ní odvodil existenci diskontinuitního množství G_δ dimense 0 v rovině, které má společné body s každým jednoduchým obloukem. S ní souvisí však i důležité problémy, jejichž řešení se dosud nepodařilo, jako následující problém P. Alexandrova:

Problém V. Existují dědičně nerozložitelná kontinua dimense $n > 1$?

16. Z jiných topologických otázek souvisících se studiem křivky K_3 jest uvésti především ty, jež jsou spojeny s následujícím problémem, pocházejícím od Z. Janiszewského:

Problém VI. Jest jednoduchý oblouk jediné kontinuum, které je jednojednoznačným a oboustranně spojitým obrazem *každého* (neredukujícího se na bod) svého subkontinua?

---

*) Ač celá rovina obsahuje jen *spočetné* systémy „triod" (topologických obrazců litery Y) mezi sebou disjunktních. V. R. L. Moore, Fundam. Math. XIII, str. 261—263.

Ukáže se ihned, že takové kontinuum musí býti ireducibilní mezi dvěma body, dále, že není-li dědičně rozložitelné, jest dědičně nerozložitelné (neboť to jsou vesměs topologicky invariantní vlastnosti). Ježto kontinuum K_3 má tyto vlastnosti a je individuelně definováno, bylo by dobře vyšetřiti, nedává-li právě odpověď na Janiszewského problém. Že by tomu tak mohlo býti, tomu nasvědčuje okolnost, že, podle definice K_3, stejné operace $f(B, S)$ se tu opakují *všude* a ve všech svých aproximacích: je tedy možné očekávati, že *každé* subkontinuum vznikne právě tak jako celek a že tedy se topologicky nemůže od celku lišiti.

Avšak překážkou tomuto vyšetřování je ta okolnost, že *neznáme obecná kriteria, která by dovolovala z chování aproximujících polygonů souditi o homeomorfismu (topologickém typu) aproximovaných útvarů.* Nalezení takových kriterií by nejvýš pravděpodobně hrálo velkou roli v topologii a mělo by četné aplikace. Je to podle mého mínění jeden z nejobecnějších a z nejslibnějších problémů, na který bych zde chtěl zvláště důrazně upozorniti. Nejen K_1 nebo K_3, nýbrž i úsečka dá se vyjádřiti jako průřez klesající posloupnosti průchodních pásů (v tomto případě byly by to stále tenčí obdélníky) a ve všech případech všecky pásy našich posloupností jsou mezi sebou homeomorfní. Rozdíl mezi K_1 nebo K_3 a úsečkou pochází tedy od toho, *v jaké poloze* leží jeden pás ve druhém. V tomto směru je mi znám pouze velmi speciální (nepublikovaný) výsledek od N. Aronszajna a mimoto shledal jsem v literatuře jedinou práci [*4*], která však dává kriteria velmi obecná a velmi slabá.

17. Další problém související s K_3 je zcela jiné povahy: běží o „vzácnost" takových křivek mezi jinými kontinui. Běžný názor vidí v těchto útvarech jakési pathologické monstrum a věří, že „v běžném matematickém životě" z říše všech rovinných kontinuí nejčastější jsou obrazce, jako jednoduché oblouky nebo křivky s konečným nebo nejvýš spočetným množstvím bodů rozvětvení atp. Naproti tomu útvary, jako jsou nerozložitelná nebo dokonce dědičně nerozložitelná kontinua, zdají se náležeti ke „vzácnostem".

Nyní množství všech (i jednobodových) subkontinuí čtverce dá se uvažovati (a to zcela přirozeným způsobem) jako metrický kompaktní prostor. Za tím účelem stačí na př. podle F. Hausdorffa rozuměti vzdáleností dvou subkontinuí A a B větší z obou čísel ϱ_1, ϱ_2, kde ϱ_1 je horní hranice vzdáleností $\varrho(a, B)$ a ϱ_2 je horní hranice vzdáleností $\varrho(b, A)$ $(a \in A,\ b \in B)$. Otázka po „vzácnosti" nebo „rozšířenosti" topologického druhu dá se pak v jistém smyslu matematicky precisovati: můžeme se na př. ptáti, zda v takto zavedeném prostoru P množství U všech dědičně nerozložitelných kontinuí je snad řídké nebo husté, a nastane-li druhý případ, jaká je jeho kategorie v Baireově smyslu. Odpověď je překvapující a velmi poučná: S. Mazurkiewicz ukázal [22], že netoliko U je v P husté, nýbrž i že *$P - U$ je množství F_σ prvé kategorie v P*. Dědičně nerozložitelná kontinua jsou tedy v tomto smyslu v prostoru P nekonečně méně vzácná než všecka ostatní kontinua dohromady.

Důkaz spočívá v tom, že každému kontinuu $C \varepsilon P - U$ můžeme přiřaditi kladné číslo $\lambda(C)$, totiž maximum Hausdorffovy „vzdálenosti" dvou subkontinuí, ve které lze rozložiti každé rozložitelné subkontinuum kontinua C. Dá se pak ukázati, že množství D_n všech kontinuí $C \varepsilon P - U$, pro která je $\lambda(C) \geq n^{-1}$ je v P *uzavřené* a mimoto v P *řídké*, neboť každé $C \varepsilon D_n$ dá se aproximovati posloupností $\{A_i\}$ jednoduchých oblouků takových, že $\lambda(A_i) < n^{-1}$. Množství $P - U$, které zřejmě splývá se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D_n$, je tedy F_σ prvé kategorie v P.

Ježto při důkaze se nikde neopíráme o existenci dědičně nerozložitelného kontinua, je tím (nepřímo) podán důkaz existence takových kontinuí, i kdyby žádné z nich (jako na př. K_3) nebylo individuelně definováno.

Tato topologická metoda existence různých matematických útvarů (množství, funkcí atp.) důkazem, že množství takových útvarů je druhé kategorie, tedy jistě neprázdné, zasluhuje zvláštní pozornost vzhledem ke stále četnějším jejím aplikacím v různých větvích matematiky, které byly v poslední době provedeny, a to zejména v teorii funkcí a funkčních prostorů (sr. na př. nedávné práce S. Saksa, *On the functions of Besicowitch*..., Fundam. Math. XIX, str. 211—219, a V. Jarníka, *Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen* (vyjde ve Fundam. Math. XXI).

Tato metoda často vede k výsledkům zcela nepředvídaným. Ukazuje se, že v matematice jako v přírodě — jak poznamenal slavný biolog J. Loeb — *často to, co považujeme za pravidlo, je ve skutečnosti jen snáze pozorování přístupná výjimka.*

18. Na konec chci se zmíniti o roli nerozložitelných kontinuí ve velmi obecných topologických problémech týkajících se *spojitých transformací*. Podle tradičního mínění, velmi rozšířeného mezi topology a vůbec mezi matematiky, předmětem topologie je studium těch vlastností množství, které jsou *invariantní* vzhledem k jednojednoznačným a oboustranně spojitým transformacím. Ale před několika lety jsme si uvědomili, že je naprosto nutné studovati v topologii soustavně invarianty zcela obecných spojitých transformací, a badání o těchto otázkách provádějí se plánovitě v našem semináři (sr. na př. pojednání Z. Waraszkiewicze: *Sur une famille indénombrable de courbes planes, dont aucune n'est une image continue d'aucune autre*, Fundam. Math. XVIII, str. 118—137

a 309—311; N. Aronszajn, *Sur les invariants des transformations continues,* Fundam. Math. XIX, str. 92—142).

Z prací H. Hahna a S. Mazurkiewicze o kontinuích lokálně souvislých (spojitých obrazech úsečky), že vlastnost kontinua, ke každému páru svých bodů obsahovati spojující je *jednoduchý oblouk* (Bogenverknüpfbarkeit, arcwise connectedness) *jest invariant spojitých transformací.* Zcela nedávno Mazurkiewicz a já jsme vyšetřovali, zda totéž platí o obecnější vlastnosti, která vznikne, když zde jednoduchý oblouk nahradíme *ireducibilním kontinuem rozložitelným lineárně ve vrstvy* K. Kuratowského (v. výše, str. 316). Odpověď je *záporná* (vyjde ve Fundam. Math. XXI) právě vzhledem na vyskytování se nerozložitelných vrstev v takových kontinuích. Ale následující problém je neřešen:

Problém VII. Jest invariantní vzhledem ke spojitým transformacím vlastnost kontinua, obsahovati pro každý pár svých bodů *dědičně rozložitelné* kontinuum ireducibilní mezi těmito body?

Jiná otevřená otázka zdá se zvláště důležitá a obtížná. Víme, že každé uzavřené množství (zejména každé kontinuum) je spojitým obrazem Cantorova 0-rozměrného dokonalého množství (t. j. množství označeného C_0 na str. 312). Množství C_0 je tedy vzhledem ke spojitým transformacím *universální uzavřený model* všech uzavřených množství. A tu je neřešen následující problém od H. Hahna:

Problém VIII. Existuje kontinuum H, které by bylo universálním modelem všech kontinuí (jehož spojitým obrazem by bylo každé kontinuum)?

Dokázáno je předně, že, existuje-li takové kontinuum, existuje také mezi *křivkami*, t. j. 1-rozměrnými kontinui (v. S. Mazurkiewicz, Comptes-Rendus du I Congrès des Math. des Pays Slaves, Varšava 1929, str. 66—67 a *Sur les images continues des continus,* Fundam. Math. XVII, str. 330). Za druhé H musí obsahovati nerozložitelná kontinua, ježto podle předpokladu existuje spojitá funkce f taková, že $\mathrm{f}(H) = \mathsf{K}_3$. Neboť vlastnost množství M, býti kontinuem majícím za spojitý obraz při pevné transformaci f nerozložitelné kontinuum $[\mathrm{f}(M) = K)]$, je vlastnost *induktivní* ve smyslu L. E. J. Brouwera, takže z jeho *redukční věty* (v. na př. K. Kuratowski, Fundam. Math. III, str. 88) následuje ihned, že M obsahuje subkontinuum N *ireducibilní* vzhledem k této vlastnosti. N je však nerozložitelné, neboť jinak by existovala neprázdná vlastní subkontinua A a B kontinua N taková, že $N = A + B$, načež by bylo $K = \mathrm{f}(N) = \mathrm{f}(A) + \mathrm{f}(B)$, kde $\mathrm{f}(A)$ a $\mathrm{f}(B)$ by byla neprázdná kontinua, jež by podle ireducibility N byla různá od K, což odporuje nerozložitelnosti kontinua K. To je jediná dosud známá redukce problému: máme zde příklad, jak pojem nerozložitelného kontinua se vnucuje a vniká do úsudků.

Ve své přednášce *Neuere Methoden und Probleme der Geometrie* v plenárním sezení posledního mezinárodního kongresu matematiků v Curychu 1932 (I. svazek, str. 314—315) praví K. Menger:

„*Singularita tvoří tedy pozadí, před nímž teprve vynikne v pravém světle pozoruhodnost obecných pravidel*, jako vůbec množinové singularity nikterak nejsou zajímavé pouze samy pro sebe, nýbrž především proto, že dávají poznati, jak nezměrně obsáhlý a pozoruhodný jest obor útvarů, *v němž množinová geometrie zavádí pořádek a formuluje obecně platné zákony. Vyloučením zdánlivě patologických útvarů uniknou jistě zdravé zákony*. Bylo by to, jako by někdo chtěl z teorie čísel vymýtiti transcendentní metody.“

Seznam citovaných prací.

1. L. E. J. Brouwer, *Zur Analysis Situs*, Math. Ann. 68 (1910), str 422-434; sr. též Proc. Acad. Sc. Amsterdam XIV (1911).

2. A. Denjoy, *Continu et discontinu*, Comptes Rendus Paris 151 (1910).

3. D. van Dantzig, *Über topologisch homogene Kontinua*, Fundam. Math. XV (1930), str. 102—125.

4. H. M. Gehman, *Concerning sequences of homeomorfisms*, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. 18 (1932), str. 460—465.

5. Z. Janiszewski et K. Kuratowski, *Sur les continus indécomposables*, Fundam. Math. I (1920), str. 210—222.

6. B. Knaster, *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, Fundam. Math. III (1922), str. 247—286.

7. B. Knaster, *Quelques coupures singulières du plan*, Fundam. Math. VII (1925), str. 264—289.

8. B. Knaster, *Sur les ensembles connexes irréductibles entre deux points*, Fundam. Math. X (1927), str. 276—297.

9. B. Knaster et K. Kuratowski, *Sur les continus non bornés*, Fundam. Math. V (1924), str. 23—58.

10. K. Kuratowski, *Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs*, Fundam. Math. III (1922), str. 181—199.

11. K. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles entre deux points I*, Fundam. Math. III (1922), str. 200—231 a *II*, Fundam. Math. X (1927), str. 225—275.

12. K. Kuratowski, *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fundam. Math. VI (1924), str. 130—145.

13. K. Kuratowski, *Sur un problème du choix concernant les continus indécomposables*, Annales Soc. Polon. de Math. VI (1927), str. 126.

14. K. Kuratowski, *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, Fundam. Math. XII (1928), str. 20—42.

15. K. Kuratowski, *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, Fundam. Math. XII (1928), str. 214—239.

16. K. Kuratowski, *Sur une condition qui caractérise les continus indécomposables*, Fundam. Math. XIV (1929), str. 116—117.

17. K. Kuratowski, *Sur un problème topologique concernant les systèmes „strictement transitifs“*, Fundam. Math. XIX (1932), str. 252—256.

18. S. Mazurkiewicz, *Un théorème sur les continus indécomposables*, Fundam. Math. I (1920), str. 35—39.

19. S. Mazurkiewicz, *Sur les continus homogènes*, Fundam. Math. V (1924), str. 137—146.

20. S. Mazurkiewicz, *Sur les continus indécomposables,* Fundam. Math. X (1927), str. 305—310.

21. S. Mazurkiewicz, *Sur les points accessibles des continus indécomposables,* Fundam. Math. XIV (1929), str. 107—115 a *Un théorème sur l'accessibilité des continus indécomposables,* tamtéž, str. 271—276.

22. S. Mazurkiewicz, *Sur les continus absolument indécomposables,* Fundam. Math. XVI (1930), str. 151—159.

23. G. Nöbeling, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums I,* Heft 2 (1932), str. 1—2.

24. A. Schönflies, *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* II (Lipsko 1908).

25. P. M. Swingle, *Two types of connected sets,* Bull. Amer. Math. Soc. XXXVII (1931), str. 254—258.

26. P. Urysohn, *Über ein Problem von Herrn Carathéodory,* Fundam. Math. VI (1924), str. 229—235.

27. P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes I,* Fundam. Math. VII (1925), str. 29—137, VIII (1926), str. 225—351 a *II,* Verhand. der Kon. Akad. Amsterdam XIII (1928), str. 1—172.

28. P. Urysohn, *Une propriété des continus de M. Knaster,* Fundam. Math. X (1927), str. 175—176.

29. W. A. Wilson, *On bounded regular frontiers in the plane,* Bull. Amer. Math. Soc. XXXIV (1928), str. 81—90.

30. K. Yoneyama, *Theory of continuous sets of points,* Tohôku Mathem. Journ. XII (1917), str. 43—158.

31. L. Zoretti, *Sur la notion de ligne,* Ann. Ec. Norm. XXVI (1909), str. 485 a Comptes Rendus, Paris (1910).

*

Rapport sur la théorie des continus indécomposables.

(Extrait de l'article précédent.)

Un exposé intuitif des plus importants résultats jusqu'ici connus sur le rôle, la structure et les propriétés topologiques des continus indécomposables. On y trouve aussi une bibliographie ainsi que l'énoncé de quelques résultats récents et de problèmes irrésolus.