Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ferdinand Pietsch

Výpočet cívky pro demonstraci magnetoindukce s optimálním využitím mědi v daném prostoru

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 8, D53--D57

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121899

Dr. *FERDINAND PIETSCH:*

Výpočet cívky pro demonstraci magnetoindukce s optimálním využitím mědi v daném prostoru.

Ve všech kabinetech fysikálních shledáváme se s cívkami sekundárními, do nichž vkládáme cívky primární buď s jádrem nebo bez jádra železného nebo permanentní magnet. Chceme demonstrovati tedy vznik indukovaného proudu a na vyšším stupni poukazujeme na to, že jednotnou příčinou indukce jest změna toku silokřivek v dutině cívky. Nejmenší indukci obdržíme tudíž, je-li primární cívka bez jádra železného. Abychom nemusili pro tento případ použíti zvlášť citlivého galvanometru, musíme se snažiti, aby cívka sekundární byla účelně sestrojena. Bohužel cívky takové zhotovují se zcela šablonovitě. Většina těchto cívek je ovinuta velkým počtem závitů tenkého drátu bez ohledu na to, k jakému galvanometru bude připojena. To má ovšem za následek, že cívka, kterou se mohu elektrisovati, nedává na galvanometru takových úchylek.

Patrně jsou výrobci cívek vedeni myšlenkou, že proud indukovaný bude tím silnější, čím více závitů dáme cívce, tedy, čím tenčí drát volíme k navinutí na danou cívku. Chci v tomto článečku ukázati, jak i takovýto jednoduchý přístroj má býti sestrojen účelně, aby při vynaložení určitého množství mědi se dostavil účinek nejlepší.

Postavme si tedy následující otázku: Mám cívku daných rozměrů, na níž tedy je určitý volný prostor, který mohu vyplniti drátem silnějším nebo slabším. Při jaké síle drátu dostaví se nejlepší účinek na daném galvanometru? Čím tenčí zvolím drát, tím více závitů bude obsahovati daný prostor, tím vyšší bude indukovaná síla elektromotorická, ale tím větší bude současně odpor drátu na cívce. Již z této úvahy vidíme, že působí zde dvě veličiny proti sobě, čili, že je zde možnost největšího účinku při určitém průměru drátu, čili při určitém počtu závitů. Abychom mohli vše uvésti do počtu, předpokládejme tyto rozměry: Budiž D průměr dutiny cívky včetně tloušťky stěny, t budiž tloušťka cívky, h její výška. Značí-li d průměr drátu navinutého, bude míti jedna poloha h/d závitů a poloh bude t/d, takže počet závitů na cívce bude $z = \frac{t \cdot h}{d^2} = \frac{S}{d^2}$ (1), kdež S jest plocha obdélníka. Z tohoto vztahu vidíme závislost počtu závitů na průměru drátu, který předpokládáme k vůli jednoduchosti za obnažený. Intensita proudu v galvanometru o odporu R_g bude dána výrazem

$$I = \frac{z \,.\, e}{R_c + R_g}, \tag{2}$$

kdež e značí elms indukovanou v jednom závitě a R_c odpor celé cívky.

$$R_c = \varrho \frac{L}{q} = \varrho \frac{\pi (D + t) \,.\, z}{\pi \frac{1}{4} d^2} = \frac{4\varrho (D + t) z}{d^2} = \frac{4\varrho (D + t)}{S} z^2 = R z^2,$$

kdež R značí konstantu, mající rozměr odporu.

Pak bude

$$I = \frac{ze}{Rz^2 + R_g} = \frac{e}{Rz + R_g/z},$$

v kterémžto výrazu máme jen jednu proměnnou z. Derivací jmenovatele obdržíme podmínku pro maximum $R - \frac{R_g}{z^2} = 0$, čili $Rz^2 = R_g$ čili $R_c = R_g$. Musíme tudíž voliti takový počet závitů čili takový průměr ($d^2 = S/z$), aby odpor cívky se rovnal odporu galvanometru. Vidíme, že se tento případ podobá známému výpočtu takového spojení baterie na vnější odpor R_g, při němž by vznikl nejsilnější proud. Je-li n článků a je-li x skupin spojeno za sebou a v každé tudíž n/x článků vedle sebe, jest odpor baterie $\frac{x \,.\, r}{n/x}$, kdež r jest vnitřní odpor jednoho článku. Jest tudíž

$$I = \frac{x \,.\, e}{x^2 r/n + R_g} = \frac{ne}{rx + R_g\, n/x}$$

čili podmínka pro maximum jest

$$r = \frac{nR_g}{x^2} \text{ čili } \frac{rx^2}{n} = R_g$$

čili maximum proudu nastane, je-li vnitřní odpor celé baterie roven odporu vnějšímu. Také v tomto případě jest laik sváděn myšlenkou, že čím více spojí článků za sebou, tím silnějšího proudu docílí.

Než vraťme se k našemu případu. Z podmínky pro maximum vypočítáme optimální počet závitů

$$z = \sqrt{\frac{R_g}{R}} \text{ a z toho } d = \sqrt{\frac{S}{z}}.$$

Váha použitého drátu bude

$$P = Lq\sigma = \pi (D + t)\, z \,.\, q\sigma = \tfrac{1}{4}\pi^2 (D + t) S\sigma.$$

Spočítejme si na př. hodnoty pro $R_g = 100\,\Omega$, $D = 20$ mm, $h = 100$ mm, $t = 20$ mm. Pak bude $R = 1{,}4 \,.\, 10^{-6}\,\Omega$

$$S = 2000 \text{ mm}^2, \quad \pi\,(D + t) = 12{,}566 \text{ cm}$$

V tabulce I. jsou uvedeny příslušné hodnoty s předpokladem, že v jednom závitu se indukuje elms. 1 μV (10^{-6} V).

Tabulka I.

Průměr drátu v mm d	Počet závitů z	Délka drátu L	Odpor cívky R_c	Intensita proudu v μA
0,1	200.000	25.132	56.000	3,57
0,12	138.900	17.450	27.000	5,13
0,14	102.100	12.840	14.600	6,95
0,16	78.100	9810	8550	9,04
0,18	61.700	7750	5320	11,38
0,20	50.000	6280	3500	13,9
0,25	32.000	4020	1430	20,9
0,30	22.250	2790	693	28,1
0,35	16.340	2030	374	34,5
0,40	12.500	1570	218,5	39,2
0,45	9880	1240	136,5	41,8
0,46	9460	1186	125	42,1
0,48	8685	1090	102,5	42,4
0,50	8000	1005	89,6	42,2
0,55	6620	832	61,4	41,1
0,60	5550	698	43,2	38,8
0,65	4730	584	31,3	36,0
0,70	4080	513	23,3	33,1
0,75	3560	448	17,7	30,2
0,80	3123	392	13,6	27,5
0,85	2770	348	10,7	25,0
0,90	2470	310	8,5	22,7
0,95	2220	279	6,9	20,8
1,00	2000	251	5,6	18,9

Optimální počet závitů jest $z = \sqrt{\dfrac{100}{1{,}4}\,10^6} = 8450$, k tomu průměr

$$d = \sqrt{\frac{2000}{8450}} = 0{,}487$$

Vidíme, že maximum není výrazné, takže bychom mohli voliti mezi průměry 0,4 až 0,6, aniž bychom se vzdálili mnoho od maximálního účinku.

Váha mědi vyplňující daný prostor jest 1,75 kg.

Ve skutečnosti musíme použíti drátu isolovaného buď lakovaného, nebo jednou, dvakrát opředeného. Tím se zmenší vlastně prostor pro měď, tedy maximum musí býti menší, ale mimo to se také pošine. V tabulce II. jsou uvedeny hodnoty pro drát s dvojnásobným opředením. Maximum nastává při průměru holého drátu $d = 0{,}45—0{,}46$, jest tedy pošinuto směrem k průměru menšímu, ale celkem nepatrně.

Tabulka II.

Průměr drátu holého	Průměr drátu s isolací	Počet závitů	Délka	Odpor cívky	Váha	Intensita v μA
d	d'	z	L	R_c	P	I
0,1	0,26	29.600	3710	8260	0,26	3,54
0,2	0,36	15.500	1950	1087	0,54	13,07
0,3	0,46	9460	1190	294	0,75	24,0
0,4	0,56	6390	803	112	0,9	30,1
0,42	0,58	5950	748	94,5	0,92	30,6
0,44	0,60	5550	696	80	0,94	30,8
0,45	0,61	5370	674	74	0,96	30,85
0,46	0,62	5200	651	68,5	0,96	30,85
0,48	0,64	4880	613	59,2	0,99	30,6
0,50	0,66	4590	576	51	0,99	30,4
0,55	0,71	3960	496	36,7	1,04	29,0
0,60	0,76	3470	436	27	1,10	27,3

Vidíme také, že opět maximum není výrazné a že můžeme voliti mezi průměry 0,4—0,5 (s opředením 0,56—0,66), že se prostor pro měď zmenšil, jeví se na váze drátu, která jest menší než u drátu holého.

Vidíme z toho, že vzorce, které jsme odvodili pro ideální případ holého drátu, mohou nám sloužiti k dosti dobré orientaci, kde hledati nejlepší průměr. Na př. kdyby odpor vnější $R_g = 500\ \Omega$, tu bychom nalezli $z = \sqrt{\frac{R_g}{R}} = \sqrt{\frac{500}{1{,}4}\,10^6} = 18900$ a z toho $d = \sqrt{\frac{S}{z}} = \sqrt{\frac{2000}{18900}} = 0{,}325$ mm.

Zde z znamená ovšem počet závitů holého drátu a slouží nám pouze k výpočtu průměru d. Vypočítáme-li skutečné hodnoty pro isolovaný drát, vidíme, že nejsme daleko od maxima, jež leží opět směrem k tenčímu drátu.

d	d'	z'	L	R_c	P	I
0,25	0,41	11900	1495	534	0,655	11,5
0,26	0,42	11370	1430	472	0,676	11,7
0,28	0,44	10300	1295	368	0,70	11,9
0,30	0,46	9480	1190	295	0,75	11,9
0,32	0,48	8690	1093	238	0,784	11,8
0,34	0,50	8000	1005	193	0,813	11,5

Někdo by mohl ovšem namítati, že jsme při řešení tohoto problému počítali I, jakoby to byl stálý proud, na př. z článku, ačkoli se ve skutečnosti jedná o proud proměnlivý v krátkém čase mizící. Zapneme-li totiž napětí e do primárního obvodu a připojíme sekundární obvod na odpor R_g, pak platí známé rovnice

$$e - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = r_1 i_1$$

$$- M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = r_2 i_2,$$

kdež $r_2 = R_c + R_g$, L je koeficient samoindukce a M koeficient vzájemné indukce. Řešením a integrací těchto rovnic obdržím, že

$$i_1 = \frac{e_1}{r_1}(1 - \varepsilon^{-\delta t}),\ i_2 = -\frac{z_2}{z_1}\frac{e}{r_2}\varepsilon^{-\delta t},$$

kdež ε značí základ přirozených logaritmů. Hodnota z_1 jest konstanta, neboť chceme měniti jen počet závitů cívky sekundární. Pro maximální i_2 platí tedy relace námi použitá

$$i_2 = \frac{kze}{r_2} = \frac{kze}{R_c + R_g}.$$

Závisí tudíž také okamžitý proud ve vnějším odporu na tomto výrazu, který byl východiskem naší úvahy.

Většina indukčních cívek ve fysikálních kabinetech je sestrojena k demonstraci fysiologického účinku. Poněvadž odpor těla lidského jest veliký, čítaje na př. 10.000, 20.000 Ω, tu je pochopitelno, že se hodí pro dosažení největšího účinku drát tenký. Chceme-li však indukovaný proud vésti do galvanometru, tu je vhodnější cívka se silným drátem o méně závitech. Kdybychom chtěli použíti galvanometru o malém odporu, jako míváme pro thermoelektrické články, tu by sekundární cívka mohla míti týž počet závitů nebo i méně než cívka primární.