Matyáš Lerch

O povaze funkce $\sum_{m=1}^{\infty} u^m e^{-2\sqrt{am}}$ v okolí bodu $u = 1$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 2, 121–133

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121886

O povaze funkce $\sum\limits_1^\infty u^m e^{-2\sqrt{am}}$ v okolí bodu $u = 1$.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

Svého času*) ukázal jsem, že analytická funkce komplexní proměnné u, definovaná uvnitř kruhu $|u| \leqq 1$ analytickým prvkem

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^m e^{-2\sqrt{am}}$$

(kde a značí reálnou kladnou veličinu), chová se pravidelně v celé rovině (u) až na řez vedený podél osy reálné od $u = 1$ do $u = +\infty$; a také bylo ukázáno, že jediným opravdu singulárním bodem funkce na řezu položeným jest počáteční bod řezu, t. j. $u = 1$.

To bylo v *Monatshefte* VIII. na str. 379 nad veškeru pochybnost zjištěno. Avšak další otázka, týkající se povahy funkce v okolí zvláštního místa $u = 1$, o níž tam jednáno na str. 379 a 380, nebyla mnou správně řešena, neboť jsem přehlédl okolnost, že funkce

$$(\log u)^{\frac{3}{2}}$$

jest v okolí bodu $u = 1$ dvojznačnou.

Toto nedopatření jsem si uvědomil přehlížeje korrekturu českého zpracování p. Čupra, i bylo pak na mé přání vadné místo vynecháno. Slíbené tehdy správné zpracování otázky — provedl jsem je na základě vlastností funkce

$$\sum_1^\infty \sqrt{m}\, e^{mz},$$

*) Viz Časopis roč. XXXVII., str. 3 a násl.. aneb *Monatshefte* roč. VIII., str. 377 (1897), *Acta mathematica*, sv. 22 (1899) str. 371. Citát v Časop. XXXVII. str. 1 má zníti: Math. Annalen svaz. XXI. jako na str. 3.

jež vycházejí jako jednoduché důsledky theorie Malmsténovských řad mnou před lety pěstěné — podávám nyní v jiné, zjednodušené formě.

1. Vlastní otázce předesílám odvození detailu z počtu integrálního, kterého budu v hlavní úvaze potřebovati.

Jde o integrál

$$J = \int_0^\infty e^{-vx+\alpha\sqrt{x}}\, dx,$$

jenž existuje, je-li komplexní veličina v ve své reálné části kladnou, a to pro všecka komplexní α. Maclaurinovský rozvoj této funkce J proměnné α jest

$$J = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^\infty e^{-vx} x^{\frac{n}{2}}\, dx.$$

Dle známého vzorce

$$\int_0^\infty e^{-vx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{v^s}$$

jest pak

$$\int_0^\infty e^{-vx} x^{\frac{n}{2}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{v^{\frac{n}{2}+1}},$$

takže oddělíme-li v nalezené řadě členy sudého n od ostatních, vyjde

$$J = \sum_{m=0}^\infty \frac{\alpha^{2m}}{(2m)!} \frac{m!}{v^{m+1}} + \sum_{m=1}^\infty \frac{\alpha^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{v^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Tu pak jest

$$\frac{m!}{(2m)!} = \frac{1}{2^m . 1 . 3 . 5 \ldots (2m-1)},$$

$$\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(2m-1)!} = \frac{\sqrt{\pi} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} \ldots \frac{2m-1}{2}}{(2m-1)!}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}(m-1)!},$$

takže bude

$$J = \frac{1}{v} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2m-1)} \frac{\alpha^{2m}}{2^m v^{m+1}}$$
$$+ \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2v^{\frac{3}{2}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2m-2}}{2^{2m-2}(m-1)!\, v^{m-1}}.$$

Druhá řada má hodnotu

$$e^{\frac{\alpha^2}{4v}},$$

první řadu lze psáti ve tvaru

$$\frac{1}{v}\,\varphi\left(\frac{\alpha^2}{4v}\right),$$

zavede-li se označení

$$\varphi(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}}$$
$$= \frac{\omega}{\frac{1}{2}} + \frac{\omega^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} + \frac{\omega^3}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}} + \cdots \quad (1)$$

Při tomto označení máme pak hledaný vzorec pomocný

$$\int_0^{\infty} e^{-vx+\alpha\sqrt{x}}\,dx = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2v\sqrt{v}}\, e^{\frac{\alpha^2}{4v}} + \frac{1+\varphi\left(\frac{\alpha^2}{4v}\right)}{v}. \quad (2)$$

Transcendenta $\varphi(\omega)$ je — mimochodem poznamenáno — zvláštním případem funkce již Eulerovi známé

$$P(s,\,\omega) = \int_0^{\omega} e^{-x}\,x^{s-1}\,dx;$$

a sice jest dle Eulerovy identity začasté různým autorům připisované

$$P(s,\,\omega) = e^{-\omega}\left[\frac{\omega^s}{s} + \frac{\omega^{s+1}}{s(s+1)} + \frac{\omega^{s+2}}{s(s+1)(s+2)} + \cdots\right],$$

takže dle toho

$$\varphi(\omega) = \sqrt{\omega}\,e^{\omega}\,P(\tfrac{1}{2},\,\omega).$$

2. Zaveďme nyní na místě u veličinu exponenciální

$$u = e^{-v},$$

a pišme α za $2\sqrt{a}$, takže původním supposicím odpovídá případ kladného reálného α. Máme pak uvažovati funkci danou řadou

$$F(\alpha, v) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-mv-\alpha\sqrt{m}}, \tag{3}$$

která konverguje, pokud v je kladné ve své části reálné, a tedy definuje analytickou funkci proměnné v, pravidelnou po pravé straně pomyslné osy v rovině (v).

Abychom si zjednali nové vyjádření této funkce, uvažujme funkci reálné proměnné ξ, $0 \leqq \xi \leqq 1$,

$$\Phi(\xi) = \sum_{0}^{\infty} e^{-(m+\xi)v - \alpha\sqrt{m+\xi}}, \tag{4}$$

a sice jest

$$\Phi(1) = F(\alpha, v), \quad \Phi(0) = 1 + F(\alpha, v),$$

tedy

$$\frac{\Phi(0) + \Phi(1)}{2} = \frac{1}{2} + F(\alpha, v).$$

Funkce $\Phi(\xi)$ je tvaru

$$\Phi(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m + \xi),$$

$$f(x) = e^{-vx-\alpha\sqrt{x}},$$

a ustanovíme její rozvoj trigonometrický, jejž hned předpokládáme ve tvaru komplexním

$$\Phi(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{2\nu\xi\pi i}, \quad 0 < \xi < 1. \tag{5}$$

Součinitelé A_ν jsou stanoveni vzorcem

$$A_\nu = \int_0^1 \Phi(\xi)\, e^{-2\nu\pi i\xi} d\xi,$$

tedy v našem případě

$$A_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 f(m + \xi)\, e^{-2\nu\pi i(m+\xi)}\, d\xi,$$

$$A_\nu = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-2\nu\pi i x}\, dx,$$

a po dosazení hodnoty za $f(x)$

$$A_\nu = \int_0^\infty e^{-(v+2\nu\pi i)x - \alpha\sqrt{x}}\,dx.$$

Hodnota tohoto integrálu jest určena vzorcem (2), ježto zde parametr $v + 2\nu\pi i$ má kladnou část reálnou, a tedy bude

$$A_\nu = \frac{1}{v+2\nu\pi i} + \frac{\varphi\left(\frac{\alpha^2}{4(v+2\nu\pi i)}\right)}{v+2\nu\pi i} \tag{6}$$

$$- \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2(v+2\nu\pi i)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\alpha^2}{4(v+2\nu\pi i)}};$$

pro přesný důkaz stačí si vzpomenouti věty Poissonem dokázané, ale teprve později v té formě vyslovené, že Fourierova řada

$$A_0 + (A_1 e^{2\xi\pi i} + A_{-1} e^{-2\xi\pi i}) + \ldots$$

representuje funkci $\Phi(\xi)$ aneb hodnotu

$$\frac{\Phi(\xi+0) + \Phi(\xi-0)}{2},$$

jakmile konverguje na místě ξ. V našem případě máme

$$A_\nu = \frac{1}{v+2\nu\pi i} + c_\nu,$$

kde řada absolutních hodnot

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_\nu|$$

konverguje; ježto pak

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\nu\xi\pi i}}{v+2\nu\pi i}$$

konverguje za podmínky $0 < \xi < 1$, tedy je konvergence řady (5) zajištěna. Je pak dle známé věty

$$\frac{\Phi(0)+\Phi(1)}{2} = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu + A_{-\nu}) \tag{7}$$

a ježto

$$\frac{1}{v} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{v+2\nu\pi i} + \frac{1}{v-2\nu\pi i}\right) = \frac{1}{2i}\, cotg\, \frac{v}{2i}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^v+1}{e^v-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^v-1},$$

tedy dle (6) a (7)

$$\frac{\Phi(0)+\Phi(1)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^v-1}+\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi\left(\dfrac{\frac{1}{4}\alpha^2}{v+2\nu\pi i}\right)}{v+2\nu\pi i}$$

$$-\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{v+2\nu\pi i}}}{(v+2\nu\pi i)^{\frac{3}{2}}}.$$

Porovnáme-li tento výsledek s hořejším

$$\frac{\Phi(0)+\Phi(1)}{2}=\frac{1}{2}+F(\alpha,v),$$

vychází vztah

$$F(\alpha,v)=M(v)-N(v), \tag{8}$$

v němž

$$M(v)=\frac{1}{e^v-1}+\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi\left(\dfrac{\frac{1}{4}\alpha^2}{v+2\nu\pi i}\right)}{v+2\nu\pi i}, \tag{8¹}$$

$$N(v)=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{v+2\nu\pi i}}}{(v+2\nu\pi i)^{\frac{3}{2}}}, \tag{8²}$$

a kterým jest problém plně řešen, neboť řady M a N jsou absolutně konvergentní; M definuje funkci jednoznačnou, která má *podstatná* místa zvláštní v bodech $v=0$, $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$, $\pm 6\pi i, \ldots$, ale mimo ně se chová pravidelně. Naproti tomu má sice funkce N také na všech jiných místech povahu celistvé funkce, ale není jednoznačnou, nýbrž má nekonečně mnoho větví, které na místech zvláštních $v=-2\nu\pi i$ jsou po dvou spojeny.

Rovnicemi (8) — (8²) tedy nejen dokázána možnost propagace funkce $F(\alpha, v)$ do levé polovice roviny (v), nýbrž jest jimi povaha této funkce dopodrobna vystižena.

Zavedeme-li opět původní označení

$$u=e^{-v}, \qquad \alpha=2\sqrt{a},$$

obdržíme

$$M = \frac{u}{1-u} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{a}{2\nu\pi i - \log u}\right)}{2\nu\pi i - \log u},$$

$$N = \sqrt{a\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{a}{2\nu\pi i - \log u}}}{(2\nu\pi i - \log u)^{\frac{3}{2}}},$$

$$S = \sum_{1}^{\infty} u^m e^{-2\sqrt{am}} = M - N.$$

3. V okolí bodu $u = 1$ jest

$$\log u = (u-1) - \frac{1}{2}(u-1)^2 + \frac{1}{3}(u-1)^3 - \ldots$$

jednoznačnou funkcí, a veškery členy řad M a N mimo členy $\nu = 0$ zůstávají analyticky pravidelné.

Tedy

$$S + \frac{u}{u-1} + \frac{\varphi\left(\frac{-a}{\log u}\right)}{\log u} + \sqrt{a\pi} \frac{e^{\frac{-a}{\log u}}}{(-\log u)^{\frac{3}{2}}} = \mathfrak{P}(u-1)$$

je funkce na $u = 1$ pravidelná. A sice je stálý člen této řady mocnin

$$\mathfrak{P}(0) = \Sigma' \frac{\varphi\left(\frac{a}{2\nu\pi i}\right)}{2\nu\pi i} - \sqrt{a\pi}\, \Sigma' \frac{e^{\frac{a}{2\nu\pi i}}}{(2\nu\pi i)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Symbol $(v + 2\nu\pi i)^{\frac{3}{2}}$ jsme dosud brali ve smyslu

$$(v + 2\nu\pi i)\sqrt{v + 2\nu\pi i},$$

předpokládajíce reálnou část odmocniny kladnou.

Je-li tedy n kladné celistvé číslo, máme

$$(2\nu\pi i)^{\frac{3}{2}} = 2\nu\pi i\sqrt{2\nu\pi i}$$

a

$$\sqrt{2\nu\pi i} = \begin{cases} (1+i)\sqrt{n\pi} \text{ pro } \nu = n, \\ (1-i)\sqrt{n\pi}. \text{ pro } \nu = -n. \end{cases}$$

takže

$$\frac{e^{\frac{a}{2n\pi i}}}{(2n\pi i)^{\frac{3}{2}}}+\frac{e^{-\frac{a}{2n\pi i}}}{(-2n\pi i)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2n\pi\sqrt{n\pi}}\left[\frac{e^{-i\gamma}}{i(1+i)}-\frac{e^{i\gamma}}{1+i}\right]$$

$$=\frac{-\cos\gamma-\sin\gamma}{2n\pi\sqrt{n\pi}}=-\frac{\cos\left(\gamma-\frac{\pi}{4}\right)}{n\pi\sqrt{2n\pi}},$$

$$\gamma=\frac{a}{2n\pi};$$

tedy

$$\mathfrak{P}(0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{ai}{2n\pi}\right)-\varphi\left(\frac{-ai}{2n\pi}\right)}{2n\pi i}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a}{2}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{a}{2n\pi}-\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt{n}}.$$

Výsledek náš takto získaný

$$\sum_{m=1}^{\infty}u^m e^{-2\sqrt{am}}=\frac{u}{1-u}+\frac{\sqrt{a\pi}}{\log u\sqrt{-\log u}}e^{-\frac{a}{\log u}}$$

$$-\frac{\varphi\left(\frac{-a}{\log u}\right)}{\log u}+\mathfrak{P}(u-1) \qquad (9)$$

s hodnotou stálého členu

$$\mathfrak{P}(0)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a}{2}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{a}{2n\pi}-\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt{n}}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{ai}{2n\pi}\right)-\varphi\left(\frac{-ai}{2n\pi}\right)}{2n\pi i} \qquad (10)$$

vystihuje povahu funkce v okolí bodu $u=1$, a zároveň poskytuje možnost stanoviti hodnotu této funkce v tomto singulárním místě.

Předpokládejme nejprve u reálné a menší jedné; pak veličina

$$\omega=\frac{-a}{\log u}, \qquad (a>0)$$

zůstává kladnou a roste přes všecky meze, blíží-li se u hodnotě 1.

Pravou stranu v (9) lze pak psáti

$$\frac{1}{e^{\frac{a}{\omega}}-1}-\frac{\sqrt{\pi}}{a}\,\omega\sqrt{\omega}\,e^{\omega}+\frac{\omega}{a}\varphi(\omega)+\mathfrak{P}(u-1),$$

a přechod ke krajní hodnotě $u=1$ vede ke vzorci

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}}=\mathfrak{P}(0)+\lim_{\omega=\infty}\left\{\frac{1}{e^{\frac{a}{\omega}}-1}+\frac{\omega}{a}\left[\varphi(\omega)-\sqrt{\omega\pi}\,e^{\omega}\right]\right\}.$$

Jak výše bylo poznamenáno, jest

$$\varphi(\omega)=\sqrt{\omega}\,e^{\omega}\,P(\tfrac{1}{2},\,\omega),$$

tedy

$$\sqrt{\omega\pi}\,e^{\omega}-\varphi(\omega)=\sqrt{\omega}\,e^{\omega}\left[\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}-\int_0^{\omega}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}\right]$$

$$=\sqrt{\omega}\,e^{\omega}\int_{\omega}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Dle toho bude

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}}=\lim_{\omega=\infty}\left\{\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}-\frac{\omega\sqrt{\omega}}{a}e^{\omega}\int_{\omega}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}\right\}+\mathfrak{P}(0)$$

$$=\mathfrak{P}(0)-\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\lim_{\omega=\infty}\left\{\omega-\omega\sqrt{\omega}\,e^{\omega}\int_{\omega}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}\right\}.$$

Podle vzorce plynoucího integrací po částech

$$\int_{\omega}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x^s}=\frac{e^{-\omega}}{\omega^s}-s\int_{\omega}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x^{s+1}}$$

máme

$$\int_{\omega}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x^s}=\frac{e^{-\omega}}{\omega^s}\left[1-\frac{s}{\omega}+\frac{s(s+1)}{\omega^2}-\ldots\right],$$

kde chyba je menší než první vynechaný člen; pro $s=\frac{1}{2}$

plyne odtud

$$\omega\sqrt{\omega}\, e^{\omega}\int_{\omega}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \omega\left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{\omega} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\omega^2} - \dots\right]$$

$$= \omega - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{4\omega} - \frac{1.3.5}{8\omega^2} - \dots,$$

tak že vyjde

$$\lim_{\omega = \infty}\left\{\omega - \omega\sqrt{\omega}\, e^{\omega}\int_{\omega}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}\right\} = \frac{1}{2},$$

čímž náš výsledek nabývá tvaru

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} + \mathfrak{P}(0), \tag{11}$$

kde $\mathfrak{P}(0)$ je dáno vzorcem (10).

Dle definice

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots\frac{2m-1}{2}}$$

bude

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = 2\sum_{m} \frac{(2x)^m}{1.3\dots(2m-1)},$$
$$(m = 1, 3, 5, 7, \dots),$$

tedy

$$\varphi\left(\frac{ai}{2n\pi}\right) - \varphi\left(\frac{-ai}{2n\pi}\right) = 2i\sum_{m} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} a^m}{1.3.5\dots(2m-1)(n\pi)^m},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{ai}{2n\pi}\right) - \varphi\left(\frac{-ai}{2n\pi}\right)}{2n\pi i} = \sum_{m} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} a^m}{1.3.5\dots(2m-1)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{m+1}},$$
$$(m = 1, 3, 5, 7, 9, \dots).$$

Avšak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^{2k}} = \frac{2^{2k} B_k}{2(2k)!},$$

kde B_k jsou čísla Bernoulliova

$$\left(B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42}, \dots\right),$$

a tak se tato část vzorce (10) vyjádří s jednoduchými koefficienty.

Podobně obdržíme

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a}{2}}\sum_1^\infty\frac{\cos\left(\frac{a}{2n\pi}-\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt{n}}=\sqrt{a}\left(c_0-c_2\frac{a^2}{2!}\right.$$
$$\left.+c_4\frac{a^4}{4!}-c_6\frac{a^6}{6!}+\ldots+c_1a-c_3\frac{a^3}{3!}+c_5\frac{a^5}{5!}-\ldots\right),$$
$$c_k=\sum_1^\infty\frac{1}{(2n\pi)^{k+1}\sqrt{n}}.$$

Veličiny

$$c_k=\frac{\zeta\left(k+\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^{k+1}}$$

stanoví se pomocí hodnot funkce

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots$$

při $s=k+\frac{3}{2}$, které není obtížno určiti.

Máme pak

$$\mathfrak{P}(0)=\sqrt{a}\left(c_0-\frac{c_2}{2!}a^2+\frac{c_4}{4!}a^4-\ldots\right.$$
$$\left.+c_1a-\frac{c_3}{3!}a^3+\frac{c_5}{5!}a^5-\ldots\right)-\sum_m^\infty(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{2^{2m}}{m+1}B_{\frac{m+1}{2}}\frac{a^m}{(2m)!}$$
$$(m=1,3,5,\ldots). \tag{10*}$$

Při počítání řady

$$\sum_1^\infty e^{-\sqrt{m}},$$

jíž přísluší $a=\frac{1}{4}$, již postačí čtyři členy první řady a dva členy řady druhé, aby se obdrželo šest desetinných míst; kdežto při počítání přímém jest ještě při $m=100$

$$e^{-\sqrt{m}}=\frac{1}{10^{4,34}}.$$

Vraťme se nyní k vzorci (9), předpokládajíce $u>1$, $u-1$ malé; v tom případě pravá strana podává propagaci funkce definované stranou první. Tu pak bude

$$\frac{a}{\log u} = \omega$$

kladné a veliké, a pravá strana bude zníti

$$\frac{-1}{1-e^{-\frac{a}{\omega}}} + \frac{\sqrt{\pi\omega}}{ai}\,\omega\, e^{-\omega} - \frac{1}{a}\,\omega\,\varphi(-\omega) + \mathfrak{P}(u-1),$$

byla-li propagace provedena v jižní části roviny (u), takže bod u zde vlastně jest $u - 0\,.\,i$; zde máme

$$\lim_{\omega=\infty} \sqrt{\omega}\,\omega\, e^{-\omega} = 0,$$

tak že hlavní část pravé strany (9) bude — po vynechání nekonečně malých —

$$\frac{-1}{1-e^{-\frac{a}{\omega}}} - \frac{\omega\,\varphi(-\omega)}{a} + \mathfrak{P}(0),$$

aneb což totéž jest

$$-\frac{\omega}{a} - \frac{1}{2} - \frac{\omega\,\varphi(-\omega)}{a} + \mathfrak{P}(0). \tag{12}$$

Dle vzorce

$$\varphi(\omega) = e^{\omega} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\,\omega^{\nu+1}}{\nu!\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

plyne

$$\varphi(-\omega) = -\, e^{-\omega} \sum_{0}^{\infty} \frac{\omega^{\nu+1}}{\nu!\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} = -\sqrt{\omega}\, e^{-\omega} \int_{0}^{\omega} e^{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Částečnou integrací vychází

$$\int_{1}^{\omega} e^{x} \frac{dx}{x^{s}} = \frac{e^{\omega}}{\omega^{s}} - e + s \int_{1}^{\omega} e^{x} \frac{dx}{x^{s+1}}.$$

Veličina (12), která zní přesně

$$\mathfrak{P}(0) - \frac{1}{2} - \frac{1}{a}\left[\omega + \omega\,\varphi(-\omega)\right]$$

$$= \mathfrak{P}(0) - \frac{1}{2} - \frac{1}{a}\left[\omega - \omega\sqrt{\omega}\, e^{-\omega} \int_{0}^{\omega} e^{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}\right],$$

bude tedy s nekonečně malou chybou vystižena výrazem

$$\mathfrak{P}(0) - \frac{1}{2} + \frac{\omega\sqrt{\omega}}{2a} e^{-\omega} \int_1^{\omega} e^x \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}};$$

ježto pak asymptoticky

$$\int_1^{\omega} e^x \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} \backsim \frac{e^{\omega}}{\omega^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \int_1^{\omega} e^x \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$$

jest limita výrazu (12) táž jako pro výraz

$$\mathfrak{P}(0) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} + \frac{3}{4a} \omega^{\frac{3}{2}} e^{-\omega} \int_1^{\omega} e^x \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}.$$

Tu jest pak

$$\int_1^{\omega} e^x \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}} = \int_1^{\frac{\omega}{2}} + \int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega}, \qquad \int_1^{\frac{\omega}{2}} < e^{\frac{\omega}{2}} . \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\omega^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} < \left(\frac{2}{\omega}\right)^{\frac{2}{5}} \left(e^{\omega} - e^{\frac{\omega}{2}}\right),$$

a tedy

$$\omega^{\frac{3}{2}} e^{-\omega} \int_1^{\omega} e^x \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}} < \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \omega^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}} + \frac{2^{\frac{5}{2}}}{\omega}\left(1 - e^{-\frac{\omega}{2}}\right),$$

kterážto veličina má za limitu nullu.

Tudíž jest v nekonečné blízkosti místa $u = 1$, $u > 1$, hodnota funkce

$$\sum_1^{\infty} u^m e^{-2\sqrt{am}}$$

dána výrazem

$$\mathfrak{P}(0) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}, \tag{13}$$

který se neliší od hodnoty (11), jíž se blíží funkce hodnotami $u < 1$.