Eduard Čech

Příspěvek k teorii dimense

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 8, 277--291

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121898

ČÁST MATEMATICKÁ.

Příspěvek k teorii dimense.

Eduard Čech.

(Došlo 14. března 1933.)

Úvod. Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$ Označme C_n množství těch „bodů" $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro něž $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$. C_n jest nejjednodušší příklad bodového množství *dimense n*. Specielně *pro $m < n$ dimense množství C_m je menší než dimense množství C_n.* Otázka po přesném matematickém smyslu ležatě vytištěného výroku není však zcela prostá. Na první pohled se zdá, že C_n má *více bodů* než C_m. Avšak již r. 1877 G. Cantor ukázal,[1] že tomu tak není, že totiž existuje *jednojednoznačné* zobrazení C_m na C_n. Zkusme to tedy jinak! Je zřejmé, že (stále pro $m < n$) C_m je *spojitý* obraz (na př. projekce) množství C_n; naproti tomu z názoru se zdá, že C_n není spojitým obrazem množství C_m. Avšak ani tato cesta nevede k cíli, neboť r. 1890 ukázal G. Peano,[2] že naopak existuje také spojité zobrazení množství C_m na množství C_n.

R. 1910 H. Lebesgue vyslovil[3] větu (*Lebesgueovo lemma*): *C_n dá se pokrýti konečným počtem libovolně malých uzavřených množství tak, že každý bod náleží nejvýš do $n + 1$ z nich, nikoli však tak, aby každý bod náležel nejvýš do n z nich.* Je patrné, že na základě Lebesgueova lemmatu lze vysloviti obecnou definici dimense. To však Lebesgue neučinil, nýbrž užil svého lemmatu pouze k odůvodnění fakta, že C_m a C_n $(m \neq n)$ mají různou topologickou strukturu.[4])

Prvou obecnou definici dimense vyslovil r. 1913 L. E. J. Brouwer.[5]) Brouwerova práce zůstala však isolovaná a za zakladatele obecné *teorie* dimense jest považovati teprve K. Mengera a P. Ury-

[1]) Journal f. Math., sv. 84 (1877), str. 242.

[2]) Math. Ann., sv. 36 (1890), str. 257.

[3]) Math. Ann., sv. 70 (1911), str. 166. Důkaz zde naznačený není úplný a byl Lebesguem přesně vyložen teprve ve Fund. Math., sv. 2 (1921), str. 256. První přesný důkaz Lebesgueova lemmatu udal Brouwer ve článku citovaném v pozn. [5]). Lebesgueův důkaz byl později značně zjednodušen W. Hurewiczem [Math. Ann., sv. 101 (1929), str. 210] a E. Spernerem [Hamb. Abh., sv. 6 (1928), str. 265].

[4]) Prvý přesný důkaz tohoto fakta udal Brouwer v Math. Ann., sv. 70 (1911), str. 161.

[5]) Journ. f. Math., sv. 142 (1913), str. 146 [v. též sv. 153 (1924), str. 253].

sohna.[6]) Vznik těchto prací jest umístiti asi do let 1921—1923. Z jiných autorů, kteří přispěli k dalšímu rozvoji této teorie, jest připomenouti zejména W. Hurewicze.

Tato teorie dimense je vybudována v separabilních[7]) prostorech. Četné věty mají však platnost pouze v kompaktních[8]) nebo polokompaktních[9]) prostorech. Omezení na separabilní prostory jest u některých problémů,[10]) jak se zdá, odůvodněno povahou věci. U některých problémů má se však věc jinak. Jak jsem ukázal,[11]) lze Menger-Urysohnovu definici dimense upraviti tak, že platnost některých vět se rozšíří na mnohem obecnější prostory dokonale normální,[12]) obsahující jako zvláštní případ všecky prostory metrické.[13])

Urysohn dokázal,[14]) že u kompaktních prostorů lze dimensi definovati vlastností vyslovenou v Lebesgueově lemmatu; upozorňuje při tom, že tato definice je omezena na kompaktní prostory. Avšak později Hurewicz vyslovil Lebesgueovo lemma v takové formě, že udává charakteristickou vlastnost dimense i při libovolných separabilních prostorech. Je tedy nasnadě pokus, odvoditi některé věty teorie dimense tak, že naznačená vlastnost se zvolí za definici. V tomto článku ukazuji, jak lze tímto způsobem odvoditi t. zv. *součtovou větu*.[15]) Tento důkaz nejen je spíše jednodušší než dosavadní, ale má tu přednost, že platí v každém normálním[16]) prostoru.

Zvolená definice má dvě nevýhody. Předně není zřejmé, že dimense části nemůže převýšiti dimensi celku; ukáži však, že aspoň u dokonale normálních prostorů věta o dimensi části je důsledkem součtové věty. Druhá nevýhoda je podstatnější: Zvoleným způ-

---

[6]) Systematický výklad této teorie podává Menger ve své knize *Dimensionstheorie* (1928). V. též posmrtně uveřejněné pojednání Urysohnovo ve Fund. Math., sv. 7 (1925), str. 30—137 a sv. 8 (1926), str. 225—351. Pro prvou informaci dobře poslouží článek V. Jarníka v Časopise, roč. 58 (1929), str. 367.

[7]) Prostor R je separabilní, když je metrický (v. odst. 5) a když z každého systému v R otevřených množství pokrývajícího R (v. odst. 1) lze vybrati nejvýš spočetný systém pokrývající R.

[8]) Prostor R je kompaktní, když je metrický a když z každého systému v R otevřených množství pokrývajícího R lze vybrati konečný systém pokrývající R.

[9]) Prostor R je polokompaktní, když je metrický a když je součtem nejvýš spočetného systému kompaktních částí.

[10]) Na př. u problémů studovaných v kap. 4. Mengerovy knihy.

[11]) Rozpr. II. tř. čes. Akad., roč. 42 (1932), č. 13. V. též Comptes Rendus Paris, sv. 193 (1931), str. 976—977.

[12]) V. odst. 25.

[13]) V. odst. 26.

[14]) Fund. Math., sv. 8, str. 301.

[15]) V. odst. 23 a 24.

[16]) V. odst. 9.

sobem lze definovati pouze dimensi prostoru jako *celku*, nikoli dimensi prostoru v jednotlivých jeho bodech nebo částech. V souvislosti s tím je moje domněnka, že u dokonale normálních prostorů zde zvolená definice dimense jest ekvivalentní s tou, kterou jsem zvolil ve článku citovaném v pozn. [11]). Důkaz této domněnky znamenal by podle mého mínění důležitý pokrok v teorii dimense.

Proti naznačeným nevýhodám stojí dvě výhody. Předně zvolená definice je nejvhodnější k důkazu fakta, že euklidovský prostor a jeho elementární části mají ve smyslu obecné teorie tu dimensi, která se jim odedávna přisuzuje.[17]) Za druhé existují důležité věty, k jejichž odvození je třeba *pouze* té vlastnosti dimense, která zde byla zvolena za definici. Tak tomu je na př. s větou, kterou odvodil P. Alexandroff: *Kompaktní prostor dimense n dá se libovolně malou spojitou deformací převésti v polyedr dimense n, nikoli však v polyedr dimense $< n$.*[18])

Připomínám ještě, že *k úplnému porozumění textu není třeba žádných matematických znalostí*; stačí si přečísti několik prvých odstavečků (1—6) mého článku *Množství ireducibilně souvislá mezi n body.*[19]) Že bylo možné zvoliti tak elementární formu výkladu, není náhodné. Vskutku moderní topologie při své pronikavé analyse prostoru nikterak nečerpá z jemně rozvětvené zásoby poznatků klasické matematiky, nýbrž zdolává s úspěchem svoje problémy zbraní zcela prostou, totiž elementárními pravidly logického myšlení, aplikovanými přímo na jednoduché pojmy z názoru získané a axiomaticky precisované. Nechť tento skromný článek přispěje poněkud k tomu, aby tato krásná disciplina matematická i u nás se těšila takové oblibě, jakou svými vnitřními půvaby i svým významem v celku matematických věd zasluhuje!

1. Nechť A je část topologického prostoru[20]) R. Nechť $\mathfrak{S}$ je systém částí prostoru R. Pravíme, že $\mathfrak{S}$ *pokrývá* A, když každý bod $a \varepsilon A$[21]) je částí některého $S \varepsilon \mathfrak{S}$.

2. Nechť $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ Nechť $\mathfrak{S}$ je systém částí prostoru R. Pravíme, že $\mathfrak{S}$ má *řád* $\leq n$, když žádný bod $a \varepsilon R$ není obsažen ve více než $n + 1$ elementech systému $\mathfrak{S}$. Pravíme, že $\mathfrak{S}$ má *řád* n, když 1^0 $\mathfrak{S}$ má řád $\leq n$, 2^0 buďto $n = -1$ nebo $\mathfrak{S}$ nemá řád $\leq n - 1$.

---

[17]) Čtenář začátečník snad bude postrádati důkaz tohoto fakta; v jiném článku, který v brzku vyjde v tomto Časopise, budu míti příležitost takový důkaz uvésti.

[18]) Annals of Math., sv. 30 (1929), str. 120 (Überführungssatz). Jednoduchý důkaz vyjde ve článku C. Kuratowského *Sur un théorème fondamental* etc. ve sv. 20 Fund. Math.

[19]) Časopis, roč. 61 (1932), str. 109. Citováno zkratkou M.

[20]) M, 1.

[21]) $a \varepsilon A$ znamená, že a jest element množství A.

3. Nechť $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ Nechť R je topologický prostor. Pravíme, že *dimense* prostoru R je $\leqq n$ a píšeme $\dim R \leqq n$, když každému konečnému[22]) systému $\mathfrak{U}$ v R otevřených[20]) množství pokrývajícímu R lze přiřaditi konečný systém $\mathfrak{V}$ v R otevřených množství takový, že 1^0 $\mathfrak{V}$ pokrývá R; 2^0 každé $V \varepsilon \mathfrak{V}$ je částí některého $U \varepsilon \mathfrak{U}$; 3^0 $\mathfrak{V}$ má řád $\leqq n$. Pravíme, že R má *dimensi* n a píšeme $\dim R = n$, když 1^0 $\dim R \leqq n$; 2^0 buďto $n = -1$ nebo není $\dim R \leqq n - 1$.

Zřejmě $\dim R = -1$, když a jen když $R = 0$.[23])

Podle M, 1,2 dimense jednobodového prostoru rovná se 0.

Zřejmě $\dim R = n$ implikuje, že $\dim R^* = n$ pro každý prostor R^* homeomorfní[24]) s R.

4. *Nechť R je topologický prostor. Nechť $S \subset R$.*[25]) *Nechť S jest uzavřené v R. Nechť* $\dim R \leqq n$. *Pak* $\dim S \leqq n$.[26])

Důkaz. Nechť $\mathfrak{U}'$ je konečný systém v S otevřených množství; nechť $\mathfrak{U}'$ pokrývá S. Máme ukázati, že existuje konečný systém $\mathfrak{V}'$ v S otevřených množství takový, že 1^0 $\mathfrak{V}'$ pokrývá S; 2^0 každé $V' \varepsilon \varepsilon \mathfrak{V}'$ je částí některého $U' \varepsilon \mathfrak{U}'$; 3^0 $\mathfrak{V}'$ má řád $\leqq n$. Podle definice množství v S otevřených[27]) lze každému $U' \varepsilon \mathfrak{U}'$ přiřaditi v R otevřené U tak, že $U' = S \,.\, U$.[28]) K množstvím U takto určeným připojme ještě v R otevřené[20]) množství $R - A$.[29]) Tím vznikne konečný systém $\mathfrak{U}$ v R otevřených množství; zřejmě $\mathfrak{U}$ pokrývá R. Ježto $\dim R \leqq n$, existuje konečný systém $\mathfrak{V}$ v R otevřených množství takový, že 4^0 $\mathfrak{V}$ pokrývá R; 5^0 každé $V \varepsilon \mathfrak{V}$ je částí některého $U \varepsilon \mathfrak{U}$; 6^0 $\mathfrak{V}$ má řád $\leqq n$. Každému $V \varepsilon \mathfrak{V}$ přiřaďme $V' = S \,.\, V$. Tato V' tvoří systém $\mathfrak{V}'$. Zřejmě $\mathfrak{V}'$ je konečný systém v S otevřených množství. Z vlastností $4^0, 5^0, 6^0$ systému $\mathfrak{V}$ následují vlastnosti $1^0, 2^0, 3^0$ systému $\mathfrak{V}'$.

5. Množství R (složené z jakýchkoli prvků) nazveme *metrický prostor* (a jeho prvky nazveme *body*), když každému páru a, b bodů z R bylo přiřazeno reálné číslo $\varrho(a, b)$ (*vzdálenost* bodů a, b v prostoru R). Při tom musí býti splněny následující tři axiomy:

5,1. Když $a \varepsilon R$, pak $\varrho(a, a) = 0$.
5,2. Když $a \varepsilon R$, $b \varepsilon R$, $\varrho(a, b) = 0$, pak $a = b$.
5,3. Když $a \varepsilon R$, $b \varepsilon R$, $c \varepsilon R$, pak $\varrho(a, b) + \varrho(c, b) \geqq \varrho(a, c)$.

---

[22]) To znamená, že počet elementů je konečný.
[23]) M, [2]).
[24]) M, 3.
[25]) M, [6]).
[26]) S je topologický prostor podle M, 5.
[27]) M, 5.
[28]) M, [5]).
[29]) M, [7]).

Platí pak následující věty 5,4 a 5,5.[30])

5,4. Když $a \varepsilon R$, $b \varepsilon R$, $a \neq b$, pak $\varrho(a, b) > 0$. **Důkaz.** Podle 5,3 jest $2\varrho(a, b) \geqq \varrho(a, a)$, tedy $\varrho(a, b) \geqq 0$ podle 5,1, tedy $\varrho(a, b) > 0$ podle 5,2.

5,5. Když $a \varepsilon R$, $b \varepsilon R$, pak $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. **Důkaz.** Podle 5,3 jest $\varrho(a, a) + \varrho(b, a) \geqq \varrho(a, b)$, tedy $\varrho(b, a) \geqq \varrho(a, b)$ podle 5,1; a stejně se odvodí, že $\varrho(a, b) \geqq \varrho(b, a)$.

6. Nechť R je metrický prostor. Pak definujeme: Množství $A \subset R$ nazývá se v R *otevřené*, když každému $a \varepsilon A$ lze přiřaditi kladné číslo η tak, že $x \varepsilon R$, $\varrho(a, x) < \eta$ implikuje $x \varepsilon A$. Snadno se nahlédne, že v důsledku této definice platí věty M, 1,5—1,8, t. j. *metrický prostor je* (na základě naší definice otevřených množství) *topologickým prostorem.*

7. Nechť R je metrický prostor. Nechť $A \subset R$; nechť $A \neq 0$. Nechť $r > 0$. Nazveme *koulí o středu A a poloměru r* a označme $\mathrm{K}(A, r)$ množství těch $x \varepsilon R$, pro něž $\varrho(a, x) < r$ při vhodném $a \varepsilon A$. Když $A = \{a\}$ je jednobodové množství, píšeme $\mathrm{K}(A, r) = \mathrm{K}(a, r)$.[31])

8. *Nechť R je metrický prostor. Nechť $A \subset R$; nechť $A \neq 0$. Nechť $r > 0$. Pak množství $\mathrm{K}(A, r)$ je v R otevřené.*

Důkaz. Máme ukázati, že každému $x \varepsilon \mathrm{K}(A, r)$ lze přiřaditi $\eta > 0$ tak, že $y \varepsilon R$, $\varrho(x, y) < \eta$ implikuje $y \varepsilon \mathrm{K}(A, r)$. Nechť tedy $x \varepsilon \mathrm{K}(A, r)$. Pak existuje bod $a \varepsilon A$ takový, že $\vartheta = \varrho(a, x) < r$. Tedy číslo $\eta = r - \vartheta$ je kladné. Nechť $y \varepsilon R$, $\varrho(x, y) < \eta$. Podle 5,5 jest $\varrho(y, x) < \eta$. Podle 5,3 jest $\varrho(a, y) \leqq \varrho(a, x) + \varrho(y, x) < \vartheta + \eta = r$. Tedy $\varrho(a, y) < r$, takže $y \varepsilon \mathrm{K}(A, r)$.

9. Topologický prostor R nazývá se *normální*,[32]) když má následující vlastnost: *Je-li A, B pár v R uzavřených množství a je-li $A \,.\, B = 0$, existují v R otevřená množství U, V taková, že $A \subset U$, $B \subset V$, $U \,.\, V = 0$.*

10. *Nechť R je normální prostor. Nechť $A \subset U \subset R$. Nechť A je v R uzavřené; nechť U je v R otevřené. Pak existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*[33])

Důkaz. Množství A, $R - U$ jsou v R uzavřená a jest $A\,(R - U) = 0$. Ježto R je normální, existují v R otevřená V, W taková, že $A \subset V$, $R - U \subset W$, $VW = 0$. Ježto $VW = 0$, jest

---

[30]) Vlastnosti 5,4 a 5,5 berou se obvykle do definice metrického prostoru. Jejich odvození z vlastností 5,1, 5,2 a 5,3 podal A. Lindenbaum ve Fund. Math., sv. 8 (1926), str. 211.

[31]) Množstvím $\mathrm{K}(A, r)$ nemusí býti ani A ani r jednoznačně určeno. Příklad: Nechť prostor R obsahuje pouze dva body a, b a nechť $\varrho(a, b) = 1$. Pak $\mathrm{K}(a, 2) = \mathrm{K}(b, 3)$.

[32]) Tento pojem vyskytuje se po prvé u H. Tietze [Math. Ann., sv. 88 (1923), str. 301]; název *normální* u P. Urysohna [Math. Ann., sv. 94 (1925), str. 265].

[33]) M, 4.

$V \subset R - W$; ježto $R - W$ je v R uzavřené, jest[33]) $\overline{V} \subset R - W$, t. j. $\overline{V}W = 0$. Ježto $R - U \subset W$, jest $\overline{V}(R - U) = 0$, t. j. $\overline{V} \subset U$.

11. *Nechť topologický prostor R má následující vlastnost: Je-li $A \subset U \subset R$, je-li A v R uzavřené, je-li U v R otevřené, pak existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Pak R je normální prostor.*

Důkaz. Nechť $A \subset R$, $B \subset R$. Nechť A, B jsou v R uzavřená. Nechť $AB = 0$. Máme dokázati, že existují v R otevřená V, W taková, že $A \subset V$, $B \subset W$, $VW = 0$. Položme $U = R - B$. Ježto B jest v R uzavřené, jest U v R otevřené. Ježto $AB = 0$, jest $A \subset U$. Tedy existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset \subset \overline{V} \subset U$. Položme $W = R - \overline{V}$. Ježto $\overline{V}$ je v R uzavřené,[33]) jest W v R otevřené. Ježto $V \subset \overline{V}$, jest $VW = 0$. Ježto $U = R - B$, $\overline{V} \subset U$, jest $\overline{V}B = 0$, tedy $B \subset R - \overline{V}$, t. j. $B \subset W$.

12. *Nechť R je normální prostor. Nechť $F_1, F_2, \ldots, F_m$ jsou v R uzavřená množství v konečném počtu. Pak lze každému F_i $(1 \leqq \leqq i \leqq m)$ přiřaditi v R otevřené $U_i \supset F_i$ tak, že, když při nějaké kombinaci $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ $(1 \leqq k \leqq m)$ indexů $1, 2, \ldots, m$ jest*

$$\prod_{r=1}^{k} \overline{U}_{i_r} \neq 0, \textit{ je také } \prod_{r=1}^{k} F_{i_r} \neq 0.^{34)}$$

Důkaz. Nechť $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^m-1}$ jsou všecky součiny tvaru $\prod_{r=1}^{k} F_{i_r}$, kde $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ probíhá všecky kombinace indexů $1, 2, \ldots, m$.[35]) Nechť $S = \Sigma\Phi_j$, kde j probíhá všecky ty hodnoty $(1 \leqq j \leqq 2^m - 1)$, pro něž $F_1 \,.\, \Phi_j = 0$. Množství S je stejně jako F_1 uzavřené v R[36]) a jest $F_1 \,.\, S = 0$. Ježto R je normální, existují v R otevřená množství U_1, V_1 taková, že $F_1 \subset U_1$, $S \subset V_1$, $U_1 V_1 = 0$. Jest $U_1 \subset R - V_1$; ježto $R - V_1$ je v R uzavřené, jest[33]) $\overline{U}_1 \subset R - V_1$, t. j. $\overline{U}_1 V_1 = 0$, tedy $\overline{U}_1 S = 0$, takže $\overline{U}_1 \,.\, \Phi_j \neq 0$ $(1 \leqq j \leqq 2^m - 1)$ implikuje $F_1 \,.\, \Phi_j \neq 0$. Tím jsme ze systému $F_1, F_2, \ldots, F_m$ obdrželi *prvou modifikací* systém $\overline{U}_1, F_2, \ldots, F_m$, z něhož stejným postupem (vycházejíce od F_2 místo od F_1) dostaneme *druhou modifikací* systém $\overline{U}_1, \overline{U}_2, F_3, \ldots, F_m$. Po m takových modifikacích dospějeme k žádanému systému $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_m$.

---

[34]) W. Hurewicz a K. Menger, Math. Ann., sv. 100 (1928), pozn. [22]).

[35]) Počet všech kombinací indexů $1, 2, \ldots, m$ jest $\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m - 1$. Ostatně pro náš účel je podstatné pouze, že tento počet je konečný.

[36]) M, 1,3.

13. Je zřejmé, že věta odst. 12 ani ve zvláštním případě $m = 2$ nemůže platiti, není-li prostor R normální.

14. *Nechť R je normální prostor. Nechť množství $U_1, U_2, \ldots, U_m$ v konečném počtu jsou v R otevřená a pokrývají R. Pak lze každému U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ přiřaditi v R otevřené V_i tak, že* 1° $\overline{V}_i \subset U_i$ *pro* $1 \leqq i \leqq m$; 2° *množství $V_1, V_2, \ldots, V_m$ pokrývají R.*[37])

Důkaz.[38]) Položme $F_i = R - U_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Pak množství F_i jsou uzavřená v R a jest $\prod_{i=1}^{m} F_i = R - \sum_{i=1}^{m} U_i = 0$.[39]) Podle odst. 12 existují v R otevřená $W_i \supset F_i$ taková, že $\prod_{i=1}^{m} \overline{W}_i = 0$. Položme $V_i = R - \overline{W}_i$, takže $V_i \subset R - W_i$. Ježto $R - W_i$ jest v R uzavřené, jest $\overline{V}_i \subset R - W_i$, tedy $\overline{V}_i \,.\, W_i = 0$; ježto $W_i \supset F_i$, jest $\overline{V}_i F_i = 0$, tedy $\overline{V}_i \subset R - F_i$, t. j. $\overline{V}_i \subset U_i$. Mimoto $\sum_{i=1}^{m} V_i =$
$= \sum_{i=1}^{m} (R - \overline{W}_i) = R - \prod_{i=1}^{m} \overline{W}_i = R - 0 = R.$

15. Také věta odst. 14 platí jen za předpokladu, že R je normální prostor. Dokonce platí věta: *Nechť topologický prostor R má následující vlastnost: Každému konečnému systému $\mathfrak{U}$ v R otevřených množství pokrývajícímu R lze přiřaditi konečný systém $\mathfrak{F}$ v R uzavřených množství tak, že* 1° *$\mathfrak{F}$ pokrývá R;* 2° *každé $F \varepsilon \mathfrak{F}$ je částí některého $U \varepsilon \mathfrak{U}$. Pak R je normální prostor.*

Důkaz. Nechť $A \subset U \subset R$. Nechť A je v R uzavřené; nechť U je v R otevřené. Podle 11 stačí ukázati, že existuje v R otevřené V takové, že $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Dvě množství U a $R - A$ tvoří zřejmě konečný systém $\mathfrak{U}$ v R otevřených množství pokrývající R. Tedy existuje konečný systém $\mathfrak{F}$ v R uzavřených množství pokrývající R a takový, že pro každé $F \varepsilon \mathfrak{F}$ relace $AF \neq 0$ implikuje $F \subset U$. Nechť $F'_1, F'_2, \ldots, F'_h$ jsou ty elementy $F \varepsilon \mathfrak{F}$, pro něž $AF = 0$; nechť $F''_1, F''_2, \ldots, F''_k$ jsou ty elementy $F \varepsilon \mathfrak{F}$, pro něž $AF \neq 0$, tedy $F \subset U$. Položme $\Phi' = \sum_{i=1}^{h} F'_i$, $\Phi'' = \sum_{j=1}^{k} F''_j$. Množství Φ' a Φ'' jsou v R uzavřená, jest $A\Phi' = 0$, $\Phi'' \subset U$ a $\Phi' + \Phi'' = R$, neboť $\mathfrak{F}$ pokrývá R. Položme $V = R - \Phi'$, takže V je v R otevřené. Ježto $A\Phi' = 0$, jest $A \subset V$. Ježto $\Phi' + \Phi'' = R$, jest $V \subset \Phi''$. Ježto Φ'' je v R uzavřené, je $\overline{V} \subset \Phi''$. Avšak $\Phi'' \subset U$. Tedy $A \subset V \subset$ $\subset \overline{V} \subset U$.

[37]) K. Menger, *Dimensionstheorie*, str. 159—160 (Bemerkung).

[38]) Podle rukopisu Kuratowského *Topologie*. (Vyjde ve sbírce *Monografie Matematyczne* jako sv. 3.)

[39]) M, [4])

16. *Nechť R je metrický prostor. Pak R je normální prostor.*

Důkaz. Nechť A, B jsou v R uzavřená množství; nechť $AB = 0$. Máme ukázati, že existují v R otevřená U, V taková, že $A \subset U, B \subset V, UV = 0$. Ježto množství $R - B$ je v R otevřené a ježto $A \subset R - B$, podle 6 lze každému $a \varepsilon A$ přiřaditi $\eta_a > 0$ tak, že $K(a, 2\eta_a) \subset R - B$ (v. 7). Podobně každému $b \varepsilon B$ lze přiřaditi $\zeta_b > 0$ tak, že $K(b, 2\zeta_b) \subset R - A$. Položme

$$U = \sum_{a \varepsilon A} K(a, \eta_a); \quad V = \sum_{b \varepsilon B} K(b, \zeta_b).$$

Podle 5,1 jest $a \varepsilon K(a, \eta_a)$, tedy $A \subset U$; podobně $B \subset V$. Podle 8 a M, 1,8 množství U, V jsou otevřená v R. Zbývá ukázati, že $UV = 0$. Dokazujíce nepřímo předpokládejme, že $c \varepsilon UV$. Pak existují body $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$ takové, že $c \varepsilon K(a, \eta_a)$, $c \varepsilon K(b, \zeta_b)$, t. j. $\varrho(a, c) < \eta_a$, $\varrho(b, c) < \zeta_b$. Pro určitost nechť $\eta_a \geqq \zeta_b$. Podle 5,3 jest $\varrho(a, b) \leqq \varrho(a, c) + \varrho(b, c) < \eta_a + \zeta_b \leqq 2\eta_a$, t. j. $b \varepsilon K(a, 2\eta_a)$, což je spor, neboť $b \varepsilon B$, $K(a, 2\eta_a) \subset R - B$.

17. Nechť R je topologický prostor. Nechť $A \subset R$. Pravíme, že A je F_σ v R (G_δ v R), když existují v R uzavřená (v R otevřená) A_ν taková, že $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ $(A = \prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu)$.

A je G_δ v R (F_σ v R), když a jen když $R - A$ je F_σ v R (G_δ v R). Vskutku $A = \prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ znamená totéž jako $R - A = \sum_{\nu=1}^{\infty} (R - A_\nu)$.

Je-li A otevřené v R (uzavřené v R), pak A je G_δ v R (F_σ v R). Vskutku, když $A_\nu = A$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, jest $\prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = A$.

18. *Nechť R je normální prostor. Nechť $A \subset R$, $B \subset R$. Nechť A, B jsou F_σ v R. Nechť $A . \bar{B} = \bar{A} . B = 0$. Pak existují v R otevřená U, V taková, že $A \subset U$, $B \subset V$, $UV = 0$.*[40])

Důkaz. Ježto A, B jsou F_σ v R, existují v R uzavřená A_ν, B_ν taková, že $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$, $B = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu$, tedy $A_\nu \subset A$, $B_\nu \subset B_\nu$. Ježto $AB \subset A\bar{B} = 0$, jest $A_\nu B_\nu = 0$. Ježto A_ν, B_ν jsou uzavřená v normálním R a ježto $A_\nu B_\nu = 0$, existují v R otevřená G_ν, H_ν taková, že $A_\nu \subset G_\nu$, $B_\nu \subset H_\nu$, $G_\nu H_\nu = 0$. Ježto $A_\nu \subset A$, $A\bar{B} = 0$, jest $A_\nu \bar{B} = 0$; podobně $B_\nu \bar{A} = 0$. Tedy $A_\nu \subset G_\nu - \bar{B}$, $B_\nu \subset H_\nu - \bar{A}$. Množství $G_\nu - \bar{B} = G_\nu . (R - \bar{B})$ je podle M, 1,7 v R otevřené; ježto $A_\nu \subset G_\nu - \bar{B}$, podle 10 existuje v R otevřené P_ν takové, že

[40]) Věty 18, 19 a 27 pocházejí od Urysohna; l. c. sub [32]), str. 285—288.

$A_\nu \subset P_\nu \subset \overline{P}_\nu \subset G_\nu - \overline{B}$. Podobně existuje v R otevřené Q_ν takové, že $B_\nu \subset Q_\nu \subset \overline{Q}_\nu \subset H_\nu - \overline{A}$. Položme

$$U_1 = P_1, \ V_1 = Q_1 - \overline{P}_1; \ U_\nu = P_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Q}_\mu,$$

$$V_\nu = Q_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu} \overline{P}_\mu \ (\nu = 2, 3, \ldots); \quad U = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu, \ V = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu.$$

Ježto P_ν, Q_ν jsou otevřená v R, podle M, 1,3 a M, 1,7 také U_ν, V_ν jsou otevřená v R; tedy podle M, 1,8 také U, V jsou otevřená v R. Ježto $\overline{Q}_\mu \subset H_\mu - \overline{A} \subset R - \overline{A}$, $A_\nu \subset P_\nu$, $A_\nu \subset A \subset \overline{A}$, jest $A_\nu \subset U_\nu$; podobně $B_\nu \subset V_\nu$. Tedy $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \subset U$ a podobně $B \subset V$. Zbývá ukázati, že $UV = 0$, t. j., že pro $\mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots$ jest $U_\mu V_\nu = 0$. Nechť *předně* $\mu \leqq \nu$. Pak $U_\mu \subset P_\mu$, $V_\nu = Q_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu} \overline{P}_\mu \subset R - \overline{P}_\mu \subset$ $\subset R - P_\mu$, tedy $U_\mu V_\nu = 0$. Nechť *za druhé* $\mu > \nu$. Pak $V_\nu \subset Q_\nu$, $U_\mu = P_\mu - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \overline{Q}_\nu \subset R - \overline{Q}_\nu \subset R - Q_\nu$, tedy $U_\mu V_\nu = 0$.

19. *Nechť R je normální prostor. Nechť $S \subset R$. Nechť S je F_σ v R. Pak S je normální prostor.*[40])

Důkaz. Ježto S je F_σ v R, existují v R uzavřená S_ν taková, že $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$. Nechť A, B jsou uzavřená v S; nechť $AB = 0$. Máme ukázati, že existují v S otevřená U_0, V_0 taková, že $A \subset U_0$, $B \subset V_0$, $U_0 V_0 = 0$. Ježto A jest uzavřené v S, podle M, 6 jest $A = \overline{A}S$. Ježto $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$, je $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{A}S_\nu$. Ježto S_ν jsou uzavřená v R, podle M, 1,4 jsou $\overline{A}S_\nu$ uzavřená v R. Tedy A je F_σ v R; podobně B jest F_σ v R. Ježto $A = \overline{A}S$, $AB = 0$, $B \subset S$, jest $\overline{A}B = 0$; podobně $A\overline{B} = 0$. Tedy podle 18 existují v R otevřená U, V taková, že $A \subset U$, $B \subset V$, $UV = 0$. Položme $U_0 = US$, $V_0 = VS$, takže U_0, V_0 jsou[27]) otevřená v S a $U_0 V_0 = 0$. Ježto $A \subset S$, $B \subset S$, jest $A \subset U_0$, $B \subset V_0$.

20. *Nechť R je normální prostor. Nechť* dim $R \leqq n$. *Nechť množství $U_1, U_2, \ldots, U_m$ v konečném počtu jsou v R otevřená a pokrývají R. Pak lze každému U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ přiřaditi v R otevřené V_i tak, že 1⁰ $\overline{V}_i \subset U_i$ pro $1 \leqq i \leqq m$; 2⁰ množství $V_1, V_2, \ldots, V_m$ pokrývají R; 3⁰ systém množství $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{V}_m$ má řád $\leqq n$.*

Důkaz. Podle 3 existuje konečný systém $\mathfrak{W}$ v R otevřených množství takový, že 1⁰ $\mathfrak{W}$ pokrývá R; 2⁰ každé $W \varepsilon \mathfrak{W}$ je částí některého U_i $(1 \leqq i \leqq m)$; 3° systém $\mathfrak{W}$ má řád $\leqq n$. Nechť $W_1, W_2, \ldots, W_k$ jsou elementy systému $\mathfrak{W}$. Každému indexu j $(1 \leqq j \leqq k)$ přiřaďme index $\varphi(j) = i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ tak, aby $W_j \subset U_i$. Pro $1 \leqq i \leqq m$ položme $Z_i = \sum_j W_j$, kde j probíhá ty hodnoty $(1 \leqq j \leqq k)$, pro něž $\varphi(j) = i$. Zřejmě množství $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ jsou v R otevřená, tvoří systém řádu $\leqq n$, pokrývají R a jest $Z_i \subset U_i$ pro $1 \leqq i \leqq m$. Podle 14 určeme v R otevřená V_i $(1 \leqq i \leqq m)$ pokrývající R a taková, že $\overline{V}_i \subset Z_i$ pro $1 \leqq i \leqq m$. Zřejmě množství $V_1, V_2, \ldots, V_m$ mají žádané vlastnosti.

21. *Nechť $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ Nechť topologický prostor R má následující vlastnost: Každému konečnému systému $\mathfrak{U}$ v R otevřených množství pokrývajícímu R lze přiřaditi konečný systém $\mathfrak{F}$ v R uzavřených množství tak, že 1° $\mathfrak{F}$ pokrývá R; 2° každé $F \varepsilon \mathfrak{F}$ je částí některého $U \varepsilon \mathfrak{U}$; 3° $\mathfrak{F}$ má řád $\leqq n$. Pak R je normální prostor a* dim $R \leqq n$.

Důkaz. R je normální prostor podle 15. Zbývá ukázati, že každému $\mathfrak{U}$ lze přiřaditi konečný systém $\mathfrak{V}$ v R otevřených množství tak, že 1° $\mathfrak{V}$ pokrývá R; 2° každé $V \varepsilon \mathfrak{V}$ je částí některého $U \varepsilon \mathfrak{U}$; 3° $\mathfrak{V}$ má řád $\leqq n$. Danému $\mathfrak{U}$ lze podle předpokladu přiřaditi $\mathfrak{F}$. Nechť $F_1, F_2, \ldots, F_m$ jsou všecky elementy systému $\mathfrak{F}$. Každému F_i $(1 \leqq i \leqq m)$ můžeme přiřaditi $U_i \varepsilon \mathfrak{U}$ tak, že $F_i \subset U_i$. Podle 12 lze každému F_i $(1 \leqq i \leqq m)$ přiřaditi v R otevřené $W_i \supset F_i$ tak, že
$$\prod_{r=1}^{k} \overline{W}_{i_r} \neq 0 \text{ implikuje } \prod_{r=1}^{k} F_{i_r} \neq 0 \text{ pro každou kombinaci } (i_1, i_2, \ldots, i_k)$$
$(1 \leqq k \leqq m)$ indexů $1, 2, \ldots, m$. Lehko vidíme, že množství $V_i = U_i W_i$ tvoří žádaný systém $\mathfrak{V}$.

22. *Nechť R je normální prostor. Nechť $A \subset R$; nechť A jest uzavřené v R. Nechť* dim $A \leqq n$. *Nechť množství $U_1, U_2, \ldots, U_m$ v konečném počtu jsou v R otevřená a pokrývají A. Pak lze každému U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ přiřaditi v R otevřené V_i tak, že 1° $\overline{V}_i \subset U_i$; 2° množství $V_1, V_2, \ldots, V_m$ pokrývají A; 3° systém množství $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{V}_m$ má řád $\leqq n$.*

Důkaz. Nechť $U'_i = AU_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Množství $U'_1, U'_2, \ldots, U'_m$ jsou v A otevřená a pokrývají A. Podle 19 A jest normální prostor. Ježto dim $A \leqq n$, podle 20 lze každému U'_i $(1 \leqq i \leqq m)$ přiřaditi v A uzavřené F_i tak, že 1° $F_i \subset U'_i$ pro $1 \leqq i \leqq m$; 2° množství $F_1, F_2, \ldots, F_m$ pokrývají A; 3° systém $F_1, F_2, \ldots, F_m$ má řád $\leqq n$. Ježto F_i jsou uzavřená v A a ježto A jest uzavřené v R, jsou[27]) F_i uzavřená v R. Ježto $F_i \subset U'_i \subset U_i$, podle 10 existují v R otevřená Z_i taková, že $F_i \subset Z_i \subset \overline{Z}_i \subset U_i$. Ježto systém $F_1, F_2, \ldots, F_m$ má řád $\leqq n$, podle 12 existují v R otevřená W_i $(1 \leqq i \leqq m)$ taková, že 1° $F_i \subset W_i$, 2° systém $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_m$ má řád $\leqq n$.

Zřejmě množství $V_i = Z_i W_i$ $(1 \leq i \leq m)$ mají žádané vlastnosti.

23. *Nechť R je normální prostor. Nechť $R = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Nechť pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ množství A_ν jest uzavřené v R a má dimensi $\leq n$. Pak* dim $R \leq n$.

Důkaz. Nechť U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou v R otevřená množství pokrývající R. Stačí sestrojiti v R otevřená V_i $(1 \leqq i \leqq m)$ taková, že 1⁰ systém $V_1, V_2, \ldots, V_m$ pokrývá R a má řád $\leq n$, 2⁰ $V_i \subset U_i$.

Podle 22 existuje systém $\mathfrak{B}^1$ v R otevřených V_i^1 $(1 \leqq i \leqq m)$ takový, že 1⁰ $\overline{V}_i^1 \subset U_i$; 2⁰ $\mathfrak{B}^1$ pokrývá A_1; 3⁰ systém $\overline{\mathfrak{B}}^1$ množství $\overline{V}_i^1$ [41]) má řád $\leqq n$. Obecněji předpokládejme, že při určitém ν $(= 1, 2, \ldots)$ byl již sestrojen systém $\mathfrak{B}^\nu$ v R otevřených V_i^ν $(1 \leqq i \leqq m)$ takový, že 1⁰ $\mathfrak{B}^\nu$ pokrývá $\sum_{\lambda=1}^{\nu} \overline{A}_\lambda$; 2⁰ $\overline{V}_i^\nu \subset U_i$; 3⁰ $\overline{\mathfrak{B}}^\nu$ má řád $\leqq n$. Ukažme, že lze pak sestrojiti obdobný systém $\mathfrak{B}^{\nu+1}$.

Ježto $\overline{\mathfrak{B}}^\nu$ je konečný systém řádu $\leqq n$ v R uzavřených množství, podle 12 existují v R otevřená S_i $(1 \leqq i \leqq m)$ taková, že 1⁰ $\overline{V}_i^\nu \subset S_i$; 2⁰ systém $S_1, S_2, \ldots, S_m$ má řád $\leqq n$. Ježto $\overline{V}_i^\nu \subset U_i$, podle 10 existují v R otevřená T_i taková, že $\overline{V}_i^\nu \subset T_i \subset \overline{T}_i \subset U_i$. Položme $W_i = S_i T_i$. Systém $\mathfrak{W}$ množství $W_1, W_2, \ldots, W_m$ je konečný systém řádu $\leqq n$ v R otevřených množství a jest $\overline{V}_i^\nu \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset U_i$. Podle 10 existují v R otevřená P_i $(1 \leqq i \leqq m)$ taková, že $\overline{V}_i^\nu \subset P_i \subset \overline{P}_i \subset W_i$.

Pro $1 \leqq i \leqq m$ nechť: 1⁰ $\mathfrak{M}_i$ znamená systém dvou množství P_i a $R - \overline{V}_i^\nu$; 2⁰ $\mathfrak{N}_i$ znamená systém dvou množství W_i a $R - \overline{P}_i$. Zřejmě každým z $2m$ systémů $\mathfrak{M}_i$ a $\mathfrak{N}_i$ pokrývá R. Označme $\mathfrak{H}$ systém $m \,.\, 4^m$ v R otevřených množství tvaru $U_i \prod_{j=1}^{m} M_j \prod_{k=1}^{m} N_k$ $(1 \leqq i, j, k \leqq m$; $M_j \varepsilon \mathfrak{M}_j$; $N_k \varepsilon \mathfrak{N}_k)$. Pak $\mathfrak{H}$ je konečný R pokrývající systém v R otevřených množství. Ježto $A_{\nu+1}$ jest uzavřené v R a ježto dim $A_{\nu+1} \leqq n$, podle 22 existuje konečný systém $\mathfrak{Z}$ v R otevřených množství Z_r $(1 \leqq r \leqq t = m \,.\, 4^m)$ takový, že 1⁰ každé $\overline{Z}_r$ je částí některého elementu systému $\mathfrak{H}$; 2⁰ $\mathfrak{Z}$ pokrývá $A_{\nu+1}$; 3⁰ $\mathfrak{Z}$ má řád $\leqq n$. Z vlastnosti 1⁰ následuje podle definice systémů $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{H}$: : 4⁰ $\overline{Z}_r \overline{V}_i^\nu \neq 0$ implikuje $\overline{Z}_r \subset P_i$; 5⁰ $\overline{Z}_r \overline{P}_i \neq 0$ implikuje $\overline{Z}_r \subset W_i$.

Množství Z_r $(1 \leqq r \leqq t)$ rozdělme ve tři druhy: Z_r je *prvního* druhu, když existuje i $(1 \leqq i \leqq m)$ takové, že $\overline{Z}_r \overline{V}_i^\nu \neq 0$. Z_r je *druhého* druhu, když není prvního druhu a když existuje i $(1 \leqq i \leqq m)$

[41]) Obdobný význam má v dalším symbol $\overline{\mathfrak{B}}^\nu$.

takové, že $\overline{Z}_r\overline{P}_i \neq 0$. Z_r je *třetího* druhu, když není ani prvního ani druhého druhu.

Každé Z_r prvního druhu přiřaďme *každému* indexu i takovému, že $Z_r\overline{V}_i^\nu \neq 0$. Každé Z_r druhého druhu přiřaďme *jedinému* indexu i tak zvolenému, že $Z_r\overline{P}_i \neq 0$. Každé Z_r třetího druhu přiřaďme *jedinému* indexu i tak zvolenému, že $\overline{Z}_r \subset U_i$.[42])

Pro $1 \leqq i \leqq m$ položme $W'_i = V_i^\nu + \Sigma Z_r$, kde Z_r probíhá všechny indexu i přiřazené elementy prvního a druhého druhu systému $\mathfrak{Z}$. Zřejmě $V_i^\nu \subset W'_i$ a podle vlastnosti 5⁰ systému $\mathfrak{Z}$ jest $\overline{W}'_i \subset W_i$. Dále položme $V_i^{\nu+1} = W'_i + \Sigma Z_r$, kde Z_r probíhá všechny indexu i přiřazené elementy třetího druhu systému $\mathfrak{Z}$. Zřejmě $V_i^{\nu+1}$ jsou v R otevřená množství a jest $V_i^\nu \subset V_i^{\nu+1} \subset \overline{V}_i^{\nu+1} \subset U_i$. Ježto $\mathfrak{V}^\nu$ pokrývá $\sum_{\lambda=1}^{\nu} A_\lambda$ a ježto $\mathfrak{Z}$ pokrývá $A_{\nu+1}$, zřejmě systém $\mathfrak{V}^{\nu+1}$ množství $V_1^{\nu+1}, V_2^{\nu+1}, \ldots, V_m^{\nu+1}$ pokrývá $\sum_{\lambda=1}^{\nu+1} A_\lambda$.

Ještě jest ukázati, že $\mathfrak{V}^{\nu+1}$ má řád $\leqq n$, t. j. že každý bod $a \,\varepsilon\, R$ jest obsažen nejvýš v $n + 1$ elementech systému $\mathfrak{V}^{\nu+1}$. Rozeznávejme dva případy. *Předně* nechť existuje index j $(1 \leqq j \leqq m)$ takový, že $a \,\varepsilon\, \overline{P}_j$. Pak $a \,\varepsilon\, Z_r$ implikuje, že $Z_r\overline{P}_j \neq 0$, t. j. že Z_r není třetího druhu. Tedy $a \,\varepsilon\, V_i^{\nu+1}$ implikuje $a \,\varepsilon\, W'_i \subset \subset W_i$. Tedy bod a jest obsažen nejvýš v tolika $V_i^{\nu+1}$, v kolika W_i; ježto systém $\mathfrak{W}$ jest řádu $\leqq n$, jest bod a nejvýš v $n + 1$ z množství $V_i^{\nu+1}$. *Za druhé* nechť pro žádný index i není $a \,\varepsilon\, \overline{P}_i$. Podle vlastnosti 4⁰ systému $\mathfrak{Z}$ relace $a \,\varepsilon\, Z_r$ implikuje $Z_r\overline{V}_i^\nu = 0$, takže jednak bod a není v žádném V_i^ν, jednak bod a není v žádném Z_r prvního druhu. Tedy $a \,\varepsilon\, W'_i$ implikuje $a \,\varepsilon\, Z_r$, kde Z_r je druhého druhu a je přiřazeno indexu i. Ježto každé Z_r druhého druhu je přiřazeno jedinému i, je bod a nejvýš v tolika W'_i, v kolika Z_r druhého druhu jest. Podobně a je nejvýš v tolika $V_i^{\nu+1} - W'_i$, v kolika Z_r třetího druhu jest. Tedy bod a jest nejvýš v tolika $V_i^{\nu+1}$, v kolika Z_r; ježto systém $\mathfrak{Z}$ jest řádu $\leqq n$, jest bod a nejvýš v $n + 1$ z množství $V_i^{\nu+1}$.

Tím je dokázáno, že lze rekurentně určiti systémy $\mathfrak{V}^\nu$ $(\nu = = 1, 2, 3, \ldots)$ v R otevřených V_i^ν $(1 \leqq i \leqq m)$ tak, že: 1⁰ $V_i^\nu \subset V_i^{\nu+1}$; 2⁰ $\overline{V}_i^\nu \subset U_i$; 3⁰ $\mathfrak{V}^\nu$ pokrývá A_ν; 4⁰ $\mathfrak{V}^\nu$ má řád $\leqq n$.

Položme $V_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_i^\nu$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Pak V_i jsou v R otevřená množství. Podle 2⁰ jest $V_i \subset U_i$. Ježto $R = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$, podle 3⁰ systém

---

[42]) To lze podle definice $\mathfrak{H}$ a podle vlastnosti 1⁰ systému $\mathfrak{Z}$.

$\mathfrak{V}$ množství $V_1, V_2, \ldots, V_m$ pokrývá R. Zbývá ukázati, že $\mathfrak{V}$ jest řádu $\leqq n$. V opačném případě by bylo lze udati $n+2$ různé indexy $i_1, i_2, \ldots, i_{n+2}$ a bod $a \varepsilon R$ tak, že $a \varepsilon V_{i_s}$ $(i \leqq s \leqq n+2)$. Podle 1° by existoval index ν takový, že $a \varepsilon V_{i_s}^{\nu}$ $(1 \leqq s \leqq n+2)$. To jest spor proti 4°.

24. *Nechť R jest normální prostor. Nechť pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ množství A_ν jest F_σ v R a má dimensi $\leqq n$. Pak* $\dim \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \leqq n$.

Důkaz. Nechť $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Ježto A_ν jsou F_σ v R, existují v R uzavřená $B_{\nu\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ taková, že $A_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\nu\mu}$. Ježto $B_{\nu\mu} \subset A_\nu$ a ježto $B_{\nu\mu}$ jest uzavřené v R, jest $B_{\nu\mu}$ uzavřené v A_ν. Ježto $\dim A_\nu \leqq n$, podle 4 jest $\dim B_{\nu\mu} \leqq n$. Dvojnou posloupnost $B_{\nu\mu}$ $(\nu, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$ uspořádejme[43]) v jednoduchou posloupnost B_λ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak jest $S = \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda$, množství B_λ jsou uzavřená v R, tedy v S a jest $\dim B_\lambda \leqq n$. S jest F_σ v R, takže S jest normální prostor podle 19. Tedy $\dim S \leqq n$ podle 23.

25. Nechť R jest topologický prostor. Pravíme, že R jest *dokonale normální*, když: 1° R jest normální; 2° každé v R otevřené množství jest F_σ v R. Podmínka 2° dá se také takto vysloviti: každé v R uzavřené množství jest G_δ v R.

26. *Nechť R jest metrický prostor. Pak R jest dokonale normální prostor.*

Důkaz. Podle 16 stačí ukázati, že každé v R uzavřené množství jest G_δ v R. Nechť tedy A jest v R uzavřené množství; zřejmě můžeme předpokládati $A \neq 0$. Nechť (v. 7) $U_\nu = \mathrm{K}\left(A, \frac{1}{\nu}\right)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Množství U_ν podle 8 jsou v R otevřená, takže stačí ukázati, že $A = \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$. Zřejmě $A \subset \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$, takže zbývá ukázati, že ke každému $x \varepsilon R - A$ existuje ν takové, že $x \varepsilon R - U_\nu$. Ježto $R - A$ jest v R otevřené, existuje $\eta > 0$ takové, že $y \varepsilon R$, $\varrho(x, y) < \eta$ implikuje $y \varepsilon R - A$. Při vhodném ν bude $\frac{1}{\nu} < \eta$, tedy $x \varepsilon R - U_\nu$ podle definice U_ν.

27. *Nechť R jest dokonale normální prostor. Nechť $S \subset R$. Pak S jest dokonale normální prostor.*[40])

Důkaz. Nechť Z jest otevřené v S; pak existuje v R otevřené G takové, že $Z = SG$. Ježto R je dokonale normální, existují v R

[43]) Třeba diagonálně: $B_{11} = B_1$; $B_{21} = B_2$, $B_{12} = B_3$; $B_{31} = B_4$, $B_{22} = B_5$, $B_{13} = B_6$; $B_{41} = B_7, \ldots$

uzavřená F_ν taková, že $G = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$. Klademe-li $\Phi_\nu = S \,.\, F_\nu$, jest $Z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu$ a množství Φ_ν jsou uzavřená v S. Tedy každé v S otevřené množství jest F_σ v R. Zbývá ukázati, že S jest normální prostor. Nechť tedy A, B jsou uzavřená v S a nechť $A \,.\, B = 0$. Máme ukázati, že existují v S otevřená U', V' taková, že $A \subset U'$, $B \subset V'$, $U' \,.\, V' = 0$. Ježto A, B jsou uzavřená v S, podle M, 6 jest $A = \bar{A} \,.\, S$, $B = \bar{B} \,.\, S$. Ježto $A \,.\, B = 0$, jest $\bar{A} \,.\, \bar{B} \,.\, S = 0$. Klademe-li $A_0 = \bar{A} - \bar{B}$, $B_0 = \bar{B} - \bar{A}$, vidíme lehko, že $A \subset A_0$, $B \subset B_0$. Ježto $A_0 \subset \bar{A}$, podle M, 4,2 jest $\bar{A}_0 \subset \bar{A}$, tedy $\bar{A}_0 B_0 = 0$; podobně $A_0 \bar{B}_0 = 0$. Ježto R jest dokonale normální, $R - \bar{B}$ jest F_σ v R; z toho následuje snadno, že také $A_0 = \bar{A}\,(R - \bar{B})$ jest F_σ v R; podobně B_0 jest F_σ v R. Ježto $A_0 \bar{B}_0 = \bar{A}_0 B_0 = 0$, podle 18 existují v R otevřená U, V taková, že $A_0 \subset U$, $B_0 \subset V$ (tedy $A \subset U$, $B \subset V \subset UV = 0$. Stačí položiti $U' = S \,.\, U$, $V' = S \,.\, V$.

28. *Nechť R jest dokonale normální prostor. Nechť* dim $R \leqq n$. *Nechť $S \subset R$. Pak* dim $S \leqq n$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{U}'$ jest konečný systém v S otevřených množství pokrývající S. Máme ukázati, že existuje konečný systém $\mathfrak{V}'$ v S otevřených množství takový, že 1° $\mathfrak{V}'$ pokrývá S; 2° každé $V' \varepsilon \mathfrak{V}'$ jest částí některého $U' \varepsilon \mathfrak{U}'$; 3° $\mathfrak{V}'$ má řád $\leqq n$. Nechť U'_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou elementy $\mathfrak{U}'$. Pak existují v R otevřená U_i taková, že $U'_i = S \,.\, U_i$. Položme $A = \sum_{i=1}^{m} U_i$. Množství A jest otevřené v R; ježto R jest dokonale normální, A jest F_σ v R. Tedy existují v R uzavřená $A_\nu (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ taková, že $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Ježto dim $R \leqq n$, podle 4 jest dim $A_\nu \leqq n$. Tedy podle 24 jest dim $A \leqq n$. Ježto množství $U_1, U_2, \ldots, U_m$ pokrývají A, existuje konečný systém $\mathfrak{V}$ v A uzavřených množství takový, že 1° $\mathfrak{V}$ pokrývá A; 2° každé $V \varepsilon \mathfrak{V}$ jest částí některého U_i; 3° $\mathfrak{V}$ má řád $\leqq n$. Žádaný systém $\mathfrak{V}'$ obdržíme, když každé $V \varepsilon \mathfrak{V}$ nahradíme množstvím $V' = S \,.\, V$.

*

Contribution à la théorie de la dimension.

(Extrait de l'article précédent.)

Définition. R étant un espace topologique, dim $R \leqq n$ $(= -1, 0, 1, 2, \ldots)$ signifie: A chaque famille finie $\mathfrak{U}$ d'ensembles ouverts recouvrant R on peut attacher une famille finie $\mathfrak{V}$ d'ensembles ouverts telle que: 1° $\mathfrak{V}$ recouvre R; 2° chaque V $\varepsilon \mathfrak{V}$ fait partie d'un $U \varepsilon \mathfrak{U}$; 3° l'ordre[1]) de $\mathfrak{V}$ est $\leqq n$.

[1]) $\mathfrak{V}$ étant une famille de sous-ensembles de R, l'ordre de $\mathfrak{V}$ est $\leqq n$, si la partie commune à $n + 2$ éléments quelconques de $\mathfrak{V}$ est vide.

Théorème I. Soit R un espace normal. Soit $R = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$, $A_\nu = \bar{A}_\nu$, dim $A_\nu \leq n$. Alors dim $R \leq n$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ une famille finie d'ensembles ouverts recouvrant R. On construit par récurrence des familles $\mathfrak{V}^\nu = \{V_i^\nu\}$ $(1 \leqq i \leqq m;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles ouverts telles que: 1° $\bar{V}_i^\nu \subset U_i$; 2° $V_i^\nu \subset V_i^{\nu+1}$; 3° $\mathfrak{V}^\nu$ recouvre A_ν; 4° l'ordre de $\mathfrak{V}^\nu$ est $\leqq n$. Les ensembles $V_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_i^\nu \subset U_i$ recouvrent R et on voit sans peine que l'ordre de $\{V_i\}$ est $\leqq n$. On peut supposer que $A_1 = 0$; alors $V_i^1 = 0$. En supposant la famille $\mathfrak{V}^\nu$ construite. on construit $\mathfrak{V}^{\nu+1}$ comme il suit: Soient W_i, P_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des ensembles ouverts tels que: 1° $\bar{V}_i^\nu \subset P_i \subset \bar{P}_i \subset$ $\subset W_i \subset \bar{W}_i \subset U_i$; 2° l'ordre de $\mathfrak{W} = \{W_i\}$ est $\leqq n$. Soit $\mathfrak{Z} = \{Z_r\}$ une famille finie d'ordre $\leqq n$ d'ensembles ouverts recouvrant $A_{\nu+1}$ et telle que 1° $Z_r \bar{V}_i^\nu \neq 0$ entraîne $Z_r \subset P_i$; 2° $Z_r \bar{P}_i \neq 0$ entraîne $Z_r \subset W_i$. Z_r est *de première espèce* s'il existe un i tel que $Z_r \bar{V}_i^\nu \neq 0$; chaque Z_r de première espèce soit attaché à *chaque* i tel que $Z_r \bar{V}_i^\nu \neq 0$. Z_r est de *deuxième espèce* si $Z_r \bar{V}_i^\nu = 0$ pour chaque i; chaque Z_r de deuxième espèce soit attaché à *une seule valeur de i* choisie de manière que $\bar{Z}_r \subset U_i$ et, *si cella est possible*, aussi que $Z_r \bar{P}_i \neq 0$. Posons $V_i^{\nu+1} = V_i^\nu + \Sigma Z_r$, r parcourant toutes les valeurs telles que Z_r est attaché à l'indice i.

Théorème II. Soit R un espace parfaitement normal.[2]) Soit dim $R \leqq n$. Soit $S \subset R$. Alors dim $S \leqq n$.

Démonstration. Soient U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des ensembles ouverts recouvrant S. L'ensemble $A = \sum_{i=1}^{m} U_i$ étant un F_σ dans R, on déduit facilement du théorème I que dim $A \leqq n$. Il existe donc des ensembles ouverts V_i tels que: 1° $V_i \subset U_i$; 2° $\sum_{i=1}^{m} V_i = A \supset S$; 3° l'ordre de $\{V_i\}$ est $\leqq n$.

Problème. La définition de la dimension ici adoptée est-elle équivalente, pour tous les espaces parfaitement normaux, à celle adoptée dans mon Mémoire *Sur la dimension des espaces parfaitement normaux* (Bull. intern. de l'Acad. des Sc. de Bohème, 1932)?[3])

---

[2]) Ceci signifie que 1° R est normal; 2° chaque ensemble ouvert est un F_σ. On sait que chaque espace métrisable est parfaitement normal.

[3]) V. aussi ma Note *Sur la théorie de la dimension* (C. R., t. 193, 1931, p. 976).