Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 2, 220--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121887

Úlohy.

a) Z mathematiky.

Úloha 17.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^2 - xy + 2y + 3 = 0$$
$$xy - y^2 + 4x + 6 = 0.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Úloha 18.

V kterých mezích jsou obsaženy výrazy

a) $\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$

Jaký jest toho význam geometrický? *R.*

Úloha 19.

Stanovte veličiny x_n, y_n dané rekurrentními rovnicemi

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \sin^2 \alpha$$
$$y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1} \cos^2 \alpha,$$

známo-li, že $x_0 = 0$, $y_0 = \cos \alpha$. Dr. *Marian Haas.*

Úloha 20.

Který kužel má při daném obsahu nejmenší povrch?

Týž.

Úloha 21.

Kružnici o poloměru $\varrho = 25\,cm$ *opsán jest rovnostranný mnohoúhelník, jehož strana měří* $a = 9\,cm$. *Kolik čítá stran a které má úhly i obsah?* *Týž.*

Úloha 22.

Pětiúhelník z tečen má strany 9, 15, 21, 22, 13. *Který je poloměr vepsané kružnice?* *Týž.*

Úloha 23.

Danému čtyřúhelníku opsati čtyřúhelník, jinému danému čtyřúhelníku podobný. *Jaromír Pilnáček.*

Úloha 24.

Opsána-li danému trojúhelníku soustava trojúhelníků jemu podobných, dokázati, že všechny tyto opsané trojúhelníky mají společný střed kružnic opsaných, ležící v průsečíku výšek daného trojúhelníka. Týž.

Úloha 25.

Nazveme-li a', b', c' rozdíly úseků, jež výšky tvoří na stranách trojúhelníka (se zřetelem na znaménka!) dokázati jest, že

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Dr. Karel Čupr.

Úloha 26.

Sestrojte kružnici o daném poloměru, která prochází daným bodem a jiné dva dané body odděluje harmonicky.

Josef Papřok.

Úloha 27.

Sestrojte kružnici dotýkající se dvou daných kružnic, tak aby tětiva, spojující body dotyčné, měla danou délku. Týž.

Úloha 28.

Sestrojiti trojúhelník, dána-li strana c, úhel γ a poměr λ, ve kterém průsek výšek dělí výšku příslušnou ke straně c! Vypočísti strany a, b! (na př. $\gamma = 60^0$, $\lambda = \pm \frac{1}{4}$).

Dr. Josef Tomáš.

Úloha 29.

Ke dvěma kruhům zevně se dotýkajícím vedena úsečka společné vnější tangenty mezi body dotyčnými. Otáčí-li se obrazec takto sestrojený okolo přímky středné, který jest povrch rotačního tělesa, jsou-li povrchy koulí k_1, k_2? Týž.

Úloha 30.

Vedeme-li z nějakého bodu mimo kruh, ale v rovině jeho ležícího, tangenty až k bodům dotyčným, jest dokázati, že povrch tělesa vzniklého rotací onoho obrazce kol osy souměrnosti rovná se součtu povrchů všech koulí do rotačního tělesa vepsaných tak, že středy jejich leží na ose rotační a vždy dvě koule sousední zevně se dotýkají. Který jest povrch a krychlový obsah tělesa, dán-li poloměr a vzdálenost středu kruhu od průseku tečen. Týž.

Úloha 31.

Které jest geometrické místo průseků tečen, vedených k ellipse koncovými body a společným vrcholem dvou tětiv ohnisky procházejících? Týž.

Úloha 32.

Které jest geometrické místo všech pólů, majících společné poláry vzhledem k ellipse a rovnoosé hyperbole, jejíž asymptotami jsou osy souřadnic? Které podmínce musí vyhovovati poloosy obou křivek, má-li býti úloha možna? Společný znak všech těch polár? Týž.

Úloha 33.

Dokažte o ellipse větu: Kružnice nad průvodičem dotýká se kružnice nad hlavní osou. Jak mění se znění této věty při hyperbole a parabole? Prof. *Jar. Doležal.*

b) Z deskriptivní geometrie.

Úloha 1.

Trojúhelníkem abc rovnoběžným ku půdorysně proložte krychli, jejíž nejnižší vrchol jest v půdorysně a zobrazte průměty její. Prof. *Jar. Doležal.*

Úloha 2.

Zobrazte průměty kružnice, dána-li půdorysná stopa P^ϱ *roviny její jakož i půdorys* S_1 *jejího středu a půdorysy* a_1, b_1 *dvou jejích bodů!* Týž.

Úloha 3.

Trojúhelník abc obsažený v rovině ϱ *osvětlete geometrálně, aby stín jeho na půdorysnu měl daný tvar! (na př* $\triangle$ *rovnostranný).* Týž.

c) Z fysiky.

Úloha 1.

Dráhy dvou v přímkách se pohybujících lodí se protínají v pravém úhlu; prvá z lodí, pohybující se rychlostí 13 mil za hodinu, nachází se v jistém okamžiku ve vzdálenosti 15 mil od bodu průseku, druhá, jejíž rychlost obnáší 20 mil za hodinu, jest v témž okamžiku vzdálena o 10 mil od téhož bodu. Pohybují-li se obě směrem k bodu, v němž se dráhy jejich protínají, jest nalézti nejmenší vzdálenost obou, a dobu, v níž nastane.

Red.

Úloha 2.

Jest nalézti úhel, v němž musí býti těleso šikmým směrem vrženo, tak aby stihlo jiný bod daný, je-li rychlost vrhu C. Odpor vzduchu nebere se v počet. Red.

Úloha 3.

Žebřík (homogenní tyč) dané délky l a váhy W stojí na drsné horizontální půdě a opírá se o hladkou vertikální stěnu tvoře daný úhel α s horizontálou. Má se nalézti reakce v bodech stykových na stěně a půdě za předpokladu, že váha žebříku je rovnocenná s jedinou silou W působící ve středu jeho délky. Red.

Úloha 4.

Válcovitá tyč zatížená na jednom konci pluje ve vodě; jest stanoviti podmínky stálé rovnováhy. Může-li tyč plovati tak, že do polovice své délky je ponořena a to v libovolném úhlu s horizontálou, jest dokázati, že přidaná zatěžovací váha rovná se váze tyče. Red.

Úloha 5.

Archimedes zvážil Hieronovu korunu a (na vzduchu) stejně s ní těžký kus zlata a stříbra pod vodou, a stanovil, že koruna ztratila $\frac{1}{14}$ své váhy, zlato $\frac{4}{77}$ a stříbro $\frac{2}{21}$. Ve kterém poměru bylo zlato a stříbro smíšeno v koruně? Red.

Úloha 6.

Jakési tuhé těleso váží 29·9 grammů v kapalině hustoty 1·210 za 10° C, 30·4 grammů v téže kapalině za 95° C, když hustota její je 1·170. Jest vypočítati koefficient objemové roztažlivosti onoho tělesa, které váží ve vzduchu 45·6 grammů. Red.

Úloha 7.

Mosazné konkávní zrcadlo (sférické) jest postaveno tak, že jeho osa Ox je horizontální. Jakýmsi zařízením můžeme uvésti je na teplotu vyšší, při čemž jeho vrchol O zůstane na svém místě. Ve vzdálenosti a od vrcholu větší než je dálka ohnisková a nezměnitelné, nachází se reálný bod A. Nazvemež vzdálenost jeho reálného obrazu B od vrcholu b_0, je-li teplota *zrcadla* 0^0 *C*, b_t *je-li teplota jeho* $+ t^0$. *Jak závisí pošinutí obrazu* $\delta = b_t - b_0$ *od teploty? Zveme-li pošinutí* δ *kladným, když se obraz vzdaluje od vrcholu zrcadla, která podmínka musí být splněna, má-li* δ *býti vždy kladným (při zahřátí zrcadla)? Jest diskutovati podmínky možnosti a ukázati, že zařízení popsané může býti velmi citlivým thermoskopem. Applikace numerická. Ohnisková vzdálenost za teploty* 0^0 *C buď* $f_0 = 50$ *cm, a lineární koefficient roztažlivosti mosazi* $\alpha = 0{\cdot}00002$; *jaké jest pošinutí* δ *obrazu, stoupne-li teplota na* $t = 100^0$, *je-li* $a = 51$ *cm?* Z franc. otázek maturitních, Toulouse 1902. *Red.*

Úloha 8.

Dva magnety A a B kývají v témž poli magnetickém tak, že vykoná A 15 kyvů za minutu, B pak 10 kyvů za minutu. Magnet A vykoná v jiném poli 5 kyvů za minutu, magnet B v poli třetím 20 kyvů za minutu. Jest nalézti poměr intensit druhého a třetího pole a poměr magnetických momentů obou magnetů. *Red.*

Úloha 9.

Drát odporu r spojuje A a B, dva body proudového kruhu, jehož ostatní odpor je R. Spojíme-li A a B dalšími $n - 1$ *dráty, z nichž každý má odpor r, aniž by se jiná změna v ostatním kruhu stala, bude teplo ve všech n drátech mezi A a B dohromady vznikající větší nebo menší než ono, v prvém drátě původně vznikající dle toho, je-li r větší či menší než* $R\sqrt{n}$. *Tuto větu jest dokázati.* *Red.*

Úloha 10.

Severní pól magnetu (jehož jižní pól se nachází ve velmi veliké vzdálenosti), jenž obsahuje 250 jednotek náboje, jest umístěn na ose závitu kruhového o poloměru 40 cm, a odporu 10^{-3} *Ohm ve vzdálenosti 20 cm od jeho středu. Jest najíti střední hodnotu proudu vzniklého v závitu, když pól během 1 vteřiny se vzdálí do vzdálenosti 200 cm od středu.* *Red.*